笔者以为是先学正弦定理后学余弦定理，还是先安排讲授余弦定理后安排正弦定理并不重要，重要的是既要自然又要简约求实. 如，可以通过下述方法引导学生尝试用向量证明正弦定理：因为正弦定理与边角有关，而前面我们学习过的哪个知识也与边角有关？向量的数量积. 不过涉及到的角是余弦，所以可以尝试过顶点 C 作$\overrightarrow{BC}$的垂直向量，由互余转化出现角 C 的正弦，并讨论角 C 的情况.

另，对于余弦定理可自然的启发性设问：求两点间的距离（线段的长度）在你印象中有哪些数学思想方法？在这些方法中自然想到有一种方法向量法——转化为求向量的模.（以上思考课堂上先提出来，后安排作业中课外自主探索）有时候抛弃思维定势围绕核心又结合实际的做法，谁说不也是一种创新呢？

6. 小结

本节课让我们感悟到，要学会用数学的眼光去观察（看世界）；会用数学的思维去思考；会用数学的语言去表达；会用数学的知识去解决.

（这正是数学学科核心素养的特质）

三、课外作业

1. 江苏凤凰教育出版社《普通高中教科书　数学必修第二册》（2020 年 7 月第 1 版）P92 练习 1，2，4；P94 习题 11.2.1，7.

2. 尝试用向量证明正弦定理.

结语：在教学设计中，要抓住数学内容的本质、了解学生的认知规律，创设恰当的情境、提出合适的问题，启发学生独立思考、鼓励学生交流表达，在掌握知识技能的同时理解数学的本质，形成和发展数学核心素养. 我们教学工作的重心是努力“将课本上知识的学术形态转化为教师的教育形态、学生的学习形态”，即“唤醒”数学知识，而不是给予，一个好的老师，就是这样把知识唤醒给学生看. 这种转化工作谁做的好，谁的教学就有效！

抓住“意外”，生成“精彩”*

——由韦达定理“失效”引起的思考

江苏省扬州中学　（225009）　戚有建

课堂教学中不仅有精心的预设，更会有动态的生成，因而课堂教学中难免会遇到一些“意外”，对于这些“意外”，有时我们为了赶进度会将其搁置一边，实际上如果能够抓住机会、调整预设、追本溯源，就有可能将“意外”变成宝贵的教学资源，从而让我们的课堂教学更真实，收获“意外精彩”. 前不久，课堂上在用韦达定理处理一道解几题时就出现了“意外”.

一、出现“意外”

题目　如图 1，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A,B，离心率为$\frac{1}{2}$，右准线方程为 $x=4$.

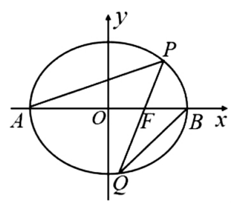

图 1

（1）求椭圆的方程；

（2）过右焦点 F 的直线 l 交椭圆于 P,Q 两点（P 在第一象限），记直线 AP、BQ 的斜率分别为 k_1，k_2，证明$\frac{k_1}{k_2}$为定值.

分析：第（1）问很简单，用待定系数法处理即可，答案为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. 第（2）问设直线 l 的方程为 $x=my+1$，代入$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 得 $(4+3m^2)y^2+6my-9=0$，显然$\triangle>0$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{-6m}{4+3m^2}$，$y_1y_2=\frac{-9}{4+3m^2}$，所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{x_2-2}{y_2}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}$.

点评：由于$\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}$的结构中并不是 y_1+y_2，

* 项目基金：本文是江苏省十三期教研课题《指向数学思维的高中“自治自动”教学研究》（编号：2019JK13 - L319）的阶段性研究成果.

y_1y_2 的形式，所以不好直接用韦达定理，课堂上很多学生认为韦达定理“失效”了，真的是这样吗？这引起了学生的兴趣和思考，也引起了我的兴趣和思考.

二、解法研究

经过学生的独立思考和小组讨论，得到了如下的一些“精彩”解法:

方法 1: 因为 $my_1y_2=\frac{-9m}{4+3m^2}=\frac{3}{2}(y_1+y_2)$，所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-y_1}{\frac{3}{2}(y_1+y_2)+3y_2}=\frac{\frac{1}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1+\frac{9}{2}y_2}=\frac{1}{3}$.

方法 2: $\frac{k_1}{k_2}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}=\frac{my_1y_2-(\frac{-6m}{4+3m^2}-y_1)}{my_1y_2+3y_2}$ $=\frac{\frac{-3m}{4+3m^2}+y_2}{\frac{-9m}{4+3m^2}+3y_2}=\frac{1}{3}$.

点评: 由于 $\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}$ 中有 3 个字母，所以从消元角度来看，方法 1 是消去 m 保留 y_1,y_2，而方法 2 是消去 y_1 保留 y_2,m，同样也可以消去 y_2 保留 y_1,m.

方法 3: 平方得 $(\frac{k_1}{k_2})^2=\frac{y_1^2}{(x_1+2)^2}\cdot\frac{(x_2-2)^2}{y_2^2}$，因为 $y_1^2=\frac{3}{4}(4-x_1^2)$，$y_2^2=\frac{3}{4}(4-x_2^2)$，所以 $(\frac{k_1}{k_2})^2=\frac{y_1^2}{(x_1+2)^2}\cdot\frac{(x_2-2)^2}{y_2^2}=\frac{(2-x_1)(2-x_2)}{(2+x_1)(2+x_2)}=\frac{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$.

当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=1$. 此时 $P(1,\frac{3}{2})$，$Q(1,-\frac{3}{2})$，所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{1}{3}$;

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，得 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，显然 $\triangle>0$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$，所以 $(\frac{k_1}{k_2})^2=\frac{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}=\frac{1}{9}$，所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{1}{3}$.

方法 4: 当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=1$. 此时 $P(1,\frac{3}{2})$，$Q(1,-\frac{3}{2})$，所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{1}{3}$，当直线 l 的斜率存在时，要证 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{1}{3}$，即证 $3k_1-k_2=0$，即证 $\frac{3y_1}{x_1+2}-\frac{y_2}{x_2-2}=0$，即证 $\frac{3(x_2-2)y_1-(x_1+2)y_2}{(x_1+2)(x_2-2)}=0$，即证 $\frac{3(my_2-1)y_1-(my_1+3)y_2}{(x_1+2)(x_2-2)}=0$，即证 $2my_1y_2-3(y_1+y_2)=0$.

方法 5: 设直线 PB 的斜率为 k_3，先证明结论 $k_1k_3=-\frac{3}{4}$，过程如下: 设 $P(x,y)$，则 $k_1k_3=\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=\frac{y^2}{x^2-4}=\frac{3}{4}\frac{(4-x^2)}{x^2-4}=-\frac{3}{4}$. 设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $\frac{k_1}{k_2}=-\frac{3}{4k_2k_3}=$ $-\frac{3(x_1-2)(x_2-2)}{4y_1y_2}=-\frac{3(my_1-1)(my_2-1)}{4y_1y_2}$ $=-\frac{3[my_1y_2-m(y_1+y_2)+1]}{4y_1y_2}=\frac{1}{3}$.

点评: 由于 $\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}$ 的结构是非对称韦达定理，所以可以考虑将其转化为对称韦达定理，方法 3 是通过平方升次转化为对称韦达定理，方法 4 是考虑 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{1}{3}$ 的等价命题 $3k_1-k_2=0$，从而转化为对称韦达定理，方法 5 是借助结论 $k_1k_3=-\frac{3}{4}$，将证 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{1}{3}$ 转化为证 $k_2k_3=-\frac{9}{4}$，从而转化为对称韦达定理.

三、背景研究

在本题的椭圆中，为什么有结论 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{1}{3}$ 呢? 有什么背景? 研究后发现源于圆中的一个结论，然后通过伸缩变换推广到椭圆中.

类题　如图 2，已知单位圆 $x^2+y^2=1$ 的左、右顶点分别为 A，B，过点 $F(\frac{1}{2},0)$ 的直线 l 交单位圆于 P,Q 两点 (P 在第一象限)，记直线 AP、BQ 的斜率分别为 k_1，k_2，证明 $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值.

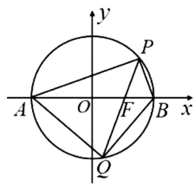

图 2

证明: 设直线 PB 的斜率为 k_3，由 $PA\perp PB$，即证 k_2k_3 为定值，而 $k_2k_3=\tan\angle ABQ\cdot(-\tan\angle ABP)=-\frac{AP}{BP}\cdot\frac{AQ}{BQ}$，因为 $\triangle AFP\sim\triangle QFB$，所以 $\frac{AP}{BQ}=\frac{AF}{QF}$; 因为 $\triangle AFQ\sim\triangle PFB$，所以 $\frac{AQ}{BP}=\frac{QF}{BF}$，所以 $k_2k_3=\tan\angle ABQ\cdot(-\tan\angle ABP)=-\frac{AP}{BP}\cdot\frac{AQ}{BQ}=-\frac{AF}{BF}=-3$.

点评: 因为在圆中 $k_2k_3=-3$，所以$\frac{k_1}{k_2}=\frac{1}{3}$，然后通过伸缩变换推广到椭圆中，也有$\frac{k_1}{k_2}=\frac{1}{3}$成立.

四、推广研究

将上面的命题推广为一般情况，即得如下结论:

结论 1　已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别为 A，B，过右焦点 F 的直线 l 交椭圆于 P，Q 两点(P 在第一象限)，记直线 AP、BQ 的斜率分别为 k_1，k_2，则$\frac{k_1}{k_2}=\frac{1-e}{1+e}$，是定值.

进一步研究后发现这里并不需要 F 点是右焦点，即有如下结论:

结论 2　已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别为 A，B，过 $F(\lambda a,0)(|\lambda|<1)$的直线 l 交椭圆于 P，Q 两点(P 在第一象限)，记直线 AP、BQ 的斜率分别为 k_1，k_2，则$\frac{k_1}{k_2}=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$是定值.

四、类比研究

结论 3　已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右顶点分别为 A，B，过右焦点 F 的直线 l 交双曲线于 P，Q 两点(P 在第一象限)，记直线 AP、BQ 的斜率分别为 k_1，k_2，则$\frac{k_1}{k_2}=\frac{1-e}{1+e}$，是定值.

结论 4　已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右顶点分别为 A，B，过 $F(\lambda a,0)$，$(|\lambda|>1)$的直线 l 交双曲线于 P，Q 两点(P 在第一象限)，记直线 AP、BQ 的斜率分别为 k_1，k_2，则$\frac{k_1}{k_2}=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$，是定值.

课堂是鲜活的、动态的、生成的过程，是师生共同成长的生命历程，而在这样的历程中，我们不可避免地会遇到“意外”，如果能将这一次次的“意外”有效加以利用，实现预设与生成的和谐统一，则“意外”也可以变成“精彩”，如此我们的教学就会成为一种艺术，成为动态生成的生命历程.

落实“四个理解”，摆脱教学“偏”“急”“短”

江苏省仪征市新集初级中学　(211403)　李爱民

一、问题提出

提高课堂教学质量和效益是老师们一直的追求，但在实际教学中，经常出现跑“偏”的现象——注重结果，忽视过程; 只考虑做得到，不考虑想得到; 将信息技术沦为播放器等. 第二个表现是过分心“急”，急于讲解，急于应用知识，急于告知学生答案等. 殊不知，这样跑偏和急功近利，只能收获“短”期利益. 因为一节课教师将教学重心放在“用”，短时间集中练习同一个结论，因为不受其它知识的干扰，无需经过大脑的检索，看似会应用，实际上很大程度是机械模仿，加之没有经历知识形成的过程，不能做到真正理解，更不能感悟其中隐含的数学思想，时间一长，暂时提升的学业水平会迅速回落.

二、案例呈现

下面是笔者观摩的一节“探索三角形相似的条件(1)”教研课的部分实录，与各位同仁共同研讨.

环节 1: 操作、计算、猜想

(1) 如图 1，已知三条互相平行的直线 l_1、l_2、l_3，直线 a、b 分别与 l_1、l_2、l_3 相交于点 A、B、C 和点 D、E、F. 测量图中线段 AB、BC、DE、EF 的长度，并计算 AB 与 BC 的比值和 DE 与 EF 的比值，你有什么发现?

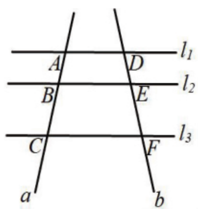

图 1

(2) 平移直线 l_3，再测量 AB、BC、DE、EF 的长度，这些比值还相等吗?

学生在导学案中测量 4 条线段的长度，并计算 AB 与 BC 的比值和 DE 与 EF 的比值，因为计算的比值接近，教师引导学生猜想线段 AB、BC、DE、EF 对应成比例.

环节 2: 证明

教师直接告知学生猜想是正确的，并给出如下证明.

证明: 联结线段 AE、BD、BF、CE(如图 2)，因为 $l_1\parallel l_2$，所以根据同底等高，可以得到$\triangle ABE$ 和$\triangle BDE$ 的面积相等，同理，$\triangle BCE$ 和$\triangle BFE$ 的面积也相等. 因为高

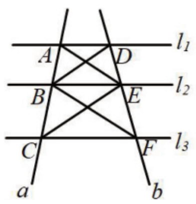

图 2