现在把问题进一步转化为点 P 是弧 OB 上的一动点，如何求线段 CP 的值？

3.2.3 溯源模型，破障碍

如何解决这个思维障碍？再次追本溯源，发现点 P 在以 O' 为圆心，OO' 为半径圆上的运动，点 C 为圆 O' 外一点，这就是圆中最值基本模型“圆外一点与圆上一点的距离最值问题”．

如图 4，$\because$ 点 P 为弧 OB 上一动点，连接 CO'，交弧 OB 于点 P，这时 CP 取最小值．过点 O' 作 $O'L\perp AC$，垂足为点 L，连接 AO'，$\because$ $\Delta AOO'$ 是等边三角形，$\therefore OO'=OC$，$\therefore \angle O'CL=30^\circ$，$CO'=2O'L$．又 $OO'=4$，$\therefore O'L=2\sqrt{3}$，$\therefore CO'=4\sqrt{3}$，$\therefore CP=CO'-O'P=4\sqrt{3}-4$，$\therefore$ 点 P 在圆 O' 的弧 OB 上运动时，CP 的最小值为 $4\sqrt{3}-4$，所以 $L_{\Delta PMN}$ 取得最小值 $\sqrt{3}PC=\sqrt{3}\cdot(4\sqrt{3}-4)=12-4\sqrt{3}$．

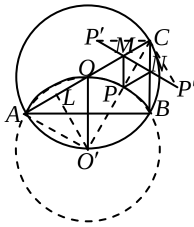

图 4

4 教学反思

4.1 追本溯源，突出模型

数学建模思想是一项重要的数学核心素养，帮助学生建立数学模型并用模型去解决实际问题是教学的重要目标．初中几何问题中蕴含丰富的模型，比如“将军饮马”、“一线三等角”等．几何模型的教学是培养学生数学直观素养，树立学生建模意识的重要途径．在总结、提炼、运用模型同时，要引导学生弄清模型所蕴含的知识本源和数学思想方法．

4.2 挖掘思想，提升素养

教学中中考压轴题，情境复杂，综合性强，对学生分析问题、解决问题的能力要求较高，涉及到数学思想、方法多．在教学中，教师要有意识总结提炼数学思想和方法．在本题的教学中要以问题为导向，突出模型、转化、运动变化等思想．如在问题的解决中将 P 点化动为静，动静结合，化曲为直求周长以及将 $P'P''$ 的长转化 CP，最终将问题转化为模型去解决，从而实现所求目标，整个过程突出转化思想、模型思想，通过不断总结、提炼、运用数学思想，展开学生的思维，在课堂教学中落实和发展学生数学建模、几何直观和逻辑推理等核心素养．

参考文献

[1]戴秀梅．对一道经典数学题的再探究[J]．中学数学教学参考，2020（3）（中旬）：58-60

精心研究高考试题　精准把脉复习方向

——以一节高三数列复习课为例

李　刚　　江苏省木渎高级中学（215101）

《普通高中数学课程标准（2017年版）》强调“四基”（即基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验）和“四能”（即从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力）．通过高三数学复习提高学生的数学核心素养，教师要精选例题，合理变式，适度拓展，深入探究，高考题是教师选择典题的很好素材．但是如果直接将高考题，特别是高考压轴题作为例题，有时给学生一种“高处不胜寒”的感觉．这需要教师在备课中采用一题式教学，寻找本源，拾级而上，让学生围绕载有数学核心知识的压轴题，学会思考，学会从不知开始，一步一步地达到问题的核心，直至最终的问题解决[1]．

笔者最近应邀参加了所在学校“美妙课堂”的教学展示活动并开设了一节数列公开课，课题是《数列的综合应用》．由于是一节一轮复习中综合性较强的复习课，课题给得比较广，所以笔者尝试通过选择高考数列压轴题作为备课模型，对试题庖丁解牛，以《对等差数列、等比数列通项公式的再探究》为题，通过设问层层深入，不断引导学生探究数学问题的本质和内涵，让学生通过所学知识站在一个新的高度思考问题，收到了比较好的效果，现整理成文，不妥之处，敬请同行批评指正．

1 试题再现

题目 （2019年高考江苏卷·20）定义首项为1且公比为正数的等比数列为“$M-$数列”.

（1）已知等比数列$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$满足：$a_2a_4=a_5$，$a_3-4a_2+4a_4=0$，求证：数列$\{a_n\}$ 为“$M-$数列”；

（2）已知数列$\{b_n\}$满足：$b_1=1$，$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{b_n}-\dfrac{2}{b_{n+1}}$，其中$S_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和.

①求数列$\{b_n\}$的通项公式；

②设m为正整数，若存在“$M-$数列”$\{c_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$，对任意正整数$k$，当$k\le m$时，都有$c_k\le b_k\le c_{k+1}$成立，求$m$的最大值.

本题是2019年江苏高考解答题的最后一题，从考查能力方面看，本题重点考查学生的抽象能力、逻辑推理能力和数学探究能力，是《考试说明》中强调的“以能力立意，强化对数学学科核心素养的考查”；从考查知识点方面，主要考查数列基本量的运算，由S_n求通项，数列中的恒成立问题；从考查思想方法方面，主要考查函数与方程、数形结合以及等价转化思想．可以说，作为试卷的最后题，本题具有很好的区分度．笔者在备课中，就选取了第2问的第2小问为背景，寻根溯源，层层深入.

2 教学设计

2.1 回归课本，探寻本源

课本中对概念、公式的推导，例习题的选择有很大的教育功能，对学生理解知识、培养数学素养和提高解题能力具有潜在的价值．但是有些教师在高三复习中按照一本教辅讲到底，忽视教材中蕴含的丰富的试题背景及思想方法.

比对上述试题的第2问，其考查数列的内涵是非常丰富的，如果学生在平时的学习中只懂得做题，不深入理解概念的内涵的话，在考试中处理起来还是比较棘手的.

笔者在处理这一问题时，首先给出了如下引例:

引例 我们知道，等差数列$\{a_n\}$的通项$a_n=dn+(a_1-d)$，等比数列$\{b_n\}$的通项$b_n=\dfrac{b_1}{q}q^n$.

（1）在正项等差数列$\{a_n\}$和正项等比数列$\{b_n\}$中，若$a_1=b_1$，$a_3=b_3(a_1\ne a_3)$，则a_2______b_2，a_5_______b_5．（填“$>$”或“$<$”）

（2）已知$a_n=n$，$b_n=a\cdot 2^n$.

① 若$a_n\le b_n$对任意正整数n恒成立，则实数a的取值范围是________；

② 当$a=\dfrac{1}{8}$时，设m为正整数．若对任意正整数k，当$k\le m$时，都有$a_k\ge b_k$成立，则m的最大值是________.

设计意图 在苏教版教材中，通过P_{39}例3和P_{53}例3，回顾等差数列与等比数列的通项公式，让学生直观感知通项公式在平面直角坐标系中对应的函数的图象（如图1），进而解决引例设置的两个问题.

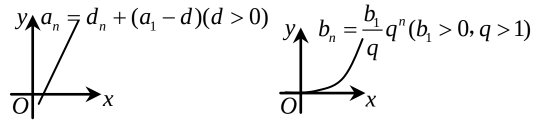

图1

对于问题（1），根据条件可以知道$d>0$，$q>1$，所以在同一坐标系内作出图象2，利用数形结合思想，通过比较两个函数的图象，直观感知即得$a_2>b_2$，$a_5<b_5$.

对于问题（2）中的第1小问，因为$a_n\le b_n$对任意正整数n恒成立，首先取$n=1$可得$a\ge\dfrac{1}{2}$，由于图象是离散的点，所以通过验证发现当$a\ge\dfrac{1}{2}$时，$a_n\le b_n$对大于等于2的正整数n均成立，所以$a\ge\dfrac{1}{2}$．当然，也可以选择参变分离得$a\ge\dfrac{n}{2^n}$，通过研究$f(n)=\dfrac{n}{2^n}$的单调性可得$a\ge\dfrac{1}{2}$.

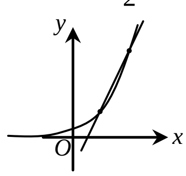

图2

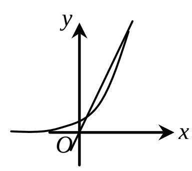

图3

对于问题（2）中的第2小问，当$a=\dfrac{1}{8}$时，$b_n=2^{n-3}$，是将$y=2^n$向右平移3个单位得到，所以作出$a_n=n$与$b_n=2^{n-3}$的图象（如图3），可以得到m的最大值是5．当然，也可以通过构造$f(n)=\dfrac{n}{2^{n-3}}$，利用单调性，通过解不等式$f(n)\ge1$得到n的最大值是5，即所求m的最大值是5.

综上可知，对于处理数列中的一类不等式恒成立或者有解问题，可以通过构造数列的单调性求解，如果涉及到的数列是等差或者等比数列通项的时

候，可以通过作出它们的图象，利用数形结合，直观感知其结果，创造想法，最后验证猜想的结果．

2.2 典例示范，返璞归真

例题 已知数列$\{a_n\}$满足$S_n=\dfrac{n^2+na_1}{2}$，数列$\{b_n\}$满足$(q-1)T_n=qb_n-1\,(q\in\mathbf{R},q>0)$，其中$S_n$，$T_n$分别为数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前$n$项和．

（1）求a_n，b_n；

（2）若对任意正整数n都有$a_n\le b_{n+1}$成立，求q的取值范围．

设计意图 通过第（1）问，由和求项可得$a_n=n$，$b_n=q^{n-1}$，所以$n\le q^n$对任意正整数n都成立．有了引例作为例题的铺垫，学生在处理第（2）问时想法百花齐放，通过图象分别取$n=1,2,3,4,\cdots$，得$q\ge 1$，$q\ge\sqrt{2}$，$q\ge\sqrt[3]{3}$，$q\ge\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$，$\cdots$，取$q\ge\bigcap\limits_{k=1}^{n}[\sqrt[k]{k},+\infty)$，比较得到$q\ge\sqrt[3]{3}$．

当然作为解答题，从规范角度来说，通过图象感知结果，但是不大好书写．可以通过两边同时取对数，构造$\ln q\ge\dfrac{\ln n}{n}$．令$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x\ge 1)$，通过求导得$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$在$(1,\mathrm{e})$上单调递增，在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递减，所以$f(x)_{\max}=f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$．因为$n\in\mathbf{N}^*$，所以$f(n)_{\max}=\max\{f(2),f(3)\}=f(3)=\dfrac{\ln 3}{3}$，进而$q\ge\sqrt[3]{3}$．

对于本例，学生如果对不等式$n\le q^n$直接求解处理，从图象角度观察很容易得到答案，难点是不容易书写．若从分离变量的角度分析，学生思考的难点是没办法直接分离．

其实指数问题对数化是一种解题方法，通过对不等式两边同时取对数，得到不等式$\ln q\ge\dfrac{\ln n}{n}$，进而通过求最值求出$q\ge\sqrt[3]{3}$．

通过研究所得等差、等比数列通项公式的图象特征，可以观察图象猜想结果，同时可以通过构造数列的单调性规范求得结果．

2.3 变式探究，拓展提升

通过引例及例题的探究和解答，学生应该熟悉了处理这一类问题的基本方法，在此基础上，乘胜追击，通过后面两个变式探究，进一步巩固学生对这类问题的处理意识．

探究1 若对任意正整数n都有$a_n\le b_n$成立，求q的取值范围．

设计意图 从图象角度分析，将$y=q^n$的图象向右平移一个单位后得到$y=q^{n-1}$的图象，然后取$n=2$得到$q\ge 2$．另外可以将不等式$n\le q^{n-1}$两边同时取对数，方法如例题．探究1是对例题讲解过后的直接演练．同时也为探究2提供方法铺垫．

探究2 设m为正整数．若对任意正整数k，当$k\le m$时，都有$b_k\le a_k\le b_{k+1}$成立，求m的最大值．

设计意图 探究2实际就是2019江苏高考20题的最后一问，综合性较强．有了引例、例题及其探究1作铺垫，学生处理探究2的想法水到渠成．官方给出的答案如下：

法1 因为$b_k\le a_k\le b_{k+1}$，

所以$q^{k-1}\le k\le q^k$，其中$k=1,2,3,\cdots,m$．

当$k=1$时，有$q\ge 1$；

当$k=2,3,\cdots,m$时，有$\dfrac{\ln k}{k}\le\ln q\le\dfrac{\ln k}{k-1}$．

设$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>1)$，

则$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$．

令$f'(x)=0$，得$x=\mathrm{e}$．

列表如下：

x	$(1,\mathrm{e})$	e	$(\mathrm{e},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

因为$\dfrac{\ln 2}{2}=\dfrac{\ln 8}{6}<\dfrac{\ln 9}{6}=\dfrac{\ln 3}{3}$，

所以$f(k)_{\max}=f(3)=\dfrac{\ln 3}{3}$．

取$q=\sqrt[3]{3}$，当$k=1,2,3,4,5$时，

$\dfrac{\ln k}{k}\le\ln q$，即$k\le q^k$，

经检验知$q^{k-1}\le k$也成立．

因此所求m的最大值不小于5．

若$m\ge 6$，分别取$k=3,6$，

得$3\le q^3$，且$q^5\le 6$，

从而$q^{15}\ge 243$，且$q^{15}\le 216$，

所以q不存在．因此所求m的最大值小于6．

综上，所求m的最大值为5．

除了命题组提供的解答，对于这个问题，还可

以这样解答:

法 2 对任意正整数k，当$k \le m$时，都有$b_k \le a_k \le b_{k+1}$成立等价于存在q使得$1=1 \le q \le 2 \le q^2 \le 3 \le q^3 \le 4 \le q^4 \le 5 \le \cdots \le m-1 \le q^{m-1} \le m \le q^m$成立，即存在$q$，使得下列不等式$1 \le q \le 2$，$\sqrt{2} \le q \le \sqrt{3}$，$\sqrt[3]{3} \le q \le \sqrt[3]{4}$，$\sqrt[4]{4} \le q \le \sqrt[4]{5}$，…，$\sqrt[m-1]{m-1} \le q \le \sqrt[m-1]{m}$，$\sqrt[m]{m} \le q$成立，此时问题转化为求最大的$m$，满足$\bigcap_{k=1}^{m-1}[\sqrt[k]{k}, \sqrt[k]{k+1}]$为非空集合，通过比较可得所求$m$的最大值为 5.

有了引例、例题及其探究 1 作铺垫，学生处理探究 2 的想法水到渠成．对于不等式$q^{k-1} \le k \le q^k$，如果引入函数$y_1 = k$，$y_2 = q^{k-1}$，$y_3 = q^k$，作出图象，便于解释官方给出的答案以及法 2 的解答.

对于$k \le q^k$，由图 4 可以观察到$k=3$时，$q^3=3$，k取其余值，均满足$k < q^k$，所以要满足$k \le q^k$恒成立，必须要有$q \ge \sqrt[3]{3}$．另外，要求m的最大值，从图 5 可以发现，当$m=5$时，$q^4=5$．所以要满足$q^{k-1} \le k$，必须要有$q^4 \le 5$，即$q \le \sqrt[4]{5}$．因此m的最大值为 5，此时$q \in [\sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{5}]$.

另外，本题还可以通过$\dfrac{\ln k}{k} \le \ln q \le \dfrac{\ln k}{k-1}$对任意$k \in \{2, 3, \cdots, m\}$恒成立，从而$(\dfrac{\ln k}{k})_{\max} \le \ln q \le (\dfrac{\ln k}{k-1})_{\min}$，进而可得$\dfrac{\ln 3}{3} \le \ln q \le \dfrac{\ln m}{m-1}$，令$g(m) = \dfrac{\ln m}{m-1}(m \ge 2)$，通过研究$y = g(m)$的单调性可得结果，此处从略.

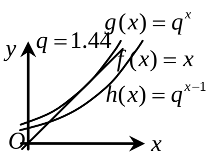

图 4

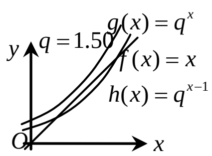

图 5

3 教学启示

随着新课程改革的不断推进，高考试题更加注重对学生核心素养的考查，而核心素养更加强调学生的知识和思维能力．在高三数学复习中，解题教学是其核心环节，我们教师应该通过解题教学，教会学生数学的思维方法，即“会用数学的眼光观察世界，会用数学的语言表达世界，会用数学的思维思考世界”．同时，我们教师应该带领学生在高三复习中返璞归真，跳出题海，真正做到高效复习．切实做好以下几个方面:

3.1 回归教材，构建体系

高考时让学生感到陌生的题目，究其背景，很多试题都可以在教材中找到原型．教材中的例习题都是数学专家精选的，具有典型性、示范性和探究性，作为教师，我们应该充分认识其蕴含的教育教学价值，通过对例习题充分的挖掘和研究，帮助学生优化认知、活跃思维，提高解题能力．所以在复习中要注重回归教材，精选课本例习题，变式拓展，重视习题教学中解题思路的探索与选择，重视教材中公式、定理等推导的方法和思想的介绍，将相关重要的知识点串联起来，构建知识网络．比如本节课，我们可以通过等差、等比数列通项公式的特点，建立与一次函数、指数函数之间的联系；通过数形结合、等价转化等思想，合理选择方法解决数列中的一类不等式恒成立问题.

3.2 注重通法，淡化技巧

高考试题注重对通性通法的考查，注重考查学生的“四基”，因此在高三复习时，要注重本质，强化通法，淡化技巧．回归本质就是要以认清数学问题的本源为基础，探求解决问题的根本属性与规律，达到善于解题的目标[2]．所以，我们要立足考题，充分认识到通性通法在解答高考题时的重要性．比如上述高考压轴题的解答方法，仍然是回归通性通法.

另外，从高考阅卷角度来看，如果不重视通性通法，下面一些情况很容易失分:

（1）解题思路混乱，整个解答目的不明确，看不出想解决什么问题；

（2）相关过程交代不清，或没有交代，解答中有些字符、结论出现很突然，使阅卷教师云里雾里；

（3）解答跳步现象严重，有些结论的得到，缺少主要依据，前后也看不出有什么因果关系.

出现以上情况的主要原因就是因为平时不注重对通性通法的掌握.

因此，我们应该引导学生解题时立足基础，淡化技巧，规范书写.

3.3 突出变式，强化能力

变式教学是高三复习常用的一种教学方法，波利亚对解题过程有着精辟的论述：不断的变换你的问题；我们必须一再地变化它，重新叙述它，直到最后找到某些有用的东西为止．教师需要在解题教学中将主问题及其变式串成一个系列，通过变式把问题进行深化、拓展，通过变式把相关的问题变成一个系列和一个主题，通过变式把原本单一的、离

散的问题串成一个题组和一个整体．当然，变式本身必须要围绕相关问题的数学核心概念、数学核心思想展开，通过变式，把问题、方法、思想放在一个系统内，进行认识、梳理、整合，从而实现题目的一题多变、一题多解、多题一解、多题优解[3]．

通过变式，教师要引导学生从多方面、多层次去理解数学问题，从变中发现规律，巩固基础，建立联系，发散思维，强化能力．在变的过程中，教师还要引导学生学会如何思考，完善学生的认知结构，真正提高学生分析问题、解决问题的能力．

3.4 关注思维，提升素养

《普通高中数学课程标准（2017年版）》强调教师注重学生核心素养的培养，倡导独立思考、自主学习、合作交流的学习模式，并在教育过程中强调重视过程性评价，促进学生在不同的学习阶段数学核心素养水平的达成．高三阶段主要任务是复习，在这一年内，学生将经历一轮、二轮复习，基本上学生天天在做题，通过训练，学生的解题速度得到了一定的提高，但是，如果一味地追求做题，忽视在复习过程中对学生思维能力的培养，最后可能出现的情况是高考下来，感觉三年高中数学“白学”了．数学离不开思维，因此，在高三复习中，教师要根据学生的认知规律和思维特点，精选典题，精心研究教材内容的呈现方式，通过复习，不断发展学生数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析能力，培养学生的“四能”．关注学生数学思维能力的提高，能够灵活运用所学知识解决综合问题．

在本节课中，笔者尝试通过引领学生对问题进行探究，从易到难，层层递进，在挖掘试题的本质的过程中，培养学生数学抽象、逻辑推理等思维能力，以期提高学生的数学素养．

高考数学命题强调通性通法，压轴题也不例外．反观我们现在的高三复习，有些教师认为研究高考压轴题是浪费时间，所以不愿意花时间带领学生去领悟这些题目的味道，这就导致很多学生做到最后一题时放弃思考．其实，处理压轴题，学生在有效提取题设条件的关键要素和隐含信息后，需要做的就是坚定信心，仔细分析，联想突破，认真探究，合理转化，耐心求解[4]．教师要认真研究考题，精心设置问题，带领学生通过复习获得清晰的知识网络，加深对数学知识的理解，提高自身的数学素养．

参考文献

[1]郭华．深度学习及其意义[J]．课程·教材·教法，2016（11）：25-32
[2]吴统胜．一道高考切点弦问题的探究与拓展[J]．数学通讯（教师），2018（10）：51-56
[3]李刚．精选典题 高效复习[J]．数学通讯（教师），2015（3）：51-54
[4]梅磊、周珂．一道高考压轴题的多解、多思与多变[J]．数学通讯（教师），2017（2）：31-34
[5]中华人民共和国教育部制订．普通高中数学课程标准（2017年版）[S]．北京：人民教育出版社，2018
[6]普通高中课程标准试验教科书（苏教版）数学必修5[M]．南京：江苏教育出版社，2012

（本文系江苏省教育科学“十四五”规划课题“基于深度学习的高中数学单元教学设计研究”（课题编号：C-c/2021/02/21）阶段性研究成果）

一道填空题的解法赏析和教学思考

倪 建 江苏省南京第一中学（210001）

教师解题时会思维定势，特别是之前结果类似的问题，立刻就能大脑里提取记忆，很快给出这道题的“简单”解法．同样面对这道题，学生的思维是没有束缚的，非常活跃和发散，虽然解法通常会比较繁琐，但更自然，贴近其他学生，教师可以积极引导学上采用更好的解题方法．也有很多时候，学生的一些解法会让人眼前一亮，极大地调动学生学习数学的积极性．笔者在讲一元二次方程的一道习题时，对此感受颇深．

1 题目呈现

关于x的一元二次方程$(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$的两根相等，则a,b,c的关系为____________．

2 解法展示和分析

解法1 一元二次方程有两个相等的实根，

所以$(b-c)^2-4(a-b)(c-a)=0$，

化简得$b^2+2bc+c^2-4ac-4ab+4a^2=0$，

分组分解：$(b^2+2bc+c^2)-(4ac+4ab)+4a^2=0$，

即$(b+c)^2-4a(b+c)+4a^2=0$，