第七届湖北省高三(4月)调研模拟考试

数 学 试 卷

2022.4

本试卷共4页,22题,全卷满分150分。考试用时120分钟。

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 $2B$ 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.设 $A=\{x\mid x>1\}, B=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$,则 $(\complement_R A)\cap B=$

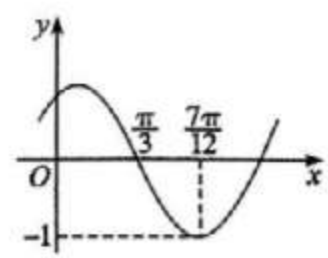
$A.\{x\mid x>-1\}$　　$B.\{x\mid -1<x\leq 1\}$

$C.\{x\mid -x<x<1\}$　　$D.\{x\mid 1<x<3\}$

2.若复数 z 满足 $z(1+2i)=-3+4i$(i 是虚数单位)，则复数 z 的实部是

A.1　　B.2　　C.i　　D.-2i

3.函数 $f(x)=cos(\omega x+)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，则函数$f(x)$的解析式是



$A.f(x)=cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$B.f(x)=cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

C.$f(x)=cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

$D.f(x)=cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

4.已知平行四边形 $ABCD$ 中，AB=3 $AD=6,\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{DE},\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{BF}$,则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC}=$

A.9　　B.-9　　C. 18　　D.-18

5.已知$\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^n$ $(n\in N^*)$的展开式中各项的二项式系数之和为64，则其展开式中x^3系数为

A. 160　　B.-160　　C. 60　　D.-60

6.在四棱锥 P-$ABCD$ 中，PA⊥平面 $ABCD$，AB=2，点 M 是矩形 $ABCD$ 内(含边界)的动点，且 AB=1，AD=3，直线 PM 与平面 $ABCD$ 所成的角为$\frac{\pi}{4}$，记点 M 的轨迹长度为 α，则 $tan\alpha$=

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B.1　　C. $\sqrt{3}$　　D.2

7.已知 F_1，F_2 是双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，过 F_1 的直线 l 与双曲线 C 交于 M，N 两点，且$\overrightarrow{F_1N}=3\overrightarrow{F_1M},|F_2M|=|F_2N|$,则 C 的离心率为

$A.\sqrt{2}$　　$B.\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{7}$　　D.3

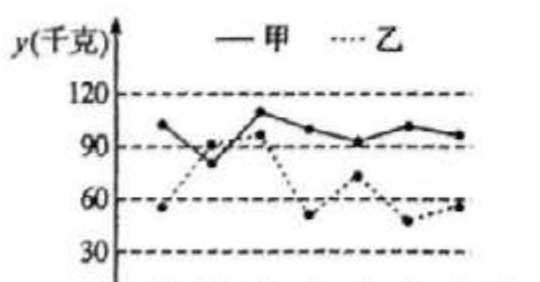
8.已知函数$f(x)=\lg(|x|-1)+2^x+2^{-x}$则使不等式$f(x+1)<f(2x)$成立的 x 的取值范围是

A. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　B.(-2,-1)

$C.\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$　　D.(-∞,-2) ∪(1,+∞)

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9.已知甲、乙两个水果店在“十一黄金周”七天的水果销售量统计如图所示，则下列说法正确的是



A.甲组数据的极差大于乙组数据的极差

B.若甲、乙两组数据的平均数分别为$\overline{x_1},\overline{x_2}$,则$\overline{x_1}>\overline{x_2}$

C.若甲、乙两组数据的方差分别为s_1^2,s_2^2，则 $s_1^2>s_2^2$

D.甲组数据的中位数大于乙组数据的中位数

10.定义空间两个非零向量的一种运算$a\otimes b=|a||b|\cdot sin\langle a,b\rangle$,则关于空间向量上述运算的以下结论中恒成立的有

A. $\lambda(a\otimes b)=(\lambda a)\otimes b$　　B. $a\otimes b=b\otimes a$

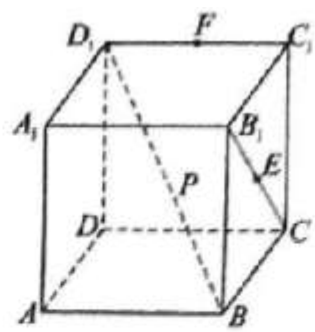
C.若$a\otimes b=0$,则 $a\perp b$　　D. $|a\otimes b|\le|a||b|$

11.设动直线 l：mx-y-2m+3=0($m\in R$)交圆 $C:(x-4)^2+(y-5)^2=12$于 A，B 两点(点 C 为圆心)，则下列说法正确的有

A.直线 l 过定点(2，3)B.当$|AB|$取得最小值时，m=1

C.当$\angle ACB$最小时，其余弦值为$\frac{1}{4}$ D.$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的最大值为 24

12.在棱长为 1 的正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 E 为线段 B_1C 的中点，点 F 和点 P 分别满足 $\overrightarrow{D_1F}=\lambda\overrightarrow{D_1C_1}$,$\overrightarrow{D_1P}=\mu\overrightarrow{D_1B}$,其中 λ，$\mu\in[0，1]$，则



A.当$\lambda=\frac{1}{2}$时，三棱锥 P-EFD 的体积为定值

B.当 $\mu=\frac{1}{2}$时，四棱锥 P-$ABCD$ 的外接球的表面积是 $\frac{9\pi}{4}$

C.若直线 CP 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为$\frac{2}{3}$，则$\mu=\frac{1}{3}$

D.存在唯一的实数对(λ，μ)，使得 $DP\perp$平面 EFP

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.若随机变量$X\sim N(3,\sigma^2)$, 且 $P(X>5)$=0.2，则 $P(1\le X\le5)$等于________.

14.九连环是我国从古至今广泛流传的一种益智游戏，它用九个圆环相连成串，以解开为胜.用a_n表示解下$n(n\le9,n\in N^*)$个圆环所需的最少移动次数.若 $a_1=1$，且$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n+2,n为奇数,\\2a_n-1,n为偶数,\end{cases}$ 则解下 6 个圆环所需的最少移动次数为________.

15.设抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，准线为 l，过第一象限内的抛物线上一点 A 作 l 的垂线，垂足为 B.设 $C(2p，0)$，AF 与 BC 相交于点 D.若$|CF|=|AF|$，且ΔACD 的面积为$\frac{9}{2}\sqrt{2}$，则直线 AC 的斜率 k=________，抛物线的方程为________.

16.已知函数$f(x)=x+\ln(x-1),g(x)=x\ln x$, 若 $f(x_1)=1+2\ln t,g(x_2)=t^2$,

则$\frac{\ln t}{x_1x_2-x_2}$的最大值为________.

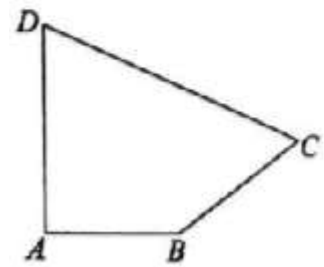
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(本小题满分 10 分)

如图，在平面四边形 $ABCD$ 中， AB⊥AD，$B=1, AD=\sqrt{3}, BC=\sqrt{2}$.

(1)若 CD=2，求$\sin\angle ADC$；

(2)若$\angle C=45°$，求四边形 $ABCD$ 的面积.



18.(本小题满分 12 分)

已知正项等差数列$\{a_n\}$满足：$a_{3n}=3a_n(n\in N^*)$, 且 $2a_1, a_3+1, a_8$成等比数列.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$C_n=\frac{2^{a_n+1}}{(1+2^{a_n})(1+2^{a_{n+1}})}$, R_n是数列$\{c_n\}$的前 n 项和，若对任意 $n\in N^*$均有$R_n<\lambda$ 恒成立，求 λ 的最小值.

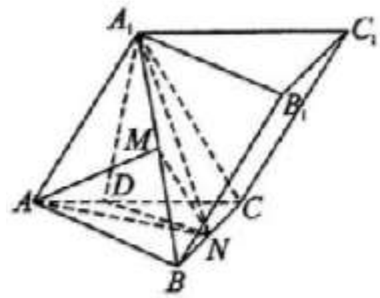
19.(本小题满分 12 分)

某企业使用新技术对某款芯片进行试生产.在试产初期，该款芯片的生产有四道工序，前三道工序的生产互不影响，第四道是检测评估工序，包括智能自动检测与人工抽检.已知该款芯片在生产中，前三道工序的次品率分别为 $P_1=\frac{1}{10}, P_2=\frac{1}{9}, P_3=\frac{1}{8}$.

(1)求该款芯片生产在进人第四道工序前的次品率；

(2)如果第四道工序中智能自动检测为次品的芯片会被自动淘汰，合格的芯片进入流水线并由工人进行人工抽查检验.在芯片智能自动检测显示合格率为 90%的条件下，求工人在流水线进行人工抽检时，抽检一个芯片恰为合格品的概率.

20.(本小题满分 12 分)



如图，在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1=AB=AC=BC=12$，$\angle A_1AC=60°$侧面ACC_1A_1⊥底面ABC，点M，N分别为A，B，BC的中点，点D为线 段AC上一点，且 $AD=\frac{1}{3}AC$.

(1)求证：AM//平面 A_1DN;

(2)求二面角$M-AN-C$ 的正弦值.

21.(本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系中 xOy，椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，点$\left(-\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$在椭圆 C 上.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)设椭圆C的左、右顶点分别为A，B，点P，Q为椭圆上异于A，B的两动点，记直线AB的斜率为k_1;，直线QB的斜率为k_2，已知 $k_1=7k_2$.

①求证：直线 PQ 恒过 x 轴上一定点；

②设△PQB 和△PQA 的面积分别为 S_1，S_2，求$|S_1-S_2|$的最大值.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=xe^x-1, g(x)=a(\ln x+x)$.

(1)若不等式$f(x)\geq g(x)$恒成立，求正实数 a 的值；

(2)证明：$x^2e^x>(x+2)\ln x+2\sin x$.

第七届湖北省高三（4 月）调研模拟考试数学

参考答案

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	D	B	C	C	D

二、多项选择题

题号	9	10	11	12
答案	BD	BD	AD	ABC

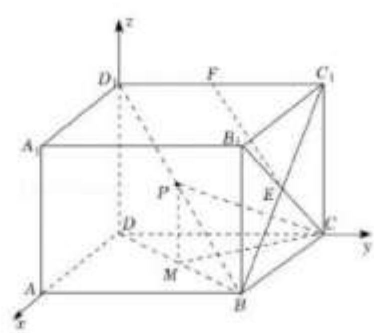
12.【解析】对于 A，当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，F 是 D_1C_1 的中点，连接 BC_1 与交 B_1C 于点 E，则 E 为 BC_1 的中点，

所以 $EF//BD_1$，所以 $BD_1//$ 面 EFD，又点 P 在 BD_1 上，所以点 P 到面 EFD 的距离为定值，

所以三棱锥 $P-EFD$ 的体积为定值，故 A 正确；

对于 B，当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时，点 P 为 BD_1 的中点，设四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的半径为 R，则球心 O 在 PM 延长线上，由 $OP=R$ 得 $OM=R-\frac{1}{2}$，由 $OM^2+CM^2=OC^2$ 得 $(R-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=R^2$，解得 $R=\frac{3}{4}$，

所以外接球的表面积为 $\frac{9}{4}\pi$，故 B 正确；



对于 C，连接 BD，过点 P 作 $PM\perp BD$ 于 M，连接 CM，

因为 $B_1B\perp$ 平面 $ABCD$，所以平面 $BDD_1B_1\perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $BDD_1B_1\cap$ 平面 $ABCD=BD$，所以 $PM\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $\angle PCM$ 为 CP 与平面 $ABCD$ 所成角，

因为 $\overrightarrow{D_1P}=\mu\overrightarrow{D_1B}$，所以 $BM=\sqrt{2}(1-\mu)$，$PM=1-\mu$，

在 $\triangle MBC$ 由余弦定理有 $CM=\sqrt{2(1-\mu)^2+2\mu-1}$，

在 Rt$\triangle CPM$ 中由勾股定理有 $PC=\sqrt{3(1-\mu)^2+2\mu-1}$，

所以 $\sin\angle PCM=\frac{PM}{PC}=\frac{1-u}{\sqrt{3(1-\mu)^2+2\mu-1}}=\frac{2}{3}$，解得 $\mu=\frac{1}{3}$，故 C 正确.

对于 D，因为点 F 在 D_1C_1 上，又 E 在 BC_1 上，P 在 BD_1 上，所以平面 PEF 即为平面 BC_1D_1A，

又易证 $B_1C\perp$ 平面 BC_1D_1A，所以 $\overrightarrow{B_1C}$ 是平面 BC_1D_1A 的法向量，

所以欲 $DP\perp$ 平面 EFP，须 $\overrightarrow{B_1C}$ 与 $\overrightarrow{DP}$ 共线，即须 $\overrightarrow{DA_1}$ 与 $\overrightarrow{DP}$ 共线，显然不可能，

所以不存在实数对 (λ,μ) 使得 $DP\perp$ 平面 EFP，故 D 错误.

故选 ABC.

三、填空题

13．0.6　　　14．64　　　15．$-\sqrt{2}$，$y^2=4\sqrt{3}x$　　　16．$\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$

16.【解析】由题意，$f\left(x_1\right)=x_1+\ln\left(x_1-1\right)=1+2\ln t$，得 $x_1-1+\ln\left(x_1-1\right)=\ln t^2$，

所以 $\ln\left[\left(x_1-1\right)\mathrm{e}^{x_1-1}\right]=\ln t^2$，即 $t^2=\left(x_1-1\right)\mathrm{e}^{x_1-1}>0$，

又 $g\left(x_2\right)=x_2\ln x_2=t^2$，得 $t^2=\mathrm{e}^{\ln x_2}\cdot\ln x_2>0$，

因为 $y=x\cdot\mathrm{e}^x$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\ln x_2=x_1-1$，则 $x_1-\ln x_2=1$，

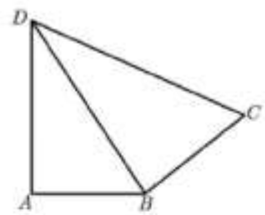
所以 $\dfrac{\ln t}{x_1x_2-x_2}=\dfrac{\ln t}{x_2\cdot\ln x_2}=\dfrac{\ln t}{t^2}$，令 $h(t)=\dfrac{\ln t}{t^2}(t>0)$，则 $h'(t)=\dfrac{1-2\ln t}{t^3}$，

所以 $h(t)$ 在 $\left(0,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}},+\infty\right)$ 上单调递减，

所以 $h(t)_{\max}=h\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$．

四、解答题

17.【解析】(1) 连接 BD，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=2$，



且 $\tan\angle ADB=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，又 $\angle ADB\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\angle ADB=\dfrac{\pi}{6}$．

在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle BDC=\dfrac{BD^2+CD^2-BC^2}{2\cdot BD\cdot CD}=\dfrac{4+4-2}{2\times4\times2}=\dfrac{3}{4}$，

所以 $\sin\angle BDC=\sqrt{1-(\dfrac{3}{4})^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$．

所以 $\sin\angle ADC=\sin(\angle BDC+\dfrac{\pi}{6})=\sin\angle BDC\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos\angle BDC\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{21}+3}{8}$．　　5分

(2) 在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理得 $BD^2=CD^2+BC^2-2CD\cdot BC\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}$，

即 $CD^2-2CD-2=0$，解得 $CD=1+\sqrt{3}$ 或 $CD=1-\sqrt{3}$（舍去），　　7分

所以四边形 $ABCD$ 的面积为 $S_{ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD+\dfrac{1}{2}BC\cdot CD\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}$．　　10分

18.【解析】(1) 设等差数列的公差为 d，

由 $a_{3n}=3a_n$ 得 $a_1+(3n-1)d=3[a_1+(n-1)d]$，则 $a_1=d$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=nd$．　　2分

因为 $2a_1$，a_3+1，a_8 成等比数列，所以 $(a_3+1)^2=2a_1\cdot a_8$，即 $(3d+1)^2=2d\cdot8d$，

所以 $7d^2-6d-1=0$，解得 $d=1$ 或 $d=-\dfrac{1}{7}$，　　5分

因为 $\{a_n\}$ 为正项数列，所以 $d>0$，所以 $d=1$，所以 $a_n=n$．　　6分

(2) $c_n=\dfrac{2^{a_{n+1}}}{(1+2^{a_n})(1+2^{a_{n+1}})}=\dfrac{2^{n+1}}{(1+2^n)(1+2^{n+1})}=2(\dfrac{1}{1+2^n}-\dfrac{1}{1+2^{n+1}})$，　　8分

所以 $R_n=2[(\dfrac{1}{1+2^1}-\dfrac{1}{1+2^2})+(\dfrac{1}{1+2^2}-\dfrac{1}{1+2^3})+\cdots+(\dfrac{1}{1+2^n}-\dfrac{1}{1+2^{n+1}})]=2(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{1+2^{n+1}})$，　　10分

因为对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 均有 $R_n<\dfrac{2}{3}$，所以 $\lambda\geqslant\dfrac{2}{3}$，所以实数 λ 的最小值为 $\dfrac{2}{3}$．　　12分

19.【解析】（1）该款芯片生产在进入第四道工序前的次品率为

$P=1-\left[(1-P_1)(1-P_2)(1-P_3)\right]=1-\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{3}{10}$． 5 分

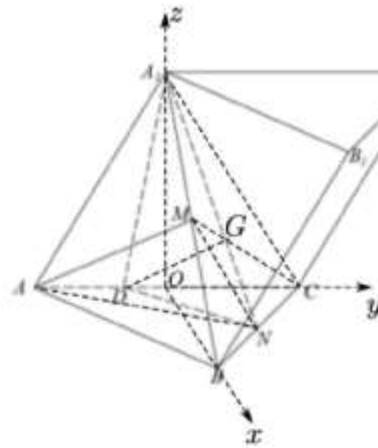
（2）设该款芯片智能自动检测合格为事件 A，人工抽检合格为事件 B，

由已知得 $P(A)=\frac{9}{10}$，$P(AB)=1-P_l=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$， 9 分

记工人在流水线进行人工抽检时，抽检一个芯片恰为合格品为事件 $B|A$，

所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{7}{10}\times\frac{10}{9}=\frac{7}{9}$． 12 分

20.【解析】（1）连接 CM 交 AN 于 G，连接 DG．



因为 M，N 分别为 A_1B，BC 的中点，所以点 G 为 $\triangle A_1CB$ 的重心，

所以 $CG=2GM$，又 $CD=2DA$，所以 $AM\parallel DG$，

因为 $AM\not\subset$ 平面 A_1DN，$DG\subset$ 平面 A_1DN，

所以 $AM\parallel$ 平面 A_1DN． 5 分

（2）在平面 ACC_1A_1 内作 $A_1O\perp AC$ 于点 O．

因为 $AA_1=12$，$\angle A_1AC=60^\circ$，所以 $AO=AA_1\cdot\cos60^\circ=6$，

则点 O 为 AC 中点，所以 $BO\perp CO$．

因为侧面 $ACC_1A_1\perp$ 底面 ABC，而侧面 $ACC_1A_1\cap$ 底面 $ABC=AC$，

$A_1O\perp AC$，$A_1O\subset$ 侧面 ACC_1A_1，所以 $A_1O\perp$ 底面 ABC，

所以 OB，OC，OA_1 两两垂直． 7 分

以 O 为坐标原点，OB，OC，OA_1 为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系．

则 $A(0,-6,0)$，$C(0,6,0)$，$B(6\sqrt{3},0,0)$，$A_1(0,0,6\sqrt{3})$，

因为 M，N 分别为 A_1B，BC 的中点，所以 $M(3\sqrt{3},0,3\sqrt{3})$，$N(3\sqrt{3},3,0)$． 8 分

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 AMN 的一个法向量，$\overrightarrow{AM}=(3\sqrt{3},6,3\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AN}=(3\sqrt{3},9,0)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AN}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3\sqrt{3}x+6y+3\sqrt{3}z=0,\\ 3\sqrt{3}x+9y=0,\end{cases}$ 取 $z=1$ 得 $\boldsymbol{n}=(3,-\sqrt{3},1)$． 10 分

又 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$ 为平面 ANC 的一个法向量，所以 $\cos<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{\sqrt{13}}$，

所以 $\sin<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>=\sqrt{1-\frac{1}{13}}=\frac{2\sqrt{39}}{13}$，

故二面角 $M-AN-C$ 的正弦值 $\frac{2\sqrt{39}}{13}$． 12 分

21.【解析】（1）由题意可得$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{4b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=4\\ b^2=1\end{cases}$，所以椭圆$C$的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$． 3分

（2）①**方法一：第三定义转化**

依题意，点$A(-2,0),B(2,0)$，设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

因为若直线PQ的斜率为0，则点P,Q关于y轴对称，必有$k_{AP}=-k_{BQ}$，不合题意． 4分

所以直线PQ斜率必不为0，设其方程为$x=ty+n(n\neq\pm2)$，与椭圆C联立$\begin{cases}x^2+4y^2=4\\ x=ty+n\end{cases}$

整理得：$(t^2+4)y^2+2tny+n^2-4=0$，

所以$\Delta=4t^2n^2-4(t^2+4)(n^2-4)>0$，且$\begin{cases}y_1+y_2=-\dfrac{2tn}{t^2+4},\\ y_1y_2=\dfrac{n^2-4}{t^2-4}.\end{cases}$ 5分

因为点$P(x_1,y_1)$是椭圆上一点，即$\dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1$，

所以$k_{AP}\cdot k_{BP}=\dfrac{y_1}{x_1+2}\cdot\dfrac{y_1}{x_1-2}=\dfrac{y_1^2}{x_1^2-4}=\dfrac{1-\dfrac{x_1^2}{4}}{x_1^2-4}=-\dfrac{1}{4}$，

所以$k_{AP}=-\dfrac{1}{4k_{BP}}=7k_{BQ}$，即$28k_{BP}\cdot k_{BQ}=-1$

因为$28k_{BP}\cdot k_{BQ}=\dfrac{28y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=\dfrac{28y_1y_2}{(ty_1+n-2)(ty_2+n-2)}=\dfrac{28y_1y_2}{t^2y_1y_2+t(n-2)(y_1+y_2)+(n-2)^2}$

$=\dfrac{\dfrac{28(n^2-4)}{t^2+4}}{\dfrac{t^2(n^2-4)}{t^2+4}-\dfrac{2t^2n(n-2)}{t^2+4}+(n-2)^2}=\dfrac{28(n+2)}{t^2(n+2)-2t^2n+(n-2)(t^2+4)}=\dfrac{28(n+2)}{4(n-2)}=\dfrac{7n+14}{n-2}=-1$，

所以$n=-\dfrac{3}{2}$，此时$\Delta=16(t^2+4-n^2)=4(4t^2+7)>0$，

故直线PQ恒过x轴上一定点$D(-\dfrac{3}{2},0)$． 8分

方法二：非对称韦达

依题意，点$A(-2,0),B(2,0)$，设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$

因为若直线PQ的斜率为0，则点P,Q关于y轴对称，必有$k_{AP}=-k_{BQ}$，不合题意

所以直线PQ斜率必不为0，设其方程为$x=ty+n(n\neq\pm2)$，与椭圆C联立得：$\begin{cases}x^2+4y^2=4\\ x=ty+n\end{cases}$

所以整理得：$(t^2+4)y^2+2tny+n^2-4=0$，

所以$\Delta=4t^2n^2-4(t^2+4)(n^2-4)>0$，且$\begin{cases}y_1+y_2=-\dfrac{2tn}{t^2+4},\\ y_1y_2=\dfrac{n^2-4}{t^2+4},\end{cases}$

依题意，$k_{AP}=7k_{BQ}$，即$\dfrac{k_{AP}}{k_{BQ}}=\dfrac{(x_2-2)y_1}{(x_1+2)y_2}=\dfrac{(ty_2+n-2)y_1}{(ty_1+n+2)y_2}=\dfrac{ty_1y_2+(n-2)y_1}{ty_1y_2+(n+2)y_2}=7$．

算法1：和积关系转化法

因为$ty_1y_2=\dfrac{4-n^2}{2n}(y_1+y_2)$，

所以$\dfrac{ty_1y_2+(n-2)y_1}{ty_1y_2+(n+2)y_2}=\dfrac{\dfrac{4-n^2}{2n}(y_1+y_2)+(n-2)y_1}{\dfrac{4-n^2}{2n}(y_1+y_2)+(n+2)y_2}=\dfrac{2-n}{2+n}\cdot\dfrac{(2+n)(y_1+y_2)-2ny_1}{(2-n)(y_1+y_2)+2ny_2}=\dfrac{2-n}{2+n}=7$，

所以解得：$n=-\dfrac{3}{2}$.

算法2：韦达定理代入消元

因为$y_1=-\dfrac{2tn}{t^2+4}-y_2$，

所以$\dfrac{ty_1y_2+(n-2)y_1}{ty_1y_2+(n+2)y_2}=\dfrac{\dfrac{t(n^2-4)}{t^2+4}+(n-2)\left(-\dfrac{2tn}{t^2+4}-y_2\right)}{\dfrac{t(n^2-4)}{t^2+4}+(n+2)y_2}=\dfrac{(n-2)\left[\dfrac{t(2-n)}{t^2+4}-y_2\right]}{(n+2)\left[\dfrac{t(n-2)}{t^2+4}+y_2\right]}=\dfrac{2-n}{n+2}=7$，

所以解得：$n=-\dfrac{3}{2}$.

方法三：分设两线再联立

依题意，点$A(-2,0),B(2,0)$，设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，并设直线$AP:x=t_1y-2$，直线$BQ:x=t_2y+2$，

因为联立直线AP与椭圆C得：$\begin{cases}x=t_1y-2\\x^2+4y^2=4\end{cases}$

所以整理得：$(t_1^2+4)y^2-4t_1y=0$，解得：$y_1=\dfrac{4t_1}{t_1^2+4}$.

因为联立直线BQ与椭圆C得：$\begin{cases}x=t_2y+2\\x^2+4y^2=4\end{cases}$

所以整理得：$(t_2^2+4)y^2+4t_2y=0$，解得：$y_2=-\dfrac{4t_2}{t_2^2+4}$.

因为$k_{AP}=7k_{BQ}$，且$k_{AP}=\dfrac{1}{t_1}$，$k_{BQ}=\dfrac{1}{t_2}$，$t_2=7t_1$，此时$y_2=-\dfrac{4t_2}{t_2^2+4}=-\dfrac{28t_1}{49t_1^2+4}$，

设直线PQ与x轴交于点$D(x_0,0)$，则由P,D,Q三点共线易知$\dfrac{x_1-x_0}{y_1}=\dfrac{x_2-x_0}{y_2}$，

$x_0=\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{y_1-y_2}=\dfrac{(t_2y_2+2)y_1-(t_1y_1-2)y_2}{y_1-y_2}=\dfrac{(t_2-t_1)y_1y_2+2(y_1+y_2)}{y_1-y_2}$

$=\dfrac{(7t_1-t_1)\left[-\dfrac{112t_1^2}{(t_1^2+4)(49t_1^2+4)}\right]+2\left(\dfrac{4t_1}{t_1^2+4}-\dfrac{28t_1}{49t_1^2+4}\right)}{\dfrac{4t_1}{t_1^2+4}-\left(-\dfrac{28t_1}{49t_1^2+4}\right)}=-\dfrac{12(7t_1^2+4)}{8(7t_1^2+4)}=-\dfrac{3}{2}$，

即线段PQ过点$D\left(-\dfrac{3}{2},0\right)$.

②由①得$y_1+y_2=\dfrac{3t}{t^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{n^2-4}{t^2+4}=-\dfrac{7}{4(t^2+4)}$，

所以$|S_1-S_2|=\dfrac{1}{2}\cdot|y_1-y_2|\cdot\left|2-\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right|-\dfrac{1}{2}\cdot|y_1-y_2|\cdot\left|-2-\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right|=\dfrac{3}{2}|y_1-y_2|$

$=\dfrac{3}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{3\sqrt{4t^2+7}}{t^2+4}$ 10分

$=3\sqrt{\dfrac{4(t^2+4)-9}{(t^2+4)^2}}=3\sqrt{\dfrac{4}{t^2+4}-\dfrac{9}{(t^2+4)^2}}=\sqrt{-9\left(\dfrac{3}{t^2+4}-\dfrac{2}{3}\right)^2+4}\leqslant 2$

（当且仅当 $\dfrac{3}{t^2+4}=\dfrac{2}{3}$ 即 $t^2=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立），

所以 $|S_1-S_2|$ 的最大值为 2． 12 分

22．【解析】（1）令 $h(x)=f(x)-g(x)=xe^x-a(\ln x+x)-1$，

则 $h'(x)=(x+1)e^x-a(1+\dfrac{1}{x})=\dfrac{(x+1)(xe^x-a)}{x}(x>0)$， 1 分

设 $\varphi(x)=xe^x-a(a>0)$，则 $\varphi'(x)=(x+1)e^x>0$ 对任意 $x>0$ 恒成立，

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增， 2 分

又 $\varphi(0)=-a<0$，$\varphi(a)=ae^a-a=a(e^a-1)>0$，存在唯一实数 $x_0\in(0,a)$，$\varphi(x_0)=0$，

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)=\dfrac{(x+1)\cdot\varphi(x)}{x}<0$，$h(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)=\dfrac{(x+1)\cdot\varphi(x)}{x}>0$，$h(x)$ 单调递增；

所以 $h(x)_{\min}=h(x_0)=x_0e^{x_0}-a(x_0+\ln x_0)-1$． 4 分

因为 $g(x_0)=x_0e^{x_0}-a=0(0<x_0<a)$，所以 $x_0e^x=a$，且 $x_0+\ln x_0=\ln a(a>0)$．

所以 $h(x)_{\min}=a-a\ln a-1\geqslant 0$，设 $F(a)=a-a\ln a-1(a>0)$，

因为 $F'(a)=1-(1+\ln a)=-\ln a$，所以 $F(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$(1,+\infty)$ 上单调递减

所以 $F(a)\leqslant F(1)=0$，而依题意必有 $F(a)\geqslant 0$，所以 $F(a)=0$，此时 $a=1$，

所以若不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立，则正实数 a 的值为 1． 6 分

（2）**方法一：借助第（1）问结论**

由（1）得，当 $a=1$ 时，$f(x)=xe^x-(x+\ln x)\geqslant 1$ 对任意 $x>0$ 恒成立．

所以 $\forall x\in(0,+\infty)$，$xe^x\geqslant x+\ln x+1$（当且仅当 $x=1$ 时等号成立），

则 $x^2e^x\geqslant x^2+x\ln x+x(x>0)$． 7 分

所以要证明 $x^2e^x>(x+2)\ln x+2\sin x(x>0)$，只需证 $x^2+x\ln x+x>(x+2)\ln x+2\sin x(x>0)$，

即证 $x^2+x>2\ln x+2\sin x(x>0)$． 8 分

设 $\beta(x)=\ln x-x+1$，则 $\beta(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}(x>0)$，$\beta(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $\forall x\in(0,+\infty)$，$\beta(x)\leqslant\beta(1)=0$，即 $\ln x\leqslant x-1(x>0)$．

所以只需证 $x^2+x>2(x-1)+2\sin x$，即证 $x^2-x+2>2\sin x$． 9 分

①当 $x>1$ 时，$x^2-x+2=x(x-1)+2>2\geqslant 2\sin x$，不等式成立． 10 分

②当 $0<x<1$ 时，$x^2-x+2=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}\geq\dfrac{7}{4}$，$2\sin x<2\sin 1<2\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}<\dfrac{7}{4}$，不等式成立．

所以$x^2e^x \geqslant x^2+3x-2>(x+2)\ln x+2\sin x(x>0)$，证毕． 12 分

方法二：分别放缩

设$\alpha(x)=x-\sin x$，则$\alpha'(x)=1-\cos x\geqslant 0$恒成立，$\alpha(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

$\forall x\in(0,+\infty)$，$\alpha(x)>\alpha(0)=0$，所以$x>\sin x(x>0)$． 7 分

设$\beta(x)=\ln x-x+1$，则$\beta(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}(x>0)$，$\beta(x)$在$(0,1)$上单调递增，$(1,+\infty)$上单调递加，

$\forall x\in(0,+\infty)$，$\beta(x)\leqslant\beta(1)=0$，所以$\ln x\leqslant x-1(x>0)$，所以$\ln e^x\leqslant e^x-1$，即$e^x\geqslant x+1$． 9 分

所以当$x\in(0,+\infty)$时，$(x+2)\ln x+2\sin x<(x+2)(x-1)+2x=x^2+3x-2$

又因为$x^2e^x-\left(x^2+3x-2\right)\geqslant x^2(x+1)-[x(x+1)+2(x-1)]=(x-1)^2(x+2)\geqslant 0$，

所以$x^2e^x\geqslant x^2+3x-2>(x+2)\ln x+2\sin x(x>0)$． 12 分