常见的抽象函数问题及分析方法

◉山东省菏泽第一中学　管雨坤

摘要:本文中通过对常见的抽象函数问题的讨论,归纳推广一些常用结论;并结合历年高考题浅谈抽象函数问题的分析方法.

关键词:抽象函数;定义域;对称性;周期性

1 引言

函数是高中数学内容的重点与难点,是培养学生数学抽象、数学运算、逻辑推理等核心素养的重要载体.在抽象函数问题中,可以综合考查定义域、单调性、对称性、周期性等内容,是各类考试的考查热点,对学生抽象、推理及计算能力提出较高要求.下面我们通过深入分析常见的抽象函数典型问题,引导学生总结解决问题的一般分析方法,提升学生的数学核心素养.

2 抽象函数常见问题分析

2.1 抽象函数的定义域问题

对于这类问题,应注意:(1)函数的定义域是指解析式中自变量 x 的取值范围构成的集合;(2)同一法则 f 下,$f(*)$ 与 $f(\otimes)$ 中"$*$""$\otimes$"的整体意义相同,取值范围相同.

类型一:已知 $f(x)$ 的定义域,求 $f(g(x))$ 的定义域

例1　已知 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)$,求 $f(2x+1)$ 的定义域.

解:由 $f(x)$ 的定义域可知,$-1<2x+1<0$,解之得:$-1<x<-\frac{1}{2}$.

题型解法总结:若 $f(x)$ 的定义域 $[a,b]$,则在 $f(g(x))$ 中,由 $a\leqslant g(x)\leqslant b$,从中解出 x 的取值范围即为 $f(g(x))$ 的定义域.

类型二:已知 $f(g(x))$ 的定义域,求 $f(x)$ 的定义域

例2　已知函数 $y=f(\ln(x+1))$ 的定义域为 $0\leqslant x\leqslant 3$,求 $y=f(x)$ 的定义域.

解:由 $0\leqslant x\leqslant 3$,得 $1\leqslant x+1\leqslant 4$,所以 $0\leqslant \ln(x+1)\leqslant \ln 4$,故 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,\ln 4]$.

题型解法总结:若 $f(g(x))$ 的定义域为 $m\leqslant x\leqslant n$,则由 $m\leqslant x\leqslant n$ 确定 $g(x)$ 的范围,即为 $f(x)$ 的定义域.

类型三:已知 $f(g(x))$ 的定义域,求 $f(h(x))$ 的定义域.

例3　已知函数 $y=f(x+1)$ 定义域为 $[-1,3]$,求 $y=f(2x-1)$ 的定义域.

解:先求 $f(x)$ 的定义域,由 $-1\leqslant x\leqslant 3$,知 $0\leqslant x+1\leqslant 4$,即 $f(x)$ 的定义域为 $[0,4]$;再求 $y=f(2x-1)$ 的定义域,由 $0\leqslant 2x-1\leqslant 4$,得 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant \frac{5}{2}$.

题型解法总结:可先由 $f(g(x))$ 定义域求得 $f(x)$ 的定义域,再由 $f(x)$ 的定义域求得 $f(h(x))$ 的定义域.

类型四:运算型的抽象函数的定义域.

例4　已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,2]$,求 $y=\frac{f(2x-1)}{\lg(x-1)}$ 的定义域.

解:由题意知:$\begin{cases}0<2x-1\leqslant 2,\\ x-1\neq 1,\\ x-1>0,\end{cases}$ 解之得 $1<x\leqslant \frac{3}{2}$.

题型解法总结:求由有限个抽象函数经四则运算得到的函数的定义域时,先求出各个函数的定义域,再求交集.

2.2 抽象函数的对称性问题

对称性(奇偶性)本是函数的图象特征[1],但问题题干却常以代数式予以呈现,这对初学者来说很难加以识别.在教学中,教师要结合具体函数图象详细阐述代数式的几何意义,总结归纳常见结论,并加以证明,

让学生加深对抽象函数对称性的理解.

结论1:若 $y=f(x)$ 满足 $f(x+a)=c-f(b-x)$,则 $y=f(x)$ 图象关于点 $\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$ 成中心对称.

结论2:若 $y=f(x)$ 满足 $f(x+a)=f(b-x)$,则 $y=f(x)$ 图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称.

结论3:函数 $y=m+f(a+x)$ 与函数 $y=n-f(b-x)$ 图象关于点 $\left(\frac{b-a}{2},\frac{n-m}{2}\right)$ 对称.

结论4:函数 $y=A\pm f(a+x)$ 与函数 $y=A\pm f(b-x)$ 图象关于直线 $x=\frac{b-a}{2}$ 对称.

例5 已知函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$,则

A.在(0,2)上单调递增

B.在(0,2)上单调递减

C. $y=f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称

D. $y=f(x)$ 的图象关于(1,0)对称

分析:$f(x)$ 的定义域为(0,2),且 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)=\ln[-(x-1)^2+1]$,由复合函数的单调性知A,B选项错误;若 $f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称,由结论2知 $f(x)$ 必然满足关系 $f(x)=f(2-x)$;若 $f(x)$ 的图象关于(1,0)对称,由结论1知 $f(x)$ 必然满足关系 $f(x)+f(2-x)=0$;通过验证发现C答案正确.

例6 已知函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=2-f(x)$,若函数 $y=\frac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点为 (x_1,x_2),(x_2,y_2),……,(x_m,y_m) 则 $\sum_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=$________.

分析:由 $f(-x)=2-f(x)$ 及结论1知 $f(x)$ 关于点(0,1)对称,而 $y=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$ 也关于点(0,1)对称,所以 $f(x)$ 与 $y=\frac{x+1}{x}$ 有公共的对称中心(0,1),易知函数 $y=\frac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点为 (x_1,y_1),(x_2,y_2),……,(x_m,y_m) 为偶数个且关于点(0,1)对称的对应两个交点 (x_i,y_i),(x_j,y_j),满足 $x_i+x_j=0$,$y_i+y_j=2$,所以 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_m=0$,$y_1+y_2+\cdots\cdots+y_m=m$,所以 $\sum_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=m$.

2.3 抽象函数的周期性问题

抽象函数周期性[2]与对称性的代数形式有很多相似之处,教师要引导学生加以区分,并结合具体函数图象(如:正弦函数、余弦函数)对周期性的代数形式加以解释说明,渗透数形结合的思想方法.

结论1:若 $y=f(x)$ 满足 $f(x+a)=f(x+b)$,$a\neq b\neq 0$,则 $y=f(x)$ 是周期为 $|b-a|$ 的周期函数.

结论2:若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+2a)=f(x+a)-f(x)$,则 $y=f(x)$ 是周期为 $6a$ 的周期函数.

结论3:若 $y=f(x)$ 满足 $f(x+a)=b-f(x)$(或 $f(x+a)=f(x-a)$,或 $f(x-2a)=f(x)$),则 $y=f(x)$ 是周期为 $2|a|$ 的周期函数.

结论4:若 $y=f(x)$ 满足 $f(x+a)=\pm\frac{b}{f(x+c)}$,$a\neq c$,$b\neq 0$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,其中 $a>0$,则 $y=f(x)$ 是周期为 $2|a-c|$ 的周期函数.

结论5:若 $y=f(x)$ 满足 $f(x+a)=\frac{f(x+b)+1}{f(x+b)-1}(a\neq b)$,则 $y=f(x)$ 是周期为 $2|a-b|$ 的周期函数.

结论6:若 $y=f(x)$ 满足 $f(x+a)=\frac{f(x+b)-1}{f(x+b)+1}(a\neq b)$,则 $y=f(x)$ 是周期为 $4|a-b|$ 的周期函数.

结论7:若 $y=f(x)$ 满足 $f(x+a)=\frac{1+f(x+b)}{1-f(x+b)}(a\neq b)$,则 $y=f(x)$ 是周期为 $4|a-b|$ 的周期函数.

结论8:若 $y=f(x)$ 满足 $f(x+a)=\frac{1-f(x+b)}{1+f(x+b)}(a\neq b)$,则 $y=f(x)$ 是周期为 $2|a-b|$ 的周期函数.

例7 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+6)=f(x)$,当 $-3\leqslant x<-1$ 时,$f(x)=-(x+2)^2$,当 $-1\leqslant x<3$ 时,$f(x)=x$.则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(2012)=($ $)$.

A.335 B.338 C.1 678 D.2 012

分析:$f(x+6)=f(x)$ 知,$f(x)$ 的周期 $T=6$,而 $f(1)=1$,$f(2)=2$,$f(3)=f(-3)=-1$,$f(4)=f(-2)=0$,$f(5)=f(-1)=-1$,$f(6)=f(0)=0$,所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1$,$f(2\,011)=f(6\times 335+1)=f(1)=1$,$f(2\,012)=$

$f(6\times335+2)=f(2)=2$.

所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\ 012)=335\times1+f(2\ 011)+f(2\ 012)=338$.

例8 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cdot f(x+2)=13$,若 $f(1)=2$,则 $f(99)=($ $)$.

A.13 B.2 C.$\frac{13}{2}$ D.$\frac{2}{13}$

分析:由 $f(x)\cdot f(x+2)=13$ 知,$f(x)=\frac{13}{f(x+2)}$,由结论4知,$f(x)$ 的周期 $T=4$,所以 $f(99)=f(4\times24+3)=f(3)$,又 $f(1)\cdot f(1+2)=f(1)\cdot f(3)=13$,所以 $f(99)=\frac{13}{2}$.

2.4 抽象函数的对称性与周期性综合问题

抽象函数的对称性与周期性综合问题[3]常用如下三个结论.

结论1:(两线对称型)若 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 和 $x=b$ 对称(即 $f(a+x)=f(a-x)$,且 $f(b+x)=f(b-x)$)则函数 $y=f(x)$ 是周期为 $2|a-b|$ 的周期函数.

结论2:(两点对称型)若 $y=f(x)$ 的图象关于点 (a,b) 和 (n,b) 对称,其中 $a\neq n$(即 $f(a+x)=2b-f(a-x)$,$f(n+x)=2b-f(n-x)$),则函数 $y=f(x)$ 是周期为 $2|a-n|$ 的周期函数.

特例:若 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(a,0)$ 和 $(b,0)$ 对称(即 $f(a+x)=-f(a-x)$,$f(b+x)=-f(b-x)$),则函数 $y=f(x)$ 是周期为 $2|a-b|$ 的周期函数.

结论3:(一线一点对称型)若 $y=f(x)$ 的图象有一个对称中心 $A(m,n)$ 和一条对称轴 $x=a(a\neq m)$(即 $f(m+x)=2n-f(m-x)$,$f(a+x)=f(a-x)$),则函数 $y=f(x)$ 是周期为 $4|a-m|$ 的周期函数.

特例:若 $y=f(x)$ 的图象有一个对称中心 $A(a,0)$ 和一条对称轴 $x=b(a\neq b)$(即 $f(a+x)=-f(a-x)$,$f(b+x)=f(b-x)$),则函数 $y=f(x)$ 是周期为 $4|a-b|$ 的周期函数.

例9 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数,满足 $f(1-x)=f(1+x)$.若 $f(1)=2$,则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=($ $)$.

A.-50 B.0 C.2 D.50

分析:由 $f(x)$ 为奇函数,知 $f(x)$ 图象关于点 $(0,0)$ 对称,又由 $f(1-x)=f(1+x)$ 知 $f(x)$ 图象关于 $x=1$ 对称.

由结论3知,$f(x)$ 的周期 $T=4$,故 $f(4)=f(0)=0$,又由 $f(1)=2$,有 $f(3)=f(-1)=-f(1)=-2$,$f(2)=f(0)=0$,可知 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$,从而有 $f(5)+f(6)+f(7)+f(8)=0,\cdots\cdots,f(45)+f(46)+f(47)+f(48)=0$.

又 $f(49)=f(12\times4+1)=f(1)=2$,$f(50)=f(4\times12+2)=f(2)=0$,所以

$$
\begin{aligned}
&f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)\\
&=12\times0+f(49)+f(50)\\
&=2.
\end{aligned}
$$

3 结语

本文中对常见的抽象函数问题归纳推广了一些常用结论,并结合历年高考题的具体实例展示了抽象函数问题的分析与解决方法.

参考文献:

[1]安凤吉,马敢飞.高考题中抽象函数的奇偶性、周期性和对称性问题[J].中学数学研究,2007(6):25-27.

[2]朱永瑛.抽象函数周期性的判断及其简单运用[J].福建中学数学,2008(8):31-34.

[3]张绍林,王江.浅谈函数奇偶性、周期性、对称性之联系[J].数学教学,2008(4):15-17.