用题组促进数学概念课中的深度学习

浙江省衢州第二中学 (324000) 陈一晖

在高中数学概念课的教学过程中,从学生们理解概念到深化概念,再会应用概念解决问题是一个不断提高的过程,而此时常出现个别同学掉队,跟不上教学节奏的现象,这就是继续学习、深度学习的把控不够到位.如何使学生不脱节、不掉队,过好新概念学习这一关,是我们授课者必须深入思考的一个课题,本人通过近几年的教学实践进行了一些有针对性探索,感觉到利用设计题组进行目标训练是切实可行、效果显著的方法.本文向同行们分享一下,如何按照课情与学情的需要,设计对应学习题组以帮助提高数学概念课的教学效率.

1、通过题组探究数学概念的实质和内涵

有部分学生在刚开始接触新概念时,只是从字面上有所理解,还不能注意到细节,更谈不上理解概念的内涵,对实质性的东西是茫然的,此时我们应该设计一些对概念理解不透、容易出现解题偏差的题组,通过仔细分析、及时纠正错误,这样对巩固新概念很有用处.

案例一 在巩固奇函数的概念时,我们可以设计如下的题组进行练习,旨在夯实概念.

(1)若函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,且有 $f(-1)=-f(1)$,则 $f(x)$ 是奇函数吗?

(2)函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2-|x+2|}$ 是奇函数吗?

(3)函数 $f(x)=x^3-x,x\in(-1,4]$ 是奇函数吗?

(4)函数 $f(x)=ax^2+bx$ 能为奇函数吗?

(5)若函数 $f(x)$ 奇函数,则一定有 $f(0)=0$ 吗?

(6)如果函数 $f(x)=ax^2+(2b-1)x,x\in(2b+1,1-b)$ 是奇函数,求 $f(-1)$ 的值.

分析:(1)由于奇函数的定义中是对于定义域内任意 x,都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立,只有其中某一个或部分 x 满足等式是不能确定为奇函数的,故而答案为不一定.

(2)中的函数是奇函数,首先应求函数的定义域,即为 $(-1,0)\cup(0,1)$,此时,$2-|x+2|=-x$,于是 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{-x}$,又有 $f(-x)=-f(x)$ 成立,故而是奇函数.

(3)中 $f(x)$ 不是奇函数,由于 $f(-4)$ 没有意义,则 $f(4)=f(-4)$ 不成立.

(4)中 $f(x)$ 可以是奇函数,当 $a=0,b\neq0$ 时满足.

(5)中不一定有 $f(0)=0$,当定义域包含原点时,有 $f(0)=0$,不包含原点就不成立,如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

(6)由于 $f(x)$ 是奇函数,则必有 $a=0$,且 $1-b=-(2+1)$,得 $b=-2$,所以 $f(x)=-5x,x\in(-3,3)$,则 $f(-1)=5$.

此组练习,从多个方面强化了奇函数的内涵,随着知识点的增加,当然还有多种类型的题目可以运用,应注意的是选题的广泛性和规范性,以及把握题目难易的坡度和区分度.

2、运用题组探索数学概念的外延和应用

一个数学概念本身不是孤立的,它是建立许多知识点的累积之上的,而一个新概念也需要与已学过的知识进行融合、交汇,形成知识网络,这样这个概念才有意义和存在价值.注意这里的外延是有限度、有方向的,也就是常说的所谓"正迁移",如果迁移过分或迁移不当,有可能发生谬误.

案例二 在学完抛物线的定义和标准方程后,我们可以给学生提供如下的一组提高练习,旨在理解抛物线概念并合理外延概念的作用.

(1)抛物线 $y^2=4x$ 上一点 P 到 y 轴的距离为 4,求点 P 到焦点距离;

(2)已知动点 P 到点 $A(0,8)$ 的距离比到直线 $l:y=-7$ 的距离大 1,求动点 P 的轨迹方程;

(3)若点 A 的坐标为 $(3,2)$,F 是抛物线 $y^2=2x$ 的焦点,点 M 在抛物线上移动时,使 $|MF|+|MA|$ 取得最小值的点 M 坐标为________;

(4)过抛物线 $x^2=4y$ 的焦点 F 作一条直线交抛物线于 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$ 两点,若 $y_1+y_2=6$,则 $|P_1P_2|$ 的值为________.

分析:(1)由抛物线方程知,$2p=4$,所以准线方程为 $x=-1$,而点 P 到 y 轴的距离为 4,则点 P 到准线的距离为 5,根据抛物线的定义知,点 P 到焦点距离为 5.

(2)依题意知,动点 P 到点 $A(0,8)$ 的距离比到直线 $l:y=-8$ 的距离相等,由抛物线的定义得 P 的轨迹为抛物线且 $\dfrac{p}{2}=8$,又焦点在 y 轴正半轴,所以其方程为 $x^2=32y$.

(3) 由于 $|MF|$ 是点 M 到抛物线焦点距离,使 $|MF|+|MA|$ 取得最小值的点为过点 A 作与 y 轴垂直的直线与抛物线的交点,则点 M 纵坐标为 2,代入方程的横坐标也为 2.

(4)由于 $\dfrac{p}{2}=1$,所以抛物线的准线方程为 $y=$

-1,根据抛物线的定义知$|P_1F|=y_1+1$,$|P_2F|=y_2+1$,所以$|P_1P_2|=y_1+y_2+2=8$.

此组练习都是以抛物线的定义为基准,围绕着这个定义向四周辐射所形成的各类问题,通过本组题的练习,不但深化了抛物线的概念,同时也了解了哪些题是可以运用定义解决的.

3、运用题组辨别形似但本质不同的相关概念

有一些数学概念其表现形式差别不大,容易混淆,但是我们可以通过设计相关题组的方法,把它们放在一起解决,通过分析可发现它们之间的本质是不一样的,通过设计题组及时区分,并解剖它们的本质,可以进一步加深对所学概念的理解,以免犯审题不清造成的错误.

案例三　在讲完了分段函数的单调性问题后,可以给出下面一组练习,旨在检查对一些分段函数单调性有关题型的判断情况.

(1)已知函数 $f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a, x<0,\\ a^x, x\geqslant 0\end{cases}$ 满足对任意 $x_1\neq x_2$,都有$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 成立,则实数 a 的取值范围是________;

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}(2a-1)x+3a-1, x\leqslant t,\\ x^3-x, x>t\end{cases}$ 无论 t 取何值时,函数 $f(x)$ 在区间$(-\infty,+\infty)$总不是单调,求参数 a 的取值范围.

(3)若 $f(x)=\begin{cases}(1-2a)x+3a, x<1,\\ \ln x, x\geqslant 1\end{cases}$ 的值域为 R,试求实数 a 的取值范围.

分析:(1)依题意,此函数是 R 上的单调递减函数,根据定义知,有 $0<a<1$ 且 $3a-1<0$,$4a\geqslant 1$,将上述三个不等式联立,解得$\dfrac{1}{4}\leqslant a<\dfrac{1}{3}$.

(2)由 $y'=3x^2-1>0$,得 $x>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$或 $x<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,此时函数 y 为增函数,当$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时,$y$ 为减函数,即函数$f(x)=x^3-x$,$x>t$ 一定存在单调增区间,依题意$f(x)$不能为增函数,即有 $2a-1\leqslant 0$,得 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$,于是 a 的取值范围是$(-\infty,\dfrac{1}{2}]$.

(3)由于 $y=\ln x$ 是增函数,当 $x\geqslant 1$ 时,函数的值域为 $y\in[0,+\infty)$,若要求$f(x)$的值域为 R,则需要 $y=(1-2a)x+3a$ 也为增函数,且当 $x=1$ 时的函数值不小于 0,即$\begin{cases}1-2a>0,\\ 1-2a+3a\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a<\dfrac{1}{2}$,所以 a 的取值范围是$[-1,\dfrac{1}{2})$.

此组练习都是关于分段函数的单调性问题的,其题设部分比较相似,而不相似的部分正是问题的关键,通过分析研判,可以挖掘利用它们的不同,建立符合题意的求解方案.

4、利用题组多向探究发掘数学概念的用途

在一个概念的后面,会有许多对应的练习题目呈现,对此我们必须对它们进行分类和挑选,目的是有针对性地巩固所学的新概念,并使概念发挥作用.同时也可利用对新概念的认识,揭示一些问题的破解方法,扩大学生们视野,提高应变能力,增加学习数学的兴趣.

案例四　在讲完函数的最大值与最小值的概念后,给出下面的题组,引导学生对函数的最大值与最小值的概念有一个全方位的了解.

(1)函数$f(x)=x^3-3x-1$,若对于区间$[-3,2]$上任意 x_1,x_2,都有$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant t$,求实数 t 的取值范围;

(2)已知函数$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+ax$,$g(x)=\dfrac{x}{e^x}$,对$\forall x_1\in[\dfrac{1}{2},2]$,$\exists x_2\in[\dfrac{1}{2},2]$,使$f'(x_1)\leqslant g(x_2)$成立,求实数 a 的取值范围;

(3)已知函数 $f(x)=e\ln x-ex$,证明不等式 $f(x)\leqslant\dfrac{e^x}{x}-2e$.

分析:(1)由于 $f'(x)=3x^2-3$,当 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$时,$f'(x)>0$,当 $x\in(-1,1)$时,$f'(x)<0$,易得$f(x)_{max}=1$,$f(x)_{min}=-19$.由题设知在区间$[-3,2]$上$f(x)_{max}-f(x)_{min}\leqslant t$,从而 $t\geqslant 20$,即实数 t 的取值范围是$[20,+\infty)$.

(2)依题意问题等价于"当 $x\in[\dfrac{1}{2},2]$时,$f'(x)_{max}\leqslant g(x)_{max}$".因为 $f'(x)=x^2+2x+a$ 在$[\dfrac{1}{2},2]$上单调递增,所以$f'(x)_{max}=f'(2)=8+a$.而 $g'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$,易知当 $x\in[\dfrac{1}{2},2]$时,$g(x)_{max}=g(1)=\dfrac{1}{e}$.由 $8+a\leqslant\dfrac{1}{e}$,得 $a\leqslant\dfrac{1}{e}-8$.

(3)由于$f'(x)=e(\dfrac{1}{x}-1)$,所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减.所以$f(x)_{max}=f(1)=-e$.设 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}-2e(x>0)$,则 $g'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$,易得$g(x)_{min}=g(1)=-e$.即有$f(x)\leqslant\dfrac{e^x}{x}-2e$.

此组题,从形式上看似乎是不同类型的问题,但实质是一样的,它们都是通过求函数的最大值和最小值来解决问题,是函数最值问题的不同应用而已.