

★启用前注意保密

2022 年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（一）

数学参考答案

评分标准：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	C	D	A	D	B	B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。（全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	BD	ACD	AD	BC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 60

14. AE 和 GF (AE 和 DG , AE 和 DF , AG 和 DF) (写出其中一对即可)

15. $(4\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$

16. $\frac{3}{2} - \ln 2$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。

17. 解：论断①中，由余弦定理得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{ac}{2ac} = \frac{1}{2}$, 1 分

由 $B \in (0, \pi)$, 得 $B = \frac{\pi}{3}$ 2 分

论断②中，因为 $c = 2b \cos B$, 由正弦定理得， $\sin C = 2 \sin B \cos B = \sin 2B$, 3 分
因为角 B, C 是 $\triangle ABC$ 的内角，所以 $C = 2B$ 或 $C + 2B = \pi$ 5 分

论断③中，由正弦定理得， $\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C = \sin B + \sin C$,

即 $\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C = \sin(A + C) + \sin C$, 6 分

即 $\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C = \sin A \cos C + \cos A \sin C + \sin C$,

即 $\sqrt{3}\sin A \sin C = \cos A \sin C + \sin C$, 又因为 $\sin C \neq 0$, 所以 $\sqrt{3}\sin A = \cos A + 1$, 7 分

得 $\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, 又因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, 得 $A = \frac{\pi}{3}$ 8 分

以其中两个论断作为条件, 余下的一个论断作为结论, 所有可能的真命题有:

①③ \Rightarrow ②和①② \Rightarrow ③. 10 分

18. (1) 证明: 如右图, 连接 AE , 由题意知 AB 为 $\odot O$ 的直径, 所以 $AE \perp BE$ 1 分

因为 AD, EF 是圆柱的母线, 所以 $AD \parallel EF$ 且 $AD = EF$. 所以四边形 $AEFD$ 是平行四边形.

所以 $AE \parallel DF$.

所以 $BE \perp DF$ 2 分

因为 EF 是圆柱的母线, 所以 $EF \perp$ 平面 ABE .

又因为 $BE \subset$ 平面 ABE ,

所以 $EF \perp BE$ 3 分

又因为 $DF \cap EF = F$, $DF, EF \subset$ 平面 DEF ,

所以 $BE \perp$ 平面 DEF 4 分

(2) 解: 由 (1) 知 BE 是三棱锥 $B-DEF$ 底面 DEF 上的高,

由 (1) 知 $EF \perp AE$, $AE \parallel DF$, 所以 $EF \perp DF$, 即底面三角形 DEF 是直角三角形.

设 $DF = AE = x$, $BE = y$, 则 $x^2 + y^2 = 4$.

所以 $V_{B-DEF} = \frac{1}{3} S_{\triangle DEF} \cdot BE = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times x \times x\right) \times y = \frac{1}{3} xy \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{2}{3}$,

当且仅当 $x = y = \sqrt{2}$ 时等号成立, 即点 E, F 分别是 $\widehat{AB}, \widehat{CD}$ 的中点时, 三棱锥 $B-DEF$ 的体积最大. 8 分

(下求二面角 $B-DF-E$ 的余弦值)

方法一: 由 (1) 得 $BE \perp$ 平面 DEF , 因为 $DF \subset$ 平面 DEF , 所以 $BE \perp DF$ 9 分

又因为 $EF \perp DF$, $EF \cap BE = E$, 所以 $DF \perp$ 平面 BEF . 因为 $BF \subset$ 平面 BEF , 所以 $BF \perp DF$. 所以 $\angle BFE$ 是二面角 $B-DF-E$ 的平面角. 10 分

由 (1) 知 $\triangle BEF$ 为直角三角形, 则 $BF = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{6}$ 11 分

故 $\cos \angle BFE = \frac{EF}{BF} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

所以二面角 $B-DF-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 12 分

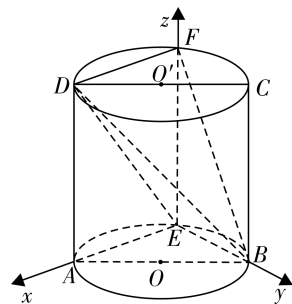
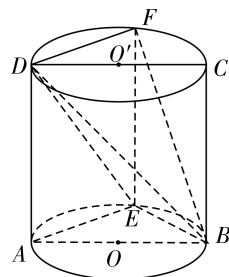
方法二: 由 (1) 知 EA, EB, EF 两两相互垂直, 如右图, 以点 E 为原点, EA, EB, EF 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系 $E-xyz$,

则 $B(0, \sqrt{2}, 0), D(\sqrt{2}, 0, 2), E(0, 0, 0), F(0, 0, 2)$.

..... 9 分

易知平面 DEF 的法向量为 $\vec{EB} = (0, \sqrt{2}, 0)$.

设平面 BDF 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 由 $\vec{DF} = (-\sqrt{2}, 0, 0), \vec{BF} = (0, -\sqrt{2}, 2)$,



得 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DF} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BF} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -\sqrt{2}x = 0, \\ -\sqrt{2}y + 2z = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = 0, \\ y = \sqrt{2}z, \end{cases}$ 取 $z = 1$, 得 $\mathbf{n} = (0, \sqrt{2}, 1)$ 10 分

设二面角 $B-DF-E$ 的平面角为 θ ,

$$\text{则 } |\cos \theta| = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{EB} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EB}|}{|\mathbf{n}| \cdot |\overrightarrow{EB}|} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

由图可知 θ 为锐角, 所以二面角 $B-DF-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 12 分

19. (1) 证明: 由题意可得, $a_1 = 1$. 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1}$,

$$\text{所以 } (S_n - S_{n-1})[2S_n - (S_n - S_{n-1})] = 1, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{得 } S_n^2 - S_{n-1}^2 = 1. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{又 } S_1^2 = a_1^2 = 1,$$

所以 $\{S_n^2\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列. 4 分

$$\text{所以 } S_n^2 = n. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

因为 $\{a_n\}$ 是正项数列, 所以 $S_n > 0$. 故 $S_n = \sqrt{n}$ 6 分

(2) 解: 不存在.

理由如下:

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}, \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } a_1 = 1, \text{ 所以对于 } n \in \mathbf{N}^*, \text{ 都有 } a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{则 } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \sqrt{n} + \sqrt{n-1}. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

假设存在满足要求的连续三项 a_k, a_{k+1}, a_{k+2} , 使得 $\frac{1}{a_k}, \frac{1}{a_{k+1}}, \frac{1}{a_{k+2}}$ 构成等差数列,

$$\text{则 } 2(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) = \sqrt{k} + \sqrt{k-1} + \sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}.$$

$$\text{即 } \sqrt{k+1} + \sqrt{k} = \sqrt{k-1} + \sqrt{k+2}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{两边同时平方, 得 } k+1+k+2 = \sqrt{k+1}\sqrt{k} + k-1+k+2+2\sqrt{k-1}\sqrt{k+2}.$$

$$\text{即 } (k+1)k = (k-1)(k+2).$$

因为 $k^2 + k = k^2 + k - 2$ 显然不成立, 与假设矛盾, 11 分

所以数列 $\{a_n\}$ 中不存在满足要求的连续三项. 12 分

20. 解: (1) 用 A, B, C 分别表示篮球, 羽毛球, 游泳三种运动项目, 用 $P_n(A), P_n(B), P_n(C) (n \in \mathbf{N}^*)$ 分别表示第 n 天小王进行 A, B, C 三种运动项目的概率. 1 分

因为小王第一天打羽毛球,

$$\text{所以第 2 天小王做三项运动的概率分别为 } P_2(A) = 0.3, P_2(B) = 0.1, P_2(C) = 0.6. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{第 3 天小王做三项运动的概率分别为 } P_3(A) = P_2(A) \times 0.5 + P_2(B) \times 0.3 + P_2(C) \times 0.3 = 0.36,$$

$$P_3(B) = P_2(A) \times 0.2 + P_2(B) \times 0.1 + P_2(C) \times 0.6 = 0.43,$$

$$P_3(C) = P_2(A) \times 0.3 + P_2(B) \times 0.6 + P_2(C) \times 0.1 = 0.21, \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

所以小王第三天打羽毛球的可能性最大. 5 分

(2) 小王从第一天打羽毛球开始,前三天的运动项目安排有: $BAA, BAB, BAC, BBA, BBB, BBC, BCA, BCB, BCC$ 共 9 种,

运动能量消耗总数用 X 表示,有 1200, 1300, 1400, 1500, 1600 共 5 种可能, ... 6 分
 $P(X=1200) = P(BBB) = 0.1 \times 0.1 = 0.01$,

$P(X=1300) = P(BAB) + P(BBA) = 0.3 \times 0.2 + 0.1 \times 0.3 = 0.09$,

$P(X=1400) = P(BAA) + P(BBC) + P(BCB) = 0.3 \times 0.5 + 0.1 \times 0.6 + 0.6 \times 0.6 = 0.57$,

$P(X=1500) = P(BAC) + P(BCA) = 0.3 \times 0.3 + 0.6 \times 0.3 = 0.27$,

$P(X=1600) = P(BCC) = 0.6 \times 0.1 = 0.06$, 9 分

所以小王从第一天打羽毛球开始,前三天参加体育运动能量消耗总数 X 的分布列为

X	1200	1300	1400	1500	1600
P	0.01	0.09	0.57	0.27	0.06

..... 10 分

能量消耗总数 X 的期望

$E(X) = 1200 \times 0.01 + 1300 \times 0.09 + 1400 \times 0.57 + 1500 \times 0.27 + 1600 \times 0.06 = 1428$ (卡) .

所以小王从第一天打羽毛球开始,前三天参加体育运动能量消耗总数 X 的期望为 1428 卡. 12 分

21. (1) 解: 因为 $f'(x) = \frac{1}{x} + a = \frac{ax+1}{x}$ ($x > 0$), 1 分

所以, 当 $a \geq 0$ 时, $f(1) = a + 1 > 0$ 不符合题意. 2 分

当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 得 $x > -\frac{1}{a}$; 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < -\frac{1}{a}$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, -\frac{1}{a})$ 上单调递增, 在区间 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减, 3 分

由题得 $f(-\frac{1}{a}) = \ln(-\frac{1}{a}) \leq 0$, 解得 $a \leq -1$ 4 分

所以 $a \leq -1$.

综上所述 $a \leq -1$ 5 分

(2) 证明: 设 $g(x) = f'(x) - \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$, 问题转化为 $g(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 上有唯一的零点, 6 分

由 $g(x) = f'(x) - \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{x} + a - \frac{\ln x_1 + ax_1 - \ln x_2 - ax_2}{x_1 - x_2}$, 易知 $g(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 上单调递减, 故函数 $g(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 上至多有 1 个零点, 7 分

由 $g(x_1) = f'(x_1) - \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{x_1} + a - \frac{\ln x_1 + ax_1 - \ln x_2 - ax_2}{x_1 - x_2} =$

$\frac{1}{x_1} - \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = \frac{1}{x_1 - x_2} \left(1 - \frac{x_2}{x_1} + \ln \frac{x_2}{x_1} \right)$,

同理, 得 $g(x_2) = \frac{1}{x_1 - x_2} \left(\frac{x_1}{x_2} - 1 + \ln \frac{x_2}{x_1} \right)$, 8 分

由 (1) 知, 当 $a = -1$ 时, $\ln x - x + 1 \leq 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号, 9 分

因为 $0 < x_1 < x_2$, 所以 $\frac{x_2}{x_1} > 1$,

所以 $\ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_2}{x_1} + 1 < 0$,

又因为 $x_1 - x_2 < 0$, 即 $\frac{1}{x_1 - x_2} < 0$, 所以 $g(x_1) > 0$, 10 分

因为 $0 < x_1 < x_2$, 所以 $0 < \frac{x_1}{x_2} < 1$,

所以 $\ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_1}{x_2} + 1 < 0$, 即 $\ln \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} - 1 > 0$,

又因为 $x_1 - x_2 < 0$, 即 $\frac{1}{x_1 - x_2} < 0$, 所以 $g(x_2) < 0$, 11 分

由函数零点存在定理知 $g(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 上有唯一的零点, 即存在唯一的 $x_0 \in (x_1, x_2)$, 使得 $f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ 成立. 12 分

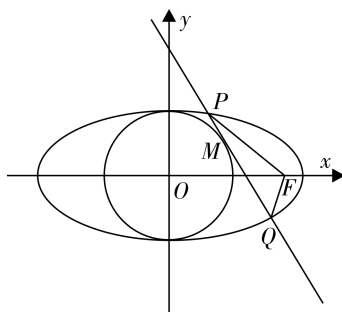
22. 解: (1) 由题可知 $c = \sqrt{3}$, 1 分

当点 M 在 x 轴上时, $|PQ| = \sqrt{3}$, 不妨设 $P(b, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 2 分

得 $\begin{cases} a^2 - b^2 = 3, \\ \frac{b^2}{a^2} + \frac{3}{4} = 1, \end{cases}$ 3 分

解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = 1. \end{cases}$ 所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 4 分

(2) 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,



则 $|PF| = \sqrt{(x_1 - \sqrt{3})^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{(x_1 - \sqrt{3})^2 + 1 - \frac{x_1^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - 2\right)^2} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1$.

同理 $|QF| = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2$, 5 分

$|PM| = \sqrt{OP^2 - b^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 1} = \sqrt{x_1^2 - \frac{x_1^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}|x_1|$.

同理 $|QM| = \frac{\sqrt{3}}{2}|x_2|$.

所以 $\triangle FPQ$ 的周长为

$$2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}|x_1| + \frac{\sqrt{3}}{2}|x_2| = 4 + \sqrt{3} \frac{|x_1| + |x_2| - x_1 - x_2}{2}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

①当直线 PQ 的斜率不存在时, PQ 的方程为 $x=1$ 或 $x=-1$.

PQ 的方程为 $x=1$ 时, 不妨设 P, Q 的坐标分别为 $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 此时 $\triangle FPQ$ 的周长为 4.

PQ 的方程为 $x=-1$ 时, 不妨设 P, Q 的坐标分别为 $\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 此时 $\triangle FPQ$ 的周长为 $4 + 2\sqrt{3}$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

②当直线 PQ 的斜率存在时, 设 PQ 的方程为 $y=kx+m$,

由直线 PQ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切, 得 $d = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$, 即 $m^2 = 1 + k^2$. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$\text{联立得} \begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \end{cases} \text{化简得 } (1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{8km}{1 + 4k^2}, \\ x_1x_2 = \frac{4m^2 - 4}{1 + 4k^2}. \end{cases} \text{易知 } \Delta > 0 \text{ 恒成立, } \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$x_1x_2 = \frac{4m^2 - 4}{1 + 4k^2} = \frac{4k^2}{1 + 4k^2} > 0, \text{ 即 } x_1, x_2 \text{ 同号,}$$

当 $x_1 + x_2 = -\frac{8km}{1 + 4k^2} > 0$ 时, 即 $km < 0$, 此时点 M 在 y 轴右侧, 所以 $x_1 > 0, x_2 > 0$.

此时 $\triangle FPQ$ 的周长 $= 4 + \sqrt{3} \frac{|x_1| + |x_2| - x_1 - x_2}{2} = 4$ 为定值. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

当 $x_1 + x_2 = -\frac{8km}{1 + 4k^2} < 0$ 时, 即 $km > 0$, 此时点 M 在 y 轴左侧, 所以 $x_1 < 0, x_2 < 0$.

此时 $\triangle FPQ$ 的周长 $= 4 + \sqrt{3} \frac{|x_1| + |x_2| - x_1 - x_2}{2} = 4 - \sqrt{3}(x_1 + x_2) = 4 + \frac{8\sqrt{3}km}{1 + 4k^2} =$

$$4 + \frac{8\sqrt{3}km}{m^2 + 3k^2} = 4 + \frac{8\sqrt{3}}{\frac{m}{k} + 3\frac{k}{m}}. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

因为 $km > 0$, 所以 $\frac{m}{k} + 3\frac{k}{m} \geq 2\sqrt{3}$, 当且仅当 $\frac{m}{k} = 3\frac{k}{m}$, 即 $\begin{cases} m = \frac{\sqrt{6}}{2}, \\ k = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m = -\frac{\sqrt{6}}{2}, \\ k = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ 时取

等号.

从而 $4 < 4 + \frac{8\sqrt{3}}{\frac{m}{k} + 3\frac{k}{m}} \leq 8$, 所以 $\triangle FPQ$ 周长的取值范围为 $(4, 8]$.

综上所述, $\triangle FPQ$ 周长的取值范围为 $[4, 8]$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$