因 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$，得 $y'=\dfrac{-b^2x}{a^2y}$，则切线 l_1,l_2 的方程分别为 $y=\dfrac{-b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)+y_1$，$y=\dfrac{-b^2x_2}{a^2y_2}(x-x_2)+y_2$，可得 $E_1\left(a,\dfrac{b^2(a-x_1)}{ay_1}\right)$，$E_2\left(a,\dfrac{b^2(a-x_2)}{ay_2}\right)$，$E_3\left(-a,\dfrac{b^2(a+x_1)}{ay_1}\right)$，$E_4\left(-a,\dfrac{b^2(a+x_2)}{ay_2}\right)$.

(1) $y_{E_1}\cdot y_{E_2}=\dfrac{b^4(a-x_1)(a-x_2)}{a^2y_1y_2}$

$=\dfrac{(a^2+b^2m^2)[a^2+x_1x_2-a(x_1+x_2)]}{-a^2}$

$=\dfrac{(a^2+b^2m^2)[(a-c)^2+m^2y_1y_2+m(c-a)(y_1+y_2)]}{-a^2}$

$=\dfrac{a^2(a-c)^2+b^2[(a-c)^2-b^2-2c(c-a)]m^2}{-a^2}$

$=-(a-c)^2$，则 $|E_1T|\cdot|E_2T|=(a-c)^2=|FT|^2$. 容易证明，$\mathrm{Rt}\triangle E_1TF\sim\mathrm{Rt}\triangle FTE_2$，则 $\angle E_1FE_2=\dfrac{\pi}{2}$. 因此，$\triangle E_1FE_2$ 为直角三角形.

(2) 类似于(1)的证明.

(3) 由于 $F(c,0)$，则 $\overrightarrow{FE_3}=\left(-(a+c),\dfrac{b^2(a+x_2)}{ay_2}\right)$，$\overrightarrow{FE_1}=\left(a-c,\dfrac{b^2(a-x_1)}{ay_1}\right)$. 于是，$E_1,F,E_3$ 共线 $\Leftrightarrow\overrightarrow{FE_1}//\overrightarrow{FE_3}\Leftrightarrow-(a+c)\dfrac{b^2(a-x_1)}{ay_1}=(a-c)\dfrac{b^2(a+x_2)}{ay_2}\Leftrightarrow-(a+c)\dfrac{(a-my_1-c)}{y_1}=(a-c)\cdot\dfrac{(a+my_2+c)}{y_2}\Leftrightarrow-(a+c)[(a-c)y_2-my_1y_2]=(a-c)[(a+c)y_1+my_1y_2]\Leftrightarrow(a-c)(a+c)(y_1+y_2)-2cmy_1y_2=0$，将①式代入上式，显然成立.

同理可证：E_2,F,E_4 共线.

(4) 由(3)可知 $\triangle E_1FE_2\sim\triangle E_3FE_4$，则相似比等于 $|FT|:|FR|=(a-c):(a+c)$. 因此，$\dfrac{S_{\triangle E_1FE_2}}{S_{\triangle E_3FE_4}}=\dfrac{(a-c)^2}{(a+c)^2}=\dfrac{(1-e)^2}{(1+e)^2}$. 另一方面，由(1)(2)(3)可推断 $\angle E_1FE_4=\angle E_2FE_3=90°$. 而 $\dfrac{FE_2}{FE_1}=\dfrac{FE_4}{FE_3}$，则 $S_{\triangle E_1FE_4}=\dfrac{FE_1\cdot FE_4}{2}$，$S_{\triangle E_2FE_3}=\dfrac{EF_2\cdot EF_4}{2}$，故 $S_{\triangle E_1FE_4}=S_{\triangle E_2FE_3}$. 双曲线上也有与性质 4 类似的结论，有兴趣的读者可自行验证.

性质 6　设过双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 F 的直线 l 与 C 交于 A,B(都不是 C 的顶点)，R,T 分别是 C 的左右顶点，过 A,B 作 C 的切线 l_1,l_2. 令 l_1 分别与直线 $x=a$ 和 $x=-a$ 交于 E_1,E_4，l_2 分别与直线 $x=a$ 和 $x=-a$ 交于 E_2,E_3，则

(1) E_1,E_2 的纵坐标之积为 $-(a-c)^2$ 且 $\triangle E_1FE_2$ 为直角三角形；

(2) E_3,E_4 的纵坐标之积为 $-(a+c)^2$ 且 $\triangle E_3FE_4$ 为直角三角形；

(3) E_1,F,E_3 共线，E_2,F,E_4 共线；

(4) $\dfrac{S_{\triangle E_1FE_2}}{S_{\triangle E_3FE_4}}=\dfrac{(e-1)^2}{(e+1)^2}$($e$ 是椭圆 C 的离心率)，$S_{\triangle E_1FE_4}=S_{\triangle E_2FE_3}$.

利用性质 3 和性质 5，可以得到下面的结论.

性质 7　如图 5，设 F 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点，E_1,E_2 是直线 $x=a$ 上的两点且二者纵坐标之积为 $-(a-c)^2$. 过 E_1 作 C 和圆 F：$(x-c)^2+y^2=(a-c)^2$ 的切线，切点分别为 A,J；过 E_2 作 C 和圆 F 的切线，切点分别为 B,K，则 A,J,F,K,B 五点共线.

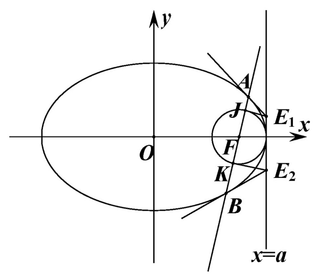

图 5

例析数学解题中挖掘隐含信息的几种途径

广东省惠州市第一中学　(516007)　陈　义　方志平

所谓隐含信息就是指题目没有直说却隐藏在文字、式子或图形等信息中. 这些信息常常巧妙地隐藏在题设的背后，不易被发现. 隐含条件是解题思路中关键的因素，往往因没抓住而使解题一筹莫展，甚至很容易把解题思路引向歧途. 因此解题者要善于寻找题目中的“蛛丝马迹”，从多角度，多方

向,多层次去挖掘隐含条件,顺藤摸瓜,捕捉隐藏信息,往往可以迅速为解题提供关键线索,收到事半功倍之效.本文举例说明数学解题中挖掘隐含信息的几种途径,供参考.

1. 从题目给出的条件中挖掘隐含信息

例 1 若 $x,y,a\in\mathbf{R}$,且 $\begin{cases}x+y=2a-1(1),\\ x^2+y^2=a^2+2a-3(2),\end{cases}$ 求当 xy 取到最小值时的 a 的值.

解:由(1)式平方减(2)式得 $xy=\frac{1}{2}(3a^2-6a+4)=\frac{1}{2}[3(a-1)^2+1]$,再由 $xy=\frac{1}{2}(3a^2-6a+4)$ 与 $x+y=2a-1$ 消去 y 得 $x^2-(2a-1)x+\frac{1}{2}(3a^2-6a+4)=0$,由判别式 $\triangle=(2a-1)^2-4\times\frac{1}{2}(3a^2-6a+4)=-2a^2+8a-7\geqslant0$,求得 $\frac{1}{2}(4-\sqrt{2})\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}(4+\sqrt{2})$.又由 $x^2+y^2=a^2+2a-3\geqslant0$ 得 $-3\leqslant a\leqslant2$, $\therefore\frac{1}{2}(4-\sqrt{2})\leqslant a\leqslant2$.故当 $a=\frac{1}{2}(4-\sqrt{2})$时,$xy$ 有最小值.

评注:本题中 x、$y\in\mathbf{R}$ 是存在的实数,即条件中关于 x,y 的二元二次方程组是有解的,于是消去 y 后得到关于 x 的一元二次方程的根的判别式$\triangle\geqslant0$,这是一个隐含条件,其次 $x^2+y^2\geqslant0$ 是另外一个隐含条件.这二者若不能挖掘出来,是不可能求出正确结果的.

例 2 已知函数 $f(x)=\frac{(x+1)^2+3\sin x}{x^2+1}$,则 $[f(x)]_{\max}+[f(x)]_{\min}=$________.

解:$f(x)=\frac{(x+1)^2+3\sin x}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)+2x+3\sin x}{x^2+1}=1+\frac{2x+3\sin x}{x^2+1}$,设 $g(x)=\frac{2x+3\sin x}{x^2+1}$,显然 $g(x)$是 R 上的一个奇函数,且 $[g(x)]_{\max}+[g(x)]_{\min}=0$, $\therefore f(x)=g(x)+1$,于是 $[f(x)]_{\max}+[f(x)]_{\min}=[g(x)+1]_{\max}+[g(x)+1]_{\min}=[g(x)]_{\max}+[g(x)]_{\min}+2=2$.

评注:本题结构特征不难让我们想到先变形、分离常数得出$f(x)=1+\frac{2x+3\sin x}{x^2+1}$,于是揭示出$f(x)$中隐藏着常数 1 和一个奇函数的和,利用奇函数的性质,问题则迎刃而解.

2. 从题目涉及的概念中挖掘隐含信息

例 3 等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=1,a_n=31$,若公差 d 为正整数,则项数 n 的不同取值有________种.

解:$\because 31=1+(n-1)d\Rightarrow n-1=\frac{30}{d}$,$\therefore d=1,2,3,5,6,10,15,30.\Rightarrow n=2,3,4,6,7,11,16,31$.由于 $n\geqslant3$,$\therefore n=2$(舍去).故项数 n 的不同取值有 7 种.

评注:由本题条件容易求出项数 n 的不同取值,问题是学生忽视等差数列的定义,此概念隐藏着数列至少有 3 项.可见这个隐蔽性若没有挖掘,会直接导致本题求解出错.因此,数学解题时从题目牵涉的概念中挖掘隐含信息是值得我们关注的.

例 4 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$,若 $f(x)$在区间$[0,2\pi]$上恰有 3 个极值点,则 ω 的取值范围是________.

解:由题意,令 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)=\pm1$,即 $\omega x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,整理得 $x=\frac{\pi}{\omega}\left(k+\frac{1}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$,又 $f(x)$在区间$[0,2\pi]$上恰有 3 个极值点,则这三个极值点只能在 $k=0,1,2$ 时取得.于是有 $\frac{\pi}{\omega}\left(2+\frac{1}{4}\right)<2\pi\leqslant\frac{\pi}{\omega}\left(3+\frac{1}{4}\right)$,又 $\omega>0$,求得 $\frac{9}{8}<\omega\leqslant\frac{13}{8}$.

评注:由函数极值的定义可知,函数的极值点不能落在区间的端点处,这个概念是学生很容易忽视的.因而求解时切切不能写成$\frac{\pi}{\omega}\left(2+\frac{1}{4}\right)\leqslant2\pi<\frac{\pi}{\omega}\left(3+\frac{1}{4}\right)$的形式.

3. 从题目所求的结论中挖掘隐含信息

例 5 下列命题中为真命题的序号是______.

①$\ln3<\sqrt{3}\ln2$,②$\ln\pi<\sqrt{\frac{\pi}{e}}$,③$2^{\sqrt{15}}<15$,④$3e\ln2<4\sqrt{2}$.

解:对于①,$\ln3<\sqrt{3}\ln2\Leftrightarrow\frac{\ln3}{\sqrt{3}}<\ln2\Leftrightarrow\frac{\ln\sqrt{3}}{\sqrt{3}}<\frac{\ln2}{2}$;对于②,$\ln\pi<\sqrt{\frac{\pi}{e}}\Leftrightarrow\frac{\ln\pi}{\sqrt{\pi}}<\frac{1}{\sqrt{e}}\Leftrightarrow\frac{\ln\pi}{\sqrt{\pi}}<\frac{\ln e}{\sqrt{e}}\Leftrightarrow\frac{\ln\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}<\frac{\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$;对于③,$2^{\sqrt{15}}<15\Leftrightarrow\sqrt{15}\ln2<\ln15\Leftrightarrow\ln2<\frac{\ln15}{\sqrt{15}}\Leftrightarrow\frac{\ln2}{2}<\frac{\ln\sqrt{15}}{\sqrt{15}}\Leftrightarrow\frac{\ln4}{4}<\frac{\ln\sqrt{15}}{\sqrt{15}}$;对于④,$3e\ln2<4\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{\ln8}{2\sqrt{2}}<\frac{2}{e}\Leftrightarrow\frac{\ln2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}<\frac{1}{e}\Leftrightarrow\frac{\ln2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}<\frac{\ln e}{e}$.

构造函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$，求导得：$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$. 则 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上递增，在 $(e,+\infty)$ 上递减. $\therefore f(\sqrt{3})<f(2)$，①正确；$f(\sqrt{\pi})<f(\sqrt{e})$，②错误；$f(4)<f(\sqrt{15})$，③正确；$f(2\sqrt{2})<f(e)$，④正确. 故真命题序号是①③④.

评注：根据结论，四个命题中数的特征，不等式都可以凑成 $\dfrac{\ln a}{a}<\dfrac{\ln b}{b}$ 的形式，于是构造函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$，利用函数的单调性可求解. 这需要学生要有逆向思维，方可变形并挖掘隐含信息.

例 6　设方程 $x^2+ax+b-2=0(a,b\in\mathbf{R})$，在 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ 上有实根，求 a^2+b^2 的最小值.

解：将 a^2+b^2 视为点 (a,b) 与原点距离的平方，在坐标平面 $O-ab$ 上，则点 (a,b) 落在直线 $xa+b+x^2-2=0$ 上（视 a,b 为变量），则问题转化为当 $x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ 时，直线 $xa+b+x^2-2=0$ 上的点到原点之间的距离平方的最小值问题，设原点到直线 $xa+b+x^2-2=0$ 的距离为 d，则 $a^2+b^2=d^2=\left(\dfrac{|x^2-2|}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2=(x^2+1)+\dfrac{9}{x^2+1}-6$，又 $x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$，令 $t=x^2+1(t\geqslant 5)$，则函数 $f(t)=t+\dfrac{9}{t}-6$ 在区间 $[5,+\infty)$ 上单调递增，即有 $f(t)\geqslant f(5)=5+\dfrac{9}{5}-6=\dfrac{4}{5}$，故 a^2+b^2 的最小值是 $\dfrac{4}{5}$.

评注：从本题条件中想通过参变分离，直接用 x 来表示 a^2+b^2 是很难做到的；构造二次函数求解也是十分困难的. 于是逆向思考，从结论着手挖掘隐藏信息，由 a^2+b^2 联想到点 (a,b) 与原点 $(0,0)$ 之间距离的平方，于是所求结论转化为点与线之间的距离问题.

4. 从题目涉及的图形中挖掘隐含信息

例 7　如图 1，已知三棱锥 $A-BCO$，OA,OB,OC 两两垂直，且长度分别为 3,4,5. 长为 2 的线段 MN 的一个端点 M 在棱 OA 上运动，另一个端点 N 在 $\triangle BCO$ 内及边界运动，则线段 MN 的中点 P 的轨迹与三棱锥的面所围成的几何体中较小的体积为________.

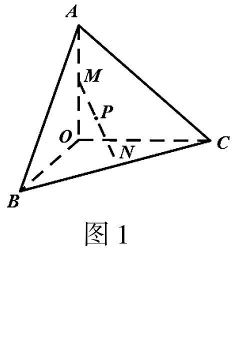

图 1

解：由题意知，$OA\perp$ 平面 OBC，连接 ON,OP. 则 $\triangle OMN$ 为直角三角形，且 $OP=\dfrac{1}{2}MN=1$，所以点 P 的轨迹为以 O 为球心，1 为半径的 $\dfrac{1}{8}$ 个球面，所以点 P 的轨迹与三棱锥的面所围成的几何体中较小的体积为 $V=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{4}{3}\pi\cdot OP^3=\dfrac{\pi}{6}$.

评注：本题图形隐含着 P 点是一个直角三角形斜边的中点，且是动态的，OP 长总是线段 MN 长度的一半，于是挖掘出点 P 的轨迹是球面的一部分.

例 8　已知锐角 α,β,γ 满足 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$，求证 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\geqslant 3\sqrt{2}$.

证明：由 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$ 得 $1-\cos^2\alpha+1-\cos^2\beta+1-\cos^2\gamma=2$，即 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，构造长、宽、高分别 a、b、c 的长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，如图 2，设体对角线 AC_1 与棱 AB，AD，AA_1 的夹角分别为 α,β,γ. 于是有 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}+\dfrac{\sqrt{c^2+a^2}}{b}+\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)+\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\right)+\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\right)\right]\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}(2+2+2)=3\sqrt{2}$. 故 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\geqslant 3\sqrt{2}$.

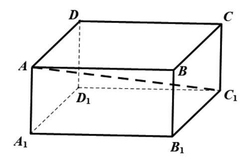

图 2

评注：本题条件与结论似乎没有什么直接联系. 由于条件涉及三个角，且条件经变形得 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，这是长方体中我们比较熟悉的一个结论，于是联想构造一个棱长分别为 a,b,c 的长方体辅助解题，在这个长方体中隐藏着可用 a,b,c 表示 $\tan\alpha,\tan\beta,\tan\gamma$. 数学解题时有些隐含条件需要根据题目的结构特征，要求学生以直觉思维和发散思维为基础，运用迁移、类比、联想、转化、猜想等方法，从独创、新颖、多变的角度来挖掘隐含条件.

5. 从题目的解答过程中挖掘隐含信息

例 9　已知方程 $x^2+4ax+3a+1=0$（a 为大于 1 的常数）的两根为 $\tan\alpha,\tan\beta$，且 $\alpha,\beta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 的值是________.

解：$\because\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $x^2+4ax+3a+1=0(a>1)$ 的两根，由韦达定理得 $\tan\alpha+\tan\beta=-4a<0$，$\tan\alpha\cdot\tan\beta=3a+1>0$. $\therefore\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 x^2+

$4ax+3a+1=0$ 的两个负根. 又 $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

$\therefore\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,于是 $\frac{\alpha+\beta}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,即有 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}<0$, 由 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{-4a}{1-(3a+1)}=\frac{4}{3}$, 有 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{4}{3}$,化简得 $2\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}+3\tan\frac{\alpha+\beta}{2}-2=0$,求得 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=-2$ 或 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}$(舍去). 故 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=-2$.

评注:本题条件中是看不到隐含信息的,但在解答过程中隐藏信息就暴露出来了,即由 $\tan\alpha+\tan\beta=-4a<0$,$\tan\alpha\cdot\tan\beta=3a+1>0$,发现 $\tan\alpha$,$\tan\beta$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+4ax+3a+1=0$ 的两个负根.

例 10　直线 l 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切,并且在两坐标轴上的截距之和等于 $\sqrt{3}$,求直线 l 与两坐标轴围成的三角形的面积.

解:由题意可知直线 l 在两坐标轴上的截距是存在的,且不为零,故可设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,即 $l:bx+ay-ab=0$,因为直线 l 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切,所以圆心到 l 的距离等于圆的半径,于是有 $\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$,即 $a^2b^2=a^2+b^2$,又 $a+b=\sqrt{3}$,$\therefore a^2+b^2+2ab=3$,联立 $\begin{cases}a^2b^2=a^2+b^2,\\a^2+b^2+2ab=3,\end{cases}$ 即 $(ab)^2+2ab-3=0$,求得 $ab=1$ 或 $ab=-3$. 三角形的面积 $S=\frac{|a||b|}{2}$,$\therefore S=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$.

①当 $ab=1$,$a+b=\sqrt{3}$ 时,a,b 是方程 $x^2-\sqrt{3}x+1=0$ 的两根,$\triangle=(-\sqrt{3})^2-4=-1<0$,所以 $ab=1$ 舍去,即 $S=\frac{1}{2}$ 舍去;

②当 $ab=-3$,$a+b=\sqrt{3}$ 时,a,b 是方程 $x^2-\sqrt{3}x-3=0$ 的两根,$\triangle=(-\sqrt{3})^2-4\times(-3)=15>0$. 故直线 l 与两坐标轴围成的三角形的面积 $S=\frac{3}{2}$.

评注:本题求出两组 ab 的值,暗示我们到要验证. 其中一组 $ab=1$ 不合题意,这个隐藏信息是在解题过程中挖掘出来的. 多解问题是数学解题很普通的常识,最容易忽视检验,正是它不起眼,会导致解题出错.

由此可见,挖掘隐含信息是数学解题中的一把双刃剑,隐含信息虽然严重干扰和阻碍了数学解题,但只要能够有效地挖掘并合理的利用,就能发挥其积极作用. 挖掘隐含信息是沟通“知”与“求”关系的纽带,是架起“问”与“答”之间的桥梁. 因此,挖掘和利用好隐含信息是顺利求解数学题的关键要素.

一道 2022 年高考模考题的解法探究

江苏省启东市第一中学　(226200)　曹荣荣

二元条件最值问题可以很好的考查考生对高中数学不等式主干知识的掌握情况,及考生的数学运算能力和推理论证能力,因此在各类考试中备受命题者的青睐.

题目　(2021 年学年第一学期高三“山水联盟”开学联考试题第 8 题)已知实数 x,y 满足 $x^2-2xy-3y^2=1$,则 x^2+y^2 的最小值为(　　).

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　B. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$　C. $\frac{\sqrt{5}+2}{8}$　D. $\frac{2\sqrt{5}+1}{4}$

这是一道二元条件最值问题,主要考查利用基本不等式、重要不等式、三角换元法求最值,考查了考生的逻辑思维能力和运算求解能力,以下对这道试题进行多解探究,以期起到引导作用.

解法 1:由 $x^2-2xy-3y^2=1$ 可得 $(x+y)(x-3y)=1$,令 $m=x+y$,$n=x-3y$,则 $mn=1$,$x=\frac{3m+n}{4}$,$y=\frac{m-n}{4}$,则 $x^2+y^2=(\frac{3m+n}{4})^2+(\frac{m-n}{4})^2=\frac{5m^2+n^2+2mn}{8}$,由不等式性质可得 $\frac{5m^2+n^2+2mn}{8}\geqslant\frac{(2\sqrt{5}+2)mn}{8}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$,当且仅当 $\sqrt{5}m=n$ 时等号成立,所以 x^2+y^2 的最小值为 $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.