区县________ 学校________ 班级________ 姓名________ 学号________

密 封 线

2022 届高三年级模拟试卷

数　　学

(满分：150 分　考试时间：120 分钟)

2022．5

一、 选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知 i 为虚数单位，若复数 z 满足$(1-\mathrm{i})z-=2$，则$|z|=$(　　)

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

2. 已知集合 $A=\{x|\log_2x<4\}$，$B=\{x|-2<x<2\}$，则$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$(　　)

A. $(-2，0]$　　B. $[0，2)$　　C. $(0，2)$　　D. $[-2，0)$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.若$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})$，则实数 λ 的值为(　　)

A. 2　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. $\dfrac{9}{2}$

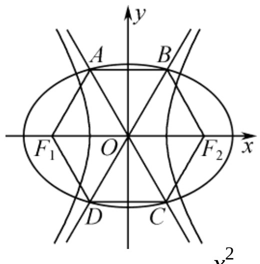
4. 已知函数 $f(x)=ax^2+|x+a+1|$为偶函数，则不等式 $f(x)>0$ 的解集为(　　)

A. $\varnothing$　　B. $(-1，0)\cup(0，1)$

C. $(-1，1)$　　D. $(-\infty，-1)\cup(1，+\infty)$

5. 已知 $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-\alpha\right)=\sin\alpha$，则 $\tan\alpha=$(　　)

A. $-\sqrt{3}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$



6. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>b_1>0)$与双曲线 C_2：$\dfrac{x^2}{a_2^2}-\dfrac{y^2}{b_2^2}=1(a_2>0，b_2>0)$有相同的焦点 F_1，F_2，C_2 的渐近线分别交 C_1 于 A，C 和 B，D 四点，若多边形 ABF_2CDF_1 为正六边形，则 C_1 与 C_2 的离心率之和为(　　)

A. $\sqrt{3}-1$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}+1$　　D. $2\sqrt{3}$

7. 已知实数 a，b，c 满足 $\ln a=2^b=c^{-\frac{1}{2}}$，则下列关系式不可能成立的是(　　)

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$

C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

8. 随着北京冬奥会的举办，中国冰雪运动的参与人数有了突飞猛进的提升．某校为提升学生的综合素养、大力推广冰雪运动，号召青少年成为“三亿人参与冰雪运动的主力军”，开设了“陆地冰壶”“陆地冰球”“滑冰”“模拟滑雪”四类冰雪运动体验课程．甲、乙两名同学各自从中任意挑选两门课程学习，设事件 A=“甲、乙两人所选课程恰有一门相同”，事件 B=“甲、乙两人所选课程完全不同”，事件 C=“甲、乙两人均未选择陆地冰壶课程”，则(　　)

A. A 与 B 为对立事件　　B. A 与 C 互斥

C. A 与 C 相互独立　　D. B 与 C 相互独立

二、 选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 已知函数 $f(x)=\left|2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$，则下列说法正确的有(　　)

A. 函数 $f(x)$的图象关于点$(\frac{\pi}{6}，0)$对称

B. 函数 $f(x)$图象的一条对称轴是直线 $x=\frac{\pi}{6}$

C. 若 $x\in[\frac{\pi}{3}，\frac{\pi}{2}]$，则函数 $f(x)$的最小值为$\sqrt{3}$

D. 若 $f(x_1)f(x_2)=4$，$x_1\neq x_2$，则$|x_1-x_2|$的最小值为$\frac{\pi}{2}$

10. 已知随机变量 X 服从二项分布 $B(4，p)$，其数学期望 $E(X)=2$，随机变量 Y 服从正态分布 $N(p，4)$，且 $P(X=3)+P(Y<a)=1$，则(　　)

A. $p=\frac{1}{4}$　　　B. $p=\frac{1}{2}$

C. $P(Y>1-a)=\frac{1}{4}$　　　D. $P(Y>1-a)=\frac{3}{4}$

11. 已知定义在[1，6]上的函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}$，则(　　)

A. 任意 a，b，$c\in[1，6]$，$f(a)$，$f(b)$，$f(c)$均能作为一个三角形的三条边长

B. 存在 a，b，$c\in[1，6]$，使得 $f(a)$，$f(b)$，$f(c)$不能作为一个三角形的三条边长

C. 任意 a，b，$c\in[1，6]$，$f(a)$，$f(b)$，$f(c)$均不能成为一个直角三角形的三条边长

D. 存在 a，b，$c\in[1，6]$，使得 $f(a)$，$f(b)$，$f(c)$能成为一个直角三角形的三条边长

12. 已知正四棱柱 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ 中，$CC_1=2AB=2$，E 为 CC_1 的中点，P 为棱 AA_1 上的动点，平面 α 过 B，E，P 三点，则(　　)

A. 平面 $\alpha\perp$平面 A_1B_1E

B. 平面 α 与正四棱柱表面的交线围成的图形一定是四边形

C. 当 P 与 A 重合时，α 截此四棱柱的外接球所得的截面面积为$\frac{11}{8}\pi$

D. 存在点 P，使得 AD 与平面 α 所成角的大小为$\frac{\pi}{3}$

三、 填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $(2x^3-\frac{1}{x^2})^5$ 展开式的常数项是________.

14. 已知圆锥同时满足条件：① 侧面展开图为半圆；② 底面半径为正整数．请写出一个这样的圆锥的体积 $V=$________.

15. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $P(1，2)$，直线 l：$y=kx+m$ 与圆 O：$x^2+y^2=5$ 交于 A，B 两点，若$\triangle PAB$ 为正三角形，则实数 m 的值是________.

16. 第十四届国际数学教育大会(简称 ICME14)于 2021 年 7 月在上海举办，会徽的主题图案(如图)有着丰富的数学元素，展现了中国古代数学的灿烂文明，其右下方的“卦”是用中国古代的计数符号写出的八进制数字 3745.八进制有 0～7 共 8 个数字，基数为 8，加法运算时逢八进一，减法运算时借一当八. 八进制数字 3745 换算成十进制是 $5\times8^0+4\times8^1+7\times8^2+3\times8^3=2\,021$，表示 ICME14 的举办年份. 设正整数 $n=a_0\cdot8^0+a_1\cdot8+\cdots+a_i\cdot8^i+\cdots+a_k\cdot8^k$，其中 $a_i\in\{0，1，2，3，4，5，6，7\}$，$i=0，1，\cdots，k$，$k\in\mathbf{N}$.记 $\omega(n)=a_0+a_1+\cdots+a_k$，$S(n)=\omega(1)+\omega(2)+\cdots+\omega(8n)$，则 $\omega(72)=$________；当 $n\leqslant7$ 时，用含 n 的代数式表示 $S(n)=$________．(本小题第一空 2 分，第二空 3 分)

四、 解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且$\frac{\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C}{\sin A\sin B}=\frac{2b-c}{a}$.

(1) 求角 A 的大小；

(2) 若 $a=5$，$b=c+3$，求△ABC 的面积.

18. (本小题满分 12 分)

在①$b_1+b_2=6$，$b_3+b_4=24$；②$b_1+b_2+b_3=14$，$b_1b_2b_3=64$；③$b_3^2=b_6$，$b_4-b_2=12$ 这三个条件中选择合适的一个，补充在下面的横线上，并加以解答.

已知 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$S_5=a_{11}=20$，数列$\{b_n\}$是公比大于 1 的等比数列，且________.

(1) 求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

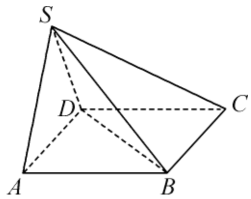
(2) 记 $c_n=\dfrac{S_n}{b_n}$，求使 c_n 取得最大值时 n 的值.

19. (本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥 $SABCD$ 中，已知四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle BAD= 60°$，$\triangle SAD$ 为正三角形，平面 $SAD\perp$平面 $ABCD$.

(1) 求二面角 $SBCA$ 的大小；

(2) 在线段 SC(端点 S，C 除外)上是否存在一点 M，使得 $AM\perp BD$？若存在，指出点 M 的位置；若不存在，请说明理由.



20. (本小题满分 12 分)

某食品企业与甲、乙两超市签订了长期供应某种海鲜罐头的合同，每月供应一次，经调研发现：① 每家超市的月需求量都只有两种：400 件或 600 件，且互相不受影响；② 甲、乙两超市的月需求量为 400 件的概率分别为$\frac{2}{5}$，$\frac{1}{2}$.

(1) 求两超市的月需求总量为 1 000 件的概率；

(2) 已知企业对此罐头的供货价格为 30 元/件，生产此罐头的成本为：800 件内(含 800)为 20 元/件，超过 800 件但不超过 1 000 件的部分为 15 元/件，超过 1 000 件的部分为 10 元/件．企业拟将月生产量 X(单位：件)定为 800 或 1 000 或 1 200.若两超市的月需求总量超过企业的月生产量，则企业每月按月生产量供货，若两超市的月需求总量不超过企业的月生产量，则企业每月按月需求总量供货．为保障食品安全，若有多余罐头企业每月自行销毁，损失自负，请你确定 X 的值，使该企业的生产方案最佳，即企业每月生产此罐头的利润 Y 的数学期望最大，并说明理由．

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\sin x-(x+a)\cos x$，$g(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2$，其中 $a\geqslant0$.

(1) 试判断函数 $f(x)$在$(0，\pi)$上的单调性，并说明理由；

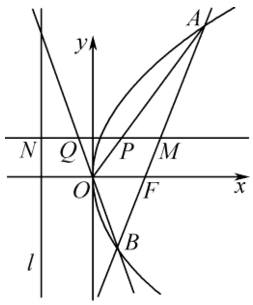
(2) 求证：曲线 $y=f(x)$与曲线 $y=g(x)$有且只有一个公共点.

22. (本小题满分 12 分)

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，过点 F 且斜率大于 0 的直线交抛物线 C 于 A，B 两点，过线段 AB 的中点 M 且与 x 轴平行的直线依次交直线 OA，OB，l 于点 P，Q，N.

(1) 试判断线段 PM 与 NQ 长度的大小关系，并证明你的结论；

(2) 若线段 NP 上的任意一点均在以点 Q 为圆心、线段 QO 长为半径的圆内或圆上，求直线 AB 斜率的取值范围.



线

封

密

2022届高三年级模拟试卷
(苏锡常镇二模)
数学参考答案及评分标准

1. B　2. A　3. C　4. B　5. A　6. C　7. D　8. C　9. BCD　10. BD　11. AD　12. AC

13. -40　14. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$(答案不唯一)　15. $-\frac{5}{4}$　16. 2　$4n^2+25n$

17. 解：(1) 由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

得$\frac{\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C}{\sin A\sin B}=\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}$，(1分)

所以$\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}=\frac{2b-c}{a}$，化简得 $b^2+c^2-a^2=bc$，

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$.(3分)

因为$A\in(0，\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.(5分)

(2) 由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $b^2+c^2-bc=(b-c)^2+bc=25$，
将 $b-c=3$ 代入上式，得 $bc=16$，(8分)

所以△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times16\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$.(10分)

18. 解：(1) 由 $S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=5a_3=20$，得 $a_3=4$.(1分)

因为 $a_{11}=20$，所以公差 $d=\frac{a_{11}-a_3}{8}=\frac{16}{8}=2$，(2分)

所以 $a_n=a_3+(n-3)d=4+2(n-3)=2n-2$.(3分)
设数列$\{b_n\}$的公比为 q，则 $q>1$.

若选①，　因为 $b_1+b_2=6$，$b_3+b_4=24$，所以$\frac{b_3+b_4}{b_1+b_2}=q^2=4$.

因为 $q>1$，所以 $q=2$.(5分)
又 $b_1+b_2=b_1(1+q)=3b_1=6$，所以 $b_1=2$，
所以 $b_n=b_1q^{n-1}=2^n$.(6分)
若选②，$b_1b_2b_3=b_2^3=64$，所以 $b_2=4$，

$b_1+b_2+b_3=\frac{4}{q}+4+4q=14$，即 $2q^2-5q+2=0$，所以 $q=2$ 或 $q=\frac{1}{2}$.

因为 $q>1$，所以 $q=2$，(5分)
所以 $b_n=b_2q^{n-2}=2^n$.(6分)

若选③，由 $b_3^2=b_6$，得 $b_3=\frac{b_6}{b_3}=q^3$，

又 $b_4-b_2=b_3(q-\frac{1}{q})=q^3(q-\frac{1}{q})=q^4-q^2=12$，解得 $q^2=4$，

因为 $q>1$，所以 $q=2$(5分)
所以 $b_n=b_3q^{n-3}=q^n=2^n$.(6分)

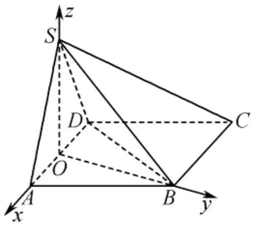
(2) 由(1)得 $S_n=\frac{n(0+2n-2)}{2}=n^2-n$，(8分)

所以 $c_n=\frac{S_n}{b_n}=\frac{n^2-n}{2^n}$.(9分)

因为 $c_{n+1}-c_n=\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2^{n+1}}-\frac{n^2-n}{2^n}=\frac{n^2+n-2(n^2-n)}{2^{n+1}}=\frac{n(3-n)}{2^{n+1}}$，(11分)

所以当 $n=1$ 或 $n=2$ 时，$c_{n+1}>c_n$；当 $n=3$ 时，$c_{n+1}=c_n$；当 $n\geq4$ 时，$c_{n+1}<c_n$.

所以 c_n 取得最大值时 n 的值为 3 或 4.(12 分)
19. 解：(1) (解法 1)如图，取 AD 的中点 O，连接 OS，OB.
因为△SAD 为正三角形，所以 $SO\perp AD$.
因为平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $SAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$SO\subset$ 平面 SAD，
所以 $SO\perp$ 平面 $ABCD$.(2 分)
因为 OA，$OB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $SO\perp OA$，$SO\perp OB$.
因为 $AB=AD$，$\angle BAD=60°$，所以△ADB 为正三角形，所以 $OB\perp OA$.(4 分)



如图，以 O 为原点，OA，OB，OS 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系.
设 $AD=2a$，则 $S(0，0，\sqrt{3}a)$，$B(0，\sqrt{3}a，0)$，$C(-2a，\sqrt{3}a，0)$，
所以 $\overrightarrow{BS}=(0，-\sqrt{3}a，\sqrt{3}a)$，$\overrightarrow{BC}=(-2a，0，0)$.
因为 $SO\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\overrightarrow{OS}=(0，0，\sqrt{3}a)$是平面 $ABCD$ 的一个法向量.
设平面 SBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x，y，z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BS}=0，\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0，\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}y=\sqrt{3}z，\\ -2x=0，\end{cases}$

不妨取 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(0，1，1)$.(6 分)

设二面角 $SBCA$ 的大小为 θ，则 $|\cos\theta|=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OS}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{OS}|}\right|=\left|\dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}a}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

显然 $SBCA$ 是锐二面角，所以二面角 $SBCA$ 的大小为 45°.(8 分)
(解法 2)取 AD 的中点 O，连接 OS，OB.
因为△SAD 为正三角形，所以 $SO\perp AD$.
因为平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $SAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$SO\subset$ 平面 SAD，
所以 $SO\perp$ 平面 $ABCD$，(2 分)
所以 $SO\perp BC$.
因为 $AB=AD$，$\angle BAD=60°$，所以△ADB 为正三角形，所以 $BO\perp AD$.
因为 $AD\parallel BC$，所以 $BO\perp BC$.(4 分)
又 $SO\cap BO=O$，且 SO，$BO\subset$ 平面 SOB，所以 $BC\perp$ 平面 SOB，所以 $BC\perp BS$.
从而 $\angle SBO$ 为二面角 $SBCA$ 的平面角．(6 分)
因为 $SO\perp$ 平面 $ABCD$，$OB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $SO\perp OB$.
在 Rt△SOB 中，因为 $SO=OB=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AD$，所以 $\angle SBO=45°$，
即二面角 $SBCA$ 的大小为 45°.(8 分)
(2) 不存在．证明如下：
(解法 1)在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，
因为 $A(a，0，0)$，$S(0，0，\sqrt{3}a)$，$C(-2a，\sqrt{3}a，0)$，$B(0，\sqrt{3}a，0)$，$D(-a，0，0)$，
所以 $\overrightarrow{SC}=(-2a，\sqrt{3}a，-\sqrt{3}a)$，$\overrightarrow{BD}=(-a，-\sqrt{3}a，0)$.
若线段 SC(端点 S，C 除外)上存在一点 $M(x，y，z)$，使得 $AM\perp BD$，

则存在 $0<\lambda<1$，使得 $\overrightarrow{SM}=\lambda\overrightarrow{SC}$，即 $\begin{cases}x=-2\lambda a，\\ y=\sqrt{3}\lambda a，\\ z=\sqrt{3}（1-\lambda）a.\end{cases}$

因为 $AM\perp BD$，所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，从而 $-a(x-a)-\sqrt{3}ay=0$，(10 分)

将 $x=-2\lambda a$，$y=\sqrt{3}\lambda a$ 代入上式可得 $\lambda=1$，这与 $0<\lambda<1$ 矛盾．

故线段 SC(端点 S，C 除外)上不存在点 M，使得 $AM\perp BD$.(12 分)

(解法 2)若线段 SC(端点 S，C 除外)上存在一点 M，使得 $AM\perp BD$.

因为菱形 $ABCD$ 中 $AC\perp BD$，且 $AC\cap AM=A$，AC，$AM\subset$平面 SAC，

所以 $BD\perp$平面 SAC，从而 $BD\perp SA$.(10 分)

又由(1)可得 $BD\perp SO$，且 $SA\cap SO=S$，所以 $BD\perp$平面 SAO，

所以 $BD\perp AD$，这与 $\angle ADB=60°$矛盾．

故线段 SC(端点 S，C 除外)上不存在点 M，使得 $AM\perp BD$.(12 分)

20. 解：(1) 设 $A_1=$“超市甲的月需求量为 400 件”，$A_2=$“超市甲的月需求量为 600 件”，

设 $B_1=$“超市乙的月需求量为 400 件”，$B_2=$“超市乙的月需求量为 600 件”．

由题意知 $P(A_1)=\frac{2}{5}$，$P(B_1)=\frac{1}{2}$，且 A_1 与 A_2，B_1 与 B_2 均为对立事件，

所以 $P(A_2)=1-P(A_1)=\frac{3}{5}$，$P(B_2)=1-P(B_1)=\frac{1}{2}$.(2 分)

设 $B=$“两超市的月需求总量为 1 000 件”，则 $B=A_1B_2+A_2B_1$.

因为 A_1B_2 与 A_2B_1 互斥，且 A_1 与 B_2，A_2 与 B_1 相互独立，

所以 $P(B)=P(A_1B_2+A_2B_1)=P(A_1)P(B_2)+P(A_2)P(B_1)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.(4 分)

答：两超市的月需求总量为 1 000 件的概率为$\frac{1}{2}$.(5 分)

(2) 设 $A=$“两超市的月需求总量为 800 件”，$C=$“两超市的月需求总量为 1 200 件”．

因为 A_1 与 B_1 相互独立，所以 $P(A)=P(A_1B_1)=P(A_1)P(B_1)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$.

因为 A_2 与 B_2 相互独立，所以 $P(C)=P(A_2B_2)=P(A_2)P(B_2)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$.

① 若月生产量 $X=800$，则

$E(Y)=30\times800\times[P(A)+P(B)+P(C)]-20\times800=8\,000$(元)；(7 分)

② 若月生产量 $X=1\,000$，则

$E(Y)=30\times800\times P(A)+30\times1\,000\times[P(B)+P(C)]-20\times800-15\times200=9\,800$(元)；(9 分)

③ 若月生产量 $X=1\,200$，则

$E(Y)=30\times800\times P(A)+30\times1\,000\times P(B)+30\times1\,200\times P(C)-20\times800-15\times200-10\times200=9\,600$(元).(11 分)

综上所述，当 $X=1\,000$ 时，利润 Y 的数学期望最大．(12 分)

21. 解：(1) 因为 $f(x)=\sin x-(x+a)\cos x$，

所以 $f'(x)=\cos x-[\cos x-(x+a)\sin x]=(x+a)\sin x$.

因为 $x\in(0，\pi)$，$a\geqslant0$，所以 $x+a>0$，$\sin x>0$，所以 $f'(x)>0$，

所以函数 $f(x)$在$(0，\pi)$上为增函数．(3 分)

(2) 令 $t(x)=x-\sin x$，所以 $t'(x)=1-\cos x$，则 $t'(x)\geqslant0$，

所以 $t(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $t(0)=0$,

所以当 $x>0$ 时，$t(x)>0$，$x>\sin x$；当 $x<0$ 时，$t(x)<0$，$x<\sin x$．(5 分)

由 $f(x)=g(x)$，得$\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+(x+a)\cos x-\sin x=0$.

设 $h(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+(x+a)\cos x-\sin x$，则 $h'(x)=(x-\sin x)(x+a)$.

令 $h'(x)=0$，由上述推理可得 $x=0$ 或 $x=-a$.(6 分)

① 当 $a=0$ 时，$h'(x)=x(x-\sin x)$，

因为 $x(x-\sin x)\geqslant0$，当且仅当 $h'(0)=0$，所以 $h(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增．

因为 $h(0)=0$，所以 $h(x)$的零点有且仅有一个为 0.(8 分)

② 当 $a>0$ 时，列表如下：

x	$(-\infty, -a)$	$-a$	$(-a, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$x+a$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\sin x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

(9 分)

首先 $h(-a)>h(0)=a>0$，

下证：$h(-\frac{3}{2}a-3)<0$.事实上，当 $x<-a$ 时，$x+a<0$，

因为 $\cos x\geqslant -1$，所以$(x+a)\cos x\leqslant -(x+a)$.又 $\sin x>x$，所以$-\sin x<-x$，

所以 $h(x)<\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2-(x+a)-x=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2-2x-a<\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2-2x=\frac{1}{3}x(x^2+\frac{3}{2}ax-6)$，

所以 $h(-\frac{3}{2}a-3)<-(\frac{9}{2}a+3)(\frac{3}{2}a+3)<0$.

从而 $h(x)$在$(-\frac{3}{2}a-3, -a)$上有且仅有一个零点.

综上所述，曲线 $y=f(x)$与曲线 $y=g(x)$有且仅有一个公共点.(12 分)

22. 解：(1) 线段 PM 与 NQ 的长度相等.(1 分)

证明：设 $A(\frac{y_1^2}{4}, y_1)$，$B(\frac{y_2^2}{4}, y_2)$，则 $M(\frac{y_1^2+y_2^2}{8}, \frac{y_1+y_2}{2})$.

因为直线 AB 过点 $F(1, 0)$，所以$\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4}-1}=\frac{y_2}{\frac{y_2^2}{4}-1}$，

化简得$(y_2-y_1)(\frac{y_1y_2}{4}+1)=0$.因为 $y_1\neq y_2$，所以 $y_1y_2=-4$.(2 分)

联立 OA：$y=\frac{4}{y_1}x$ 与 MN：$y=\frac{y_1+y_2}{2}$，得 $P(\frac{y_1(y_1+y_2)}{8}, \frac{y_1+y_2}{2})$，

所以 $PM=\frac{y_1^2+y_2^2}{8}-\frac{y_1(y_1+y_2)}{8}=\frac{y_2^2-y_1y_2}{8}=\frac{y_2^2+4}{8}$.(4 分)

同理 $Q(\frac{y_2(y_1+y_2)}{8}, \frac{y_1+y_2}{2})$.

因为 $N(-1, \frac{y_1+y_2}{2})$，

所以 $NQ=\frac{y_2(y_1+y_2)}{8}+1=\frac{y_1y_2+y_2^2}{8}+1=\frac{y_2^2+4}{8}$.

故线段 PM 与 NQ 的长度相等.(6 分)

(2) 由题意知$\begin{cases}QO\geqslant QP,\\ QO\geqslant QN.\end{cases}$

由 $QO\geqslant QP$，得$\left[\frac{y_2(y_1+y_2)}{8}\right]^2+(\frac{y_1+y_2}{2})^2\geqslant(\frac{y_1^2-y_2^2}{8})^2$.

因为 $y_1+y_2>0$，所以化简得$\frac{y_2^2}{64}+\frac{1}{4}\geqslant\frac{(y_1-y_2)^2}{64}$.

因为 $y_1y_2=-4$，所以化简可得 $y_1^2\leqslant 8$ ①.(9 分)

由 $QO\geqslant QN$，得$\left[\frac{y_2(y_1+y_2)}{8}\right]^2+(\frac{y_1+y_2}{2})^2\geqslant[\frac{y_2(y_1+y_2)}{8}+1]^2$.

因为 $y_1y_2=-4$，所以化简可得 $y_1^2\geqslant 8$ ②.

由①②知，$y_1=2\sqrt{2}$，即直线 AB 斜率的取值范围是$\{2\sqrt{2}\}$.(12 分)