高中数学思想方法的结构化教学研究*

卫福山　（上海市松江二中　201600）

摘　要：数学核心素养如何在日常教学中高效实施？教师除了加强基础知识的教学之外，数学思想方法是高中数学教材中不可忽视的隐含线索．结构化教学可以帮助学生形成较为完善的数学知识结构与认知结构．从结构化视角分析教材的知识结构，并对数学思想方法的教学进行结构化分析．

关键词：教材与课程；高中数学思想方法；结构化教学

文章编号：1004-1176(2022)03-0009-06

1　基本概念

（1）数学结构化教学

数学结构化教学，就是从数学知识结构和学生的数学认知结构出发设计和组织教学，以完善和发展学生原有数学认知结构的过程．美国心理学家布鲁纳认为："不论我们选教什么学科，务必使学生理解学科的基本结构．"这里数学的基本结构包括了数学的基本观念（数学概念、命题、思想方法）以及这些数学观念的内在联系、学习态度和方法等．

（2）数学思想方法

数学思想是指现实世界的空间形式和数量关系反映到人的意识之中，经过思维活动而产生的结果．数学方法是人们从事数学活动时所使用的方法．数学思想与数学方法既有联系又有区别，思想是对事物和客观规律的本质的概括认识，而方法是达成这种认识的手段和步骤．张奠宙教授指出："同一个数学成就，当用它去解决别的问题时，称之为方法，当评价它在数学体系中的自身价值和意义时，称之为思想．"因此，数学思想与数学方法有时不加区别，常常混用或合用，统称为数学思想方法．

2　高中数学的知识结构——以上海2020年高中数学新教材为例

北京师范大学数学系教授、人民教育出版社普通高中课程标准实验教科书主编刘绍学先生在《中学数学概观》中指出："在进行具体内容的教学时，对它在中学数学整体结构中的位置有一清晰的了解是重要的，为此需要对中学数学有一个概括性的描述．这里我把中学数学概括为一些知识点，并选择'数量关系''空间形式''数形结合'等三条粗线条把它们编织起来，以便大家对它有一条粗线条但略有秩序的理解．"按照刘绍学教授的观点，中学数学的主要知识即三条主线：数量关系（代数）、空间形式（几何）、数形结合（思想方法），涵盖了内容与方法，也说明我们在关注数学知识的同时，也要重视数学思想方法．

上海高中数学新教材课程的结构及内容如图 1 所示．结合刘绍学教授的观点，我们可以把上海高中数学新教材主要内容的结构图展示如图 2 所示．

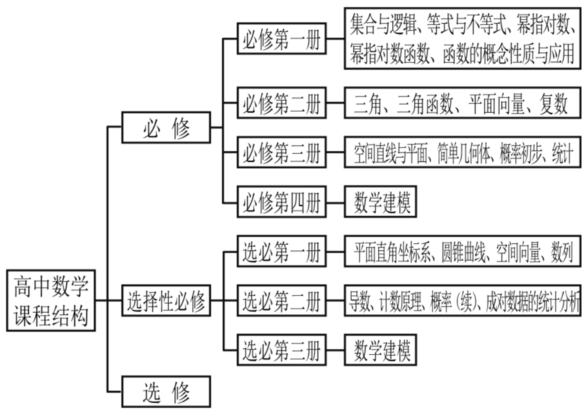


图 1

结合数学本质，根据数量关系、空间形式、数形结合等三条粗线分别进行结构化分析，如图 3 所示．

从以上三种分类所形成的结构分析可以发现，由"数量关系"形成的结构以及由"空间形式"形成的结构反映出的知识是静态的，是由单纯的知识按照各自关系形成；而由"数形结合"所形成的结构则有方法技能的体现，反映知识动态的一面．通过"数"与"形"及"数形结合"归纳的高中数学的知识结构，有以下优点：① 按照数学的本质对高中数学知识进行结构分类，便于知识的整合

* 本文为上海市第四期"双名工程"攻关计划虞涛数学基地攻关课题"中学数学结构化教学设计与实施的行动研究"（编号：SMGC-201904-B55）的研究成果．

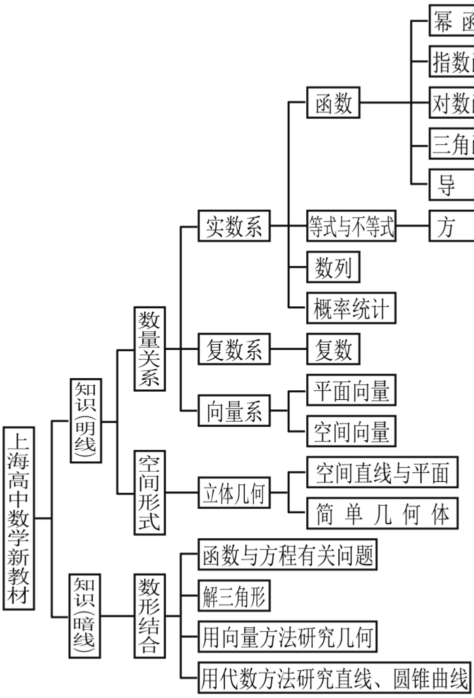


图 2

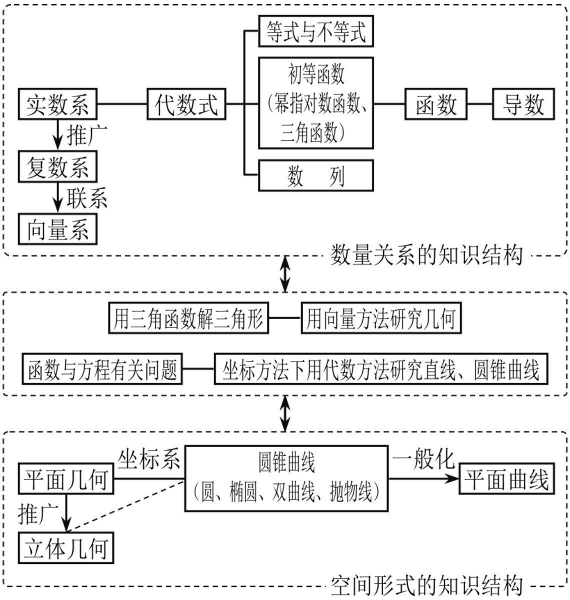


图 3　数形结合的知识结构

与重组;② 对空间形式所形成的结构通过数形结合的方式实现图形从定性分析向定量分析转化,同时对“数量关系”中的结构可以利用几何直观使问题简化;③ 静态知识结构与动态结构的结合,是结构的不同表征,有利于探究知识的发生过程及学生思维结构的形成.

3　基于结构化观点的高中数学思想方法的教学

3.1　为什么要进行数学思想方法的教学

(1)数学知识结构本身就包括数学方法

数学知识结构的大致构成如图 4 所示.

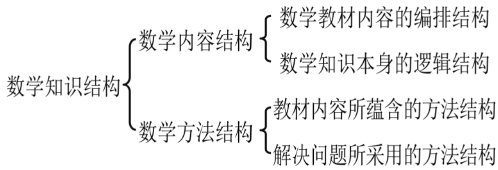


图 4

数学内容结构既指数学教材内容的编排结构即数学内容及其排列、组合方式,也指数学内容本身所固有的内在的逻辑结构.数学内容本身的逻辑结构,如立体几何中空间的角与距离都是通过转化为平面的角与距离来加以定义的.数学方法结构既指数学内容中所蕴含的思想方法及其排列与组合的方式,也指解决某一数学问题所用的具体方法或步骤.如幂、指、对数函数教材内容所蕴含的思想方法是:从实例抽象概括出一般数学模型,再用特殊到一般、具体到抽象、分类讨论、数形结合等方法研究函数的性质,最后应用函数性质解决问题.

(2)课程标准的要求

《普通高中数学课程标准(2017 年版)》明确指出:“通过高中数学课程的学习,学生能获得进一步学习及未来发展所必需的数学基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验(简称‘四基’);提高从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力(简称‘四能’).”“四基”与“四能”蕴含了数学思想方法.

(3)数学教育的本质,即思维的要求

数学知识本身很重要,但数学知识所承载的思维方法更重要.而理解问题是思维活动最有效的形式,理解问题的过程就是在运用理性的思维去试图解释问题、探寻解决问题的方法.学生思维能力培养要达到的目标就是学生会用数学的方法思考问题、提出问题、解决问题.而思维能力的培养,依据数学中的概念等基本知识,主线是学科思想,最终目标即学科核心素养.比如在《数列》的学习中,教师除了要教授学生掌握等差、等比数列基本概念与性质、数列其他性质外,还应该从知识背后的思想方法的角度引发学生思考,即函数的思想、类比的思想等,这样学生就能自己学习与思考了.

(4)培养学生数学能力的根本途径

大量实践表明,试图通过让学生做大量习题,进行解题训练来培养学生的数学能力的教学并不成功或者事倍功半,主要原因是忽视了数学思想方法的作用.事实上,在学生具备了一定的知识之后,数学能力培养的关键是运用数学方法在数学

活动中积累感性认识,随着感性认识的积累达到一定的程度,学生的认识便会发生飞跃(类似于哲学中的从量变到质变),形成对一类数学活动的理性认识,即有关的数学思想,与之相伴随,学生的数学与能力便逐渐形成.因此,数学思想方法是培养学生数学能力的根本途径,对学生数学能力的提高具有统摄作用.如“运算能力”是指会根据有关法则、公式正确处理数据,能够根据问题条件寻找并设计合理而简捷的运算途径.运算能力的高低取决于运算技能、思维水平以及对算理的理解等,其核心则是在正确理解概念的基础上掌握转化的思想方法,提高学生对数或式的变形能力.学生在高中学习解析几何有关内容时,运算能力很薄弱,经常算错或算不下去,凸显运算能力的欠缺,而究其原因,可能是概念理解、转化、变形等方面出现了问题,教学中便可以对症下药.

(5)培养学生创新能力的关键

进入新世纪以来,创新能力作为适应社会发展需要所必备的能力,已被确立为基础教育中必须着重培养的能力.数学作为基础学科,在创新能力的培养中发挥独特的作用,而数学思想方法在其中发挥着极其重要的作用,主要体现在它为学生提供了有关如何学习、如何思考的策略性知识.这种策略性知识与事实性知识的结合非常紧密,相互渗透,相互融合,这就要求在数学教学中,教师要把这些策略性知识与数学具体知识结合起来,从而使学生在获得知识的同时,体会到知识发生发展过程中的思想和方法.

3.2 数学思想方法教学的原则

由于数学思想方法是隐藏在数学知识背后的暗线,数学思想方法的教学一般采用渗透的形式进行.如何渗透、怎么渗透,是值得我们在教学前思考的问题.在课堂教学中渗透数学思想方法,一般应遵循以下原则:

(1)反复渗透

数学知识的学习本来就是一个螺旋上升、连续反复的过程,数学思想方法比数学知识的学习更加抽象、困难,因此数学思想方法的学习不可能一蹴而就,而需要一个连续反复的过程,可以在教学的各个阶段进行渗透.比如三角比,初中学了简单的锐角三角比,到了高中,将角的概念推广到任意角,继续三角比的学习,并学习了三角比的诱导公式,最后又把任意角的三角比化成锐角三角比.为什么推广了角的概念及三角比的定义,又要回到锐角三角比呢?这其中肯定有它的道理,蕴含了丰富的数学思想方法,需要教学中多次反复,帮助学生加深理解.

(2)循序渐进

数学思想方法的学习过程是一个抽象的认知的过程,需要经历从领悟到形成、从巩固到应用的发展过程,要遵循“教师引导、逐步渗透、适时总结”的程序.在教学时渗透必须遵循教学规律,由浅及深、由表及里逐步渗透,并根据具体知识与方法的不同采用不同教学手段循序渐进地进行.比如函数思想,初中按依赖关系定义了函数,并学习了一次函数、二次函数,到了高中阶段逐步深化,从集合的角度重新定义了函数,并学习了幂、指、对数函数及三角函数,研究了这些初等函数的图象与性质.学生开始不明白也不了解为什么函数要重新定义,经过一段时间的反复、循序渐进的学习后,学生对函数的思想才逐步明确.

(3)主体参与

数学教学要体现教师主导、学生主体的原则,就是要通过各种数学活动让学生成为主体.数学思想方法也是数学活动的内容之一,需要学生亲自去感受与体验,教师通过学生的理解再去引导与讲解,才有助于学生真正领悟和掌握数学思想方法的内涵.比如椭圆标准方程的推导,这是一个繁琐的计算过程,完全可以让学生参与进来,锻炼思维能力和计算能力.试想一下,如果教师直接快速按教材推导出来或者干脆不推导,直接告诉学生最后的结果,学生就没有体会到其中的运算技巧与运算策略,甚至公式背后的故事(如圆锥曲线的第二定义).相反,学生主动参与后,印象会很深刻,既提升了运算能力,也对后续双曲线、抛物线的学习有很好的参考作用.

(4)系统归纳

数学教学的主要任务是形成并完善学生的认知结构,这需要对知识定期地做系统的梳理(复习),也就是说,教师要引导学生把分散的知识点和某种思想系统起来,并加以储存、提取和应用,以便形成一个较为完善的认知结构.在数学教学中,数学思想方法以数学知识为载体,通过教学过程逐步渗透,但考虑到内容、进度等因素,数学思想方法的渗透是间断的,这就需要教师适时地把体现某一数学思想方法的分散的问题重新搜集起来,并加以归纳和系统化.比如数形结合思想,表现的具体方法有图解法、解析法、复数法、向量法等,与之有关的知识系统有集合中的数轴、函数中的图象、解析几何中的直角坐标系、复数中的复平

面、向量中的平行四边形（三角形）法则等.教师可以根据学生的实际情况，分阶段、分内容地对蕴含的数学思想加以归纳，这将有利于学生对数学思想方法系统性的认识.

3.3　数学思想方法教学的途径

（1）新知识的形成过程中渗透数学思想方法

数学新知识的发生过程需要教师引导学生选择合适的方法，使其逐步领悟并应用数学思想方法解决问题.教师可以设计合适的情境、一定的问题，引导学生思考、概括问题的本质，并提升到数学思想方法的高度，帮助学生领悟新知识中蕴含的数学思想方法.

案例 1　三角比的定义教学片断

• 复习引入

回顾：在初中我们学习了锐角的三角比，它是在直角三角形的条件下，通过角 α 的对边、邻边与斜边之间两两的比值来定义的.你能在直角三角形中正确表示锐角的各个三角比吗？

• 引申铺垫

问题 1　前面我们学习了象限角，即把角放在平面直角坐标系中研究.把上面的角 α 放在平面直角坐标系中，如何表示角 α 的正弦、余弦、正切呢？

问题 2　上面问题 1 中的角 α 是 Rt△OPM 的一个内角（锐角），结合象限角的概念，点 P 是角 α 终边上的一个点，换一个点（如 Q，图 5）来表示角 α 的正弦、余弦、正切，你会有什么发现？

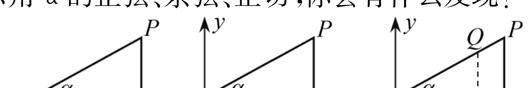


图 5

问题 3　以上研究的是锐角 α 的正弦、余弦、正切，如果角 α 是钝角呢？

• 分析归纳

通过以上的分析，给出平面直角坐标系下任意角 α 的正弦、余弦、正切的定义，拓展给出任意角 α 的正割、余割、余切的定义.并归纳定义的关键与本质，即用角终边上任意一点的坐标表示三角比.

以上教学片断通过设置若干循序渐进的问题，引导学生思考.教师可以在学生回答的基础上适当引导学生思考本质，挖掘出知识背后的思想方法，这样学生对三角比定义的理解才比较深刻.

（2）新知识的巩固过程中应用数学思想方法

数学新知识需要及时巩固才能形成技能培养能力.巩固新知识的过程就是大量练习的过程，通过系统的归纳总结揭示知识之间的内在联系，这为数学思想方法的形成和渗透提供了很好的机会，在巩固学生解题能力的同时也发展了学生的思维能力.

案例 2　指数函数的图象与性质的教学片断

例 1　比较大小：

1）$1.2^{2.3}$ 与 $1.2^{2.7}$；2）$0.2^{-0.3}$ 与 $0.2^{-0.7}$；

3）$\left(\frac{1}{4}\right)^{0.6}$ 与 $\left(\frac{1}{2}\right)^{0.5}$；4）$0.4^{-0.7}$ 与 $0.3^{-0.7}$；

5）$1.4^{0.8}$ 与 $0.9^{2.5}$.

例 2　若 $a^m < a^n$（$a>0, a\neq 1$），比较 m, n 的大小.

设计说明　例 1 的 5 个小题分别代表不同类型，以此让学生深化对基本知识的理解与运用，体会转化与化归思想方法.从例 1 的特殊到例 2 的一般化，对参数（字母）的不确定性需要讨论（基于例 1 的特殊情况的归纳总结），培养学生分类讨论的数学思想.

（3）新知识的总结归纳中概括数学思想方法

每节新授课一般都会有课堂小结，归纳知识点的同时应注意对思想方法的概括.同一个知识点可能会包含多种数学思想方法，反过来，一种数学思想方法又可能出现在多个知识点中，所以教师要正确引导学生学会概括思想方法.

案例 3　"函数的奇偶性"课堂小结片断

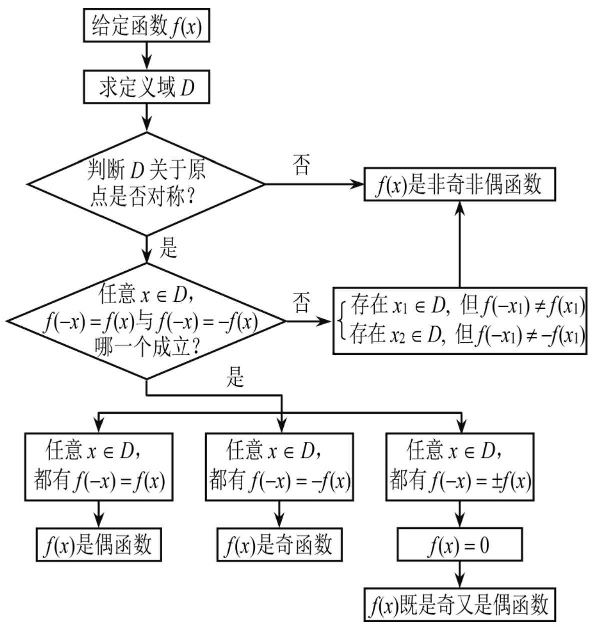


图 6

通过框图（图 6）比较清晰地展现了本节课的主要内容，教师在引导学生小结本节课的主要内容的同时，要同时系统归纳其中的数学思想方法.

如研究函数的奇偶性要先看定义域是否对称，再看解析式是否满足定义，这蕴含化归的思想方法；“$f(-x)=f(x)$”与“$f(-x)=-f(x)$”有几种等价变形，蕴含了等价转化的思想方法；函数奇偶性的判断结果有且只有四种，即奇函数、偶函数、既奇又偶函数、非奇非偶函数，这是分类讨论思想方法的应用.

(4)反思中引导学生领悟数学思想方法

数学思想方法要被学生接受和应用，除了教师的渗透和训练，还需要学生自己在解题后的反思中去领悟.著名数学家弗赖登塔尔曾说过：“反思是数学思维活动的核心和动力.”教师如果能经常引导学生反思解题的过程及其中蕴含的数学思想方法，总结常见的错误及原因，将数学学习上升到数学思想方法学习的高度，对提升学生的思维能力和水平必将有帮助.比如在推导完等比数列求和公式后，教师带领学生反思推导过程中运用的分类讨论思想，反思：为什么要分类？分类的标准如何确定？如果不分类，结果如何？这样的反思有助于学生加深对分类讨论思想方法的深刻理解.

(5)解题教学中渗透数学思想方法

学习数学离不开解题，但这不等同于“题海战术”.解题教学是在教师指导下，学生将所学知识应用于解决数学问题的一种实践性活动.弗赖登塔尔认为：“学习数学的唯一方法是实行‘再创造’”，这就要求学生把要学的东西自己去发现并创造出来，教师进行引导与辅助，而不是满堂灌.因此，在解题教学中，教师应组织学生分析已知、未知和所求，然后学生自己尝试寻求解决问题的办法，通过观察、归纳、类比、联想和论证提出各种解题策略，运用数学思想方法确定问题的最终解法.著名数学家波利亚在《怎样解题》中提出解题过程分为四大步骤：弄清问题、拟定计划、实现计划、回顾反思，其中“拟定计划”这一过程展现了思维过程，教师可以渗透数学思想方法.

案例 4　一道期末考试题解答的教学片断

题目：已知 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A,B,C 的对边，S 为 $\triangle ABC$ 的面积，$\sin(B+C)=\dfrac{2S}{a^2-c^2}$，证明：$A=2C$.

第一步：弄清问题，明确题目的已知与所求，即 $\sin(B+C)=\dfrac{2S}{a^2-c^2}\xrightarrow{\text{证明}}A=2C$，即有关三角形边、角、面积关系的推理问题，需要不断应用转化的数学思想方法.怎么转化？我们可以将题目的条件与结论化整为零.比如在三角形中，学生熟知的基本知识有：$\sin(B+C)=\sin A$，$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B$，$a^2-c^2\xlongequal{\text{平方差公式}}(a+c)(a-c)\xlongequal{\text{正弦定理}}4R^2(\sin A+\sin C)(\sin A-\sin C)\xlongequal{\text{和差化积公式}}4R^2\cdot 2\sin\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A+C}{2}\cdot 2\cos\dfrac{A+C}{2}\sin\dfrac{A-C}{2}\xlongequal{\text{二倍角公式}}4R^2\cdot\sin(A+C)\sin(A-C)\xlongequal{\text{三角形}}4R^2\sin B\sin(A-C)\xlongequal{\text{正弦定理}}2R\cdot b\cdot\sin(A-C)$，$A=2C\Leftrightarrow A-C=C\Leftrightarrow A+C=3C\Leftrightarrow\dfrac{A}{2}=C$，$A=2C\Leftrightarrow\sin A=\sin 2C\Leftrightarrow\sin(A-C)=\sin C\Leftrightarrow\sin\dfrac{A}{2}=\sin C$.

第二步：拟定计划，对题目的条件与结论变形分析后综合联想，注意到理解三角形问题的一般策略是“化边”或“化角”，拟定如下的解题思路：

思路 1　(条件化角)由于$\dfrac{2S}{a^2-c^2}=\dfrac{ab\sin C}{a^2-c^2}=\dfrac{\sin A\sin B\sin C}{\sin^2 A-\sin^2 C}$，于是条件化为 $\sin(B+C)=\dfrac{\sin A\sin B\sin C}{\sin^2 A-\sin^2 C}$，即 $\sin A=\dfrac{\sin A\sin B\sin C}{\sin^2 A-\sin^2 C}$，于是 $\sin^2 A-\sin^2 C=\sin B\sin C$，利用和差化积公式有 $\sin(A-C)=\sin C$.

思路 2　(条件化边)由条件得 $\sin A=\dfrac{bc\sin A}{a^2-c^2}$，于是有 $a^2-c^2=bc$.欲证 $A=2C$，即证 $\sin A=\sin 2C$，也即证 $\sin A=2\sin C\cos C$，化成边，即证 $a=2c\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，将条件代入即可.

第三步：实现计划，按照拟定计划的思路，可以完成本题的解答，这里省略.

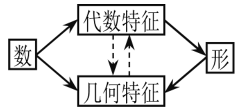
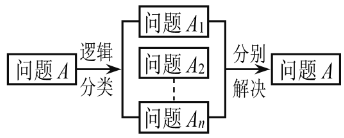
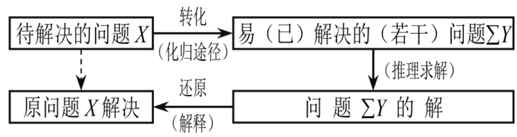
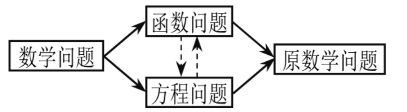
从以上解题过程来看，数学思想方法对正确解题起到了一定的指导与引领作用，特别是进行一题多解、多题一解、一题多变教学时，一定要从引导数学思想方法的高度对解题进行反思与提炼，这样才能有助于学生更好地掌握解题策略与解题方法.

3.4　高中数学基本数学思想方法

高中数学中重要而基本的数学思想方法主要有：数形结合、分类讨论、转化与化归、函数与方

程,如表 1 所示.

表 1 高中数学思想方法

<table>
<tr><th>数学思想方法</th><th>基本涵义</th><th>关系图</th></tr>
<tr><td>数形结合</td><td>利用数与形的优势互补来解决问题</td><td>
</td></tr>
<tr><td>分类讨论</td><td>将一个大问题(范围较广)划分为若干小问题(范围较小)并逐一解决</td><td>
</td></tr>
<tr><td>转化与化归</td><td>把有待解决的问题转化为已解决的问题</td><td>
</td></tr>
<tr><td>函数与方程</td><td>用函数与方程的观点去处理变量、未知数之间的关系,然后使问题得到解决</td><td>
</td></tr>
</table>

参考文献

[1] 张鹤.数学教学的逻辑——基于数学本质的分析[M].北京:首都师范大学出版社,2016.

[2] 章建跃.章建跃数学教育随想录(上下卷)[M].杭州:浙江教育出版社,2017.

[3] 史宁中.数学基本思想 18 讲[M].北京:北京师范大学出版社,2016.

[4] 李昌官.试论数学教学的结构性原则[J].课程·教材·教法,2002(5):35-37.

[5] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017 年版)[M].北京:人民教育出版社,2018.

[6] 邵光华.作为教育任务的数学思想与方法[M].上海:上海教育出版社,2009.

(上接第 5 页)

个命题出发,引出三角形边角定量关系问题;然后引导学生从图 19 所示的特殊三角形中得到特殊的边角关系 $\sqrt{3}:1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right):\left(\frac{1}{2}\right)=\sin 60^\circ:\sin 30^\circ$,进而猜想出一般三角形的边角关系;然后引导学生探究正弦定理的各种几何证明;最后利用正弦定理解决流星测量问题.这份教学设计运用了一种数学思想——转化,落实了两种核心素养——逻辑推理和直观想象,呈现了三种文化元素——知识源流、学科联系和多元文化,体现了四种德育价值——理性、信念、情感和品质.

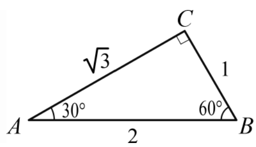


图 19 特殊直角三角形中的边角关系

以上我们呈现了 HPM 视角下教学研讨的一个较为完整的内容框架,其中,“追本溯源”“想方设法”“探赜索隐”和“登高望远”解决的是“用什么数学史料”的问题,“质疑问难”解决的是“如何用数学史料”的问题,“归根结底”解决的则是“为何用数学史料”的问题.我们有理由相信,在 HPM 教学理念广泛传播和教师在线学习研修常态化的今天,基于该框架的教学研讨,对于确保 HPM 课例质量、促进教师专业发展、深化 HPM 实践研究必将产生积极的影响.

参考文献

[1] 汪晓勤.关于 HPM 教学评价的案例分析[J].数学通报,2021,60(10):1-6.

[2] Bennett A A.Normalized geometrical systems[J].Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America,1921,7(3):84-89.

[3] Kelley J L.An Introduction to Modern Algebra[M].Princeton:Van Nostrand,1960.

[4] Kazarinoff N D.Analytical Inequality[M].New York:Holt,Rinehart & Winston,1961.

[5] 汪晓勤.HPM:数学史与数学教育[M].北京:科学出版社,2017.

[6] 汪晓勤.基于数学史料的高中数学问题编制策略[J].数学通报,2020,59(5):9-15.

[7] Heath T L.Apollonius of Perga:Treatise on Conic Sections[M].Cambridge:The University Press,1896.