福建省 2022 届高三诊断性测试

数学

本试卷共 4 页。满分 150 分。

注意事项：

1．答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设集合 $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\mid x^2-x-2\le 0\right\}$，$B=\{0,1,2,3\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{0,1\}$　　B．$\{0,1,2\}$　　C．$\{-1,0,1,2,3\}$　　D．$\{-2,-1,0,1,2,3\}$

2．$\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ 的展开式中的常数项为

A．-160　　B．-80　　C．80　　D．160

3．设复数 z_1,z_2,z_3 满足 $z_3\ne 0$，且 $|z_1|=|z_2|$，则

A．$z_1=\pm z_2$　　B．$z_1{}^2=z_2^2$　　C．$z_1\cdot z_3=z_2\cdot z_3$　　D．$|z_1\cdot z_3|=|z_2\cdot z_3|$

4．若 $a>0,b>0$，则“$a+b<2$”的一个必要不充分条件是

A．$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<1$　　B．$ab<1$　　C．$a^2+b^2<2$　　D．$\sqrt{a}<\sqrt{2-b}$

5．深度学习是人工智能的一种具有代表性的实现方法，它是以神经网络为出发点的．在神经网络优化中，指数衰减的学习率模型为 $L=L_0D^{\frac{G}{G_0}}$，其中 L 表示每一轮优化时使用的学习率，L_0 表示初始学习率，D 表示衰减系数，G 表示训练迭代轮数，G_0 表示衰减速度．已知某个指数衰减的学习率模型的初始学习率为 0.5，衰减速度为 22，且当训练迭代轮数为 22 时，学习率衰减为 0.45，则学习率衰减到 0.05 以下所需的训练迭代轮数至少为（参考数据：$\lg 2\approx 0.3010$，$\lg 3\approx 0.4771$）

A．11　　B．22　　C．227　　D．481

6．已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过 F 且倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的直线交 C 于 A，B 两点，线段 AB 中点的纵坐标为 $\sqrt{3}$，则 $|AB|=$

A．$\frac{8}{3}$　　B．4　　C．8　　D．24

7．关于函数 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)$，有下列四个命题：

甲：$f(x)$ 在 $\left(5\pi,\frac{27\pi}{5}\right)$ 单调递增；

乙：$-\frac{\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 的一个极小值点：

丙：$\frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 的一个极大值点；

丁：函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后所得图象关于 y 轴对称．

其中只有一个是假命题，则该命题是

A．甲　　B．乙　　C．丙　　D．丁

8．已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，且函数 $y=f(x+1)-1$ 是奇函数，当 $x<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\ln(1-2x)$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线方程是

A．$y=x-4$　　B．$y=x$　　C．$y=-2x+2$　　D．$y=-2x+6$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．“杂交水稻之父”袁隆平一生致力于杂交水稻技术的研究、应用与推广，创建了超级杂交稻技术体系，为我国粮食安全、农业科学发展和世界粮食供给作出了杰出贡献．某杂交水稻种植研究所调查某地水稻的株高，得出株高 ξ（单位：cm）近似服从正态分布 $N\left(100,10^2\right)$．已知 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 时，有 $P(|X-\mu|\le\sigma)\approx0.6827$，$P(|X-\mu|\le2\sigma)\approx0.9545$，$P(|X-\mu|\le3\sigma)\approx0.9973$．下列说法正确的是

A．该地水稻的平均株高约为 100cm　　B．该地水稻株高的方差约为 100

C．该地株高超过 110cm 的水稻约占 68.27%　　D．该地株高低于 130cm 的水稻约占 99.87%

10．若 α,β 满足 $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$，则 β 可以是

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{2}$　　C．$\frac{5\pi}{6}$　　D．π

11．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N，P 分别为棱 AB，CC_1，C_1D_1 的中点，$Q\in$ 平面 MNP，$B_1Q=AB$，直线 B_1Q 和直线 MN 所成角为 θ，则

A．$MN\parallel AC$　　B．θ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$

C．A，M，N，P 四点共面　　D．$PQ\parallel$ 平面 ACD_1

12．已知$\Delta A_nB_nC_n(n=1,2,3,\cdots)$是直角三角形，$A_n$是直角，内角$A_n,B_n,C_n$所对的边分别为$a_n,b_n,c_n$，面积为$S_n$，若$b_1=4$，$c_1=3$，$b_{n+1}^2=\dfrac{a_{n+1}^2+c_n^2}{3}$，$c_{n+1}^2=\dfrac{a_{n+1}^2+b_n^2}{3}$，则

A．$\{S_{2n}\}$是递增数列

B．$\{S_{2n=1}\}$是递减数列

C．$\{b_n-c_n\}$存在最大项

D．$\{b_n-c_n\}$存在最小项

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知$\vec{a}$，$\vec{b}$是不共线的两个单位向量，则$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}-\vec{b}$的夹角为________.

14．直线$y=a(x+2)$与曲线$x^2-y|y|=1$恰有 2 个公共点，则实数a的取值范围为________.

15．写出一个同时具有下列性质①②③的函数$f(x)=$________.

①定义域为$\mathbf{R}$；②值域为$(-\infty,1)$；③对任意$x_1,x_2\in(0,+\infty)$且$x_1\neq x_2$，均有$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$.

16.《缀术》是中国南北朝时期的一部算经，汇集了祖冲之和祖暅父子的数学研究成果.《缀术》中提出的“缘幂势既同，则积不容异”被称为祖暅原理，其意思是：如果两等高的几何体在同高处被截得的两截面面积均相等，那么这两个几何体的体积相等，该原理常应用于计算某些几何体的体积．如图，某个西晋越窑卧足杯的上下底为互相平行的圆面，侧面为球面的一部分，上底直径为$4\sqrt{6}\text{cm}$，下底直径为6cm，上下底面间的距离为3cm，则该卧足杯侧面所在的球面的半径是________cm；卧足杯的容积是________cm^3（杯的厚度忽略不计）.

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）已知等比数列$\{a_n\}$的首项为-2，前n项和为S_n，且S_{n+2},S_n,S_{n+1}成等差数列.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$，求数列$\{a_nb_n\}$的前 10 项和$T_{10}$ •（$[x]$表示不超过x的最大整数）

18.（12 分）冬季两项是第 24 届北京冬奥会的比赛项目之一，它把越野滑雪和射击两种特点不同的竞赛项目结合在一起．其中 20km 男子个人赛的规则如下：

①共滑行 5 圈（每圈 4km），前 4 圈每滑行 1 圈射击一次，每次 5 发子弹；

②射击姿势及顺序为：第 1 圈滑行后卧射，第 2 圈滑行后立射，第 3 圈滑行后卧射，第 4 圈滑行后立射，第 5 圈滑行直达终点；

③如果选手有 n 发子弹未命中目标，将被罚时 n 分钟；

④最终用时为滑雪用时、射击用时和被罚时间之和，最终用时少者获胜．

已知甲、乙两人参加比赛，甲滑雪每圈比乙慢 36 秒，甲、乙两人每发子弹命中目标的概率分别为 $\frac{4}{5}$ 和 $\frac{3}{4}$．假设甲、乙两人的射击用时相同，且每发子弹是否命中目标互不影响．

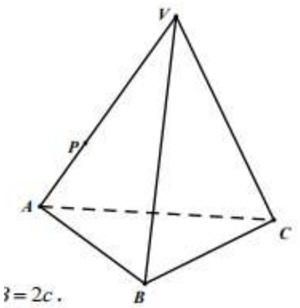
（1）若在前三次射击中，甲、乙两人的被罚时间相同，求甲胜乙的概率；

（2）若仅从最终用时考虑，甲、乙两位选手哪个水平更高？说明理由．

19.（12 分）如图，在三棱锥 $V-ABC$ 中，ΔVAB 和 ΔABC 均是边长为 4 的等边三角形．P 是棱 VA 上的点，$VP=\frac{2}{3}VA$，过 P 的平面 α 与直线 VC 垂直，且平面 $\alpha\bigcap$ 平面 $VAB=l$．

（1）在图中画出 l，写出画法并说明理由；

（2）若直线 VC 与平面 ABC 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$，求过 l 及点 C 的平面与平面 ABC 所成的锐二面角的余弦值．



20.（12 分）ΔABC 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a,b,c，$a=6$，$b+12\cos B=2c$．

（1）求 A 的大小；

（2）M 为 ΔABC 内一点，AM 的延长线交 BC 于点 D，________，求 ΔABC 的面积．

请在下列三个条件中选择一个作为已知条件补充在横线上，使 ΔABC 存在，并解决问题．

① M 为 ΔABC 的外心，$AM=4$；

② M 为 ΔABC 的垂心，$MD=\sqrt{3}$；

③ M 为 ΔABC 的内心，$AD=3\sqrt{3}$．

21．（12 分）已知椭圆C的中心为O，离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$．圆O在C的内部，半径为$\frac{\sqrt{6}}{3}$． P，Q分别为C和圆O上的动点，且P，Q两点的最小距离为$1-\frac{\sqrt{6}}{3}$．

（1）建立适当的坐标系，求C的方程；

（2）A，B是C上不同的两点，且直线AB与以OA为直径的圆的一个交点在圆O上．求证：以AB为直径的圆过定点．

22．（12 分）已知函数$f(x)=\ln x-\frac{a+1}{x}$， $g(x)=a(x-2)e^{1-x}-1$，其中$a\in\mathbf{R}$．

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）当$0<a<\frac{5}{3}$时，是否存在x_1,x_2，且$x_1\neq x_2$，使得$f\left(x_i\right)=g\left(x_i\right)(i=1,2)$？证明你的结论．

高三诊断性测试

数学参考答案及评分细则

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4．只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、选择题：本大题考查基础知识和基本运算。每小题 5 分，满分 40 分。

1．B　2．B　3．D　4．B　5．D　6．C　7．A　8．D

二、选择题：本大题考查基础知识和基本运算。每小题 5 分，满分 20 分。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．ABD　10．AC　11．BD　12．ACD

三、填空题：本大题考查基础知识和基本运算。每小题 5 分，满分 20 分。

13．$\frac{\pi}{2}$　14．$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$　15．答案不唯一，如：$f(x)=1-\frac{1}{2^x}$，$f(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{x},x>1,\\ x-1,x\leqslant 1\end{cases}$等；

16．5；54π．

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．本小题主要考查等差数列、等比数列、递推数列及数列求和等基础知识，考查运算求解能力、逻辑推理能力和创新能力等，考查化归与转化思想、分类与整合思想、函数与方程思想、特殊与一般思想等，考查逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性和创新性，满分 10 分.

解法一：（1）因为S_{n+2}，S_n，S_{n+1}成等差数列，所以$S_n-S_{n+2}=S_{n+1}-S_n$，

所以$-a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}$，

即$a_{n+2}=-2a_{n+1}$，设$\{a_n\}$的公比为q，则$q=-2$，

所以$a_n=-2\times(-2)^{n-1}=(-2)^n$.

（2）依题意，$b_{2k-1}=\left[\frac{2k-1+1}{2}\right]=k\left(k\in\mathbf{N}^*\right),b_{2k}=\left[\frac{2k+1}{2}\right]=k\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$，

所以$T_{10}=\left(a_1b_1+a_3b_3+\cdots+a_9b_9\right)+\left(a_2b_2+a_4b_4+\cdots+a_{10}b_{10}\right)$

$=\left(a_1+2a_3+\cdots+5a_9\right)+\left(a_2+2a_4+\cdots+5a_{10}\right)$

$=\left(a_1+2a_3+\cdots+5a_9\right)-2\left(a_1+2a_3+\cdots+5a_9\right)$

$=-\left(a_1+2a_3+\cdots+5a_9\right)$

$=1\times2+2\times2^3+\cdots+5\times2^9$

所以$4T_{10}=1\times2^3+2\times2^5+\cdots+5\times2^{11}$，

两式相减得$-3T_{10}=2+2^3+2^5+\cdots+2^9-5\times2^{11}=\dfrac{2\times\left(1-4^5\right)}{1-4}-5\times2^{11}=-\dfrac{14}{3}\times2^{11}-\dfrac{2}{3}$，

所以$T_{10}=\dfrac{14}{9}\times2^{11}+\dfrac{2}{9}=3186$.

解法二：（1）因为S_{n+2},S_n,S_{n+1}成等差数列，所以$S_{n+1}+S_{n+2}=2S_n$，

设$\left\{a_n\right\}$的公比为q，

①若$q=1$，则$a_n=-2$，$S_n=-2n$，$S_{n+1}+S_{n+2}=-4n-6$，$2S_n=-4n$，所以$S_{n+1}+S_{n+2}\neq2S_n$，

与$S_{n+1}+S_{n+2}=2S_n$矛盾，不合题意；

②若$q\neq1$，则$S_n=\dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$，$S_{n+1}=\dfrac{a_1\left(1-q^{n+1}\right)}{1-q}$，$S_{n+2}=\dfrac{a_1\left(1-q^{n+2}\right)}{1-q}$，

所以$\dfrac{a_1\left(1-q^{n+1}\right)}{1-q}+\dfrac{a_1\left(1-q^{n+2}\right)}{1-q}=\dfrac{2a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$，整理得，$q^{n+1}+q^{n+2}=2q^n$，即$q^2+q-2=0$，

解得$q=1$（舍去）或$q=-2$，

所以$a_n=-2\times(-2)^{n-1}=(-2)^n$.

（2）依题意，$b_{2k-1}=\left[\dfrac{2k-1+1}{2}\right]=k\left(k\in\mathbf{N}^*\right),b_{2k}=\left[\dfrac{2k+1}{2}\right]=k\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$，

所以$T_{10}=\left(a_1b_1+a_2b_2\right)+\left(a_3b_3+a_4b_4\right)+\left(a_5b_5+a_6b_6\right)+\left(a_7b_7+a_8b_8\right)+\left(a_9b_9+a_{10}b_{10}\right)$

$=\left(a_1+a_2\right)+2\left(a_3+a_4\right)+3\left(a_5+a_6\right)+4\left(a_7+a_8\right)+5\left(a_9+a_{10}\right)$

$=1\times\left[(-2)+(-2)^2\right]+2\times\left[(-2)^3+(-2)^4\right]+3\left[(-2)^5+(-2)^6\right]+4\left[(-2)^7+(-2)^8\right]+5\times\left[(-2)^9+(-2)^{10}\right]$

$=1\times2+2\times2^3+3\times2^5+4\times2^7+5\times2^9$

$=2+16+96+512+2560$

$=3186$.

解法三：（1）因为S_{n+2},S_n,S_{n+1}成等差数列，所以$2S_n=S_{n+2}+S_{n+1}$，

当$n=1$时，$2S_1=S_3+S_2$，化简得$a_3=-2a_2$，

设$\{a_n\}$的公比为q，所以$q=-2$，

当$q=-2$时，$S_n=\dfrac{-2-(-2)^{n+1}}{3}$因此$2S_n=\dfrac{2\left[-2-(-2)^{n+1}\right]}{3}$，

$$S_{n+2}+S_{n+1}=\frac{-2-(-2)^{n+3}}{3}+\frac{-2-(-2)^{n+2}}{3}=\frac{-4+(-2)^{n+2}}{3}=\frac{2\left[-2-(-2)^{n+1}\right]}{3},$$

满足$2S_n=S_{n+2}+S_{n+1}$，故$q=-2$符合题意.

所以$a_n=-2\times(-2)^{n-1}=(-2)^n$.

（2）依题意，$b_1=1,b_2=1,b_3=2,b_4=2,b_5=3,b_6=3,b_7=4,b_8=4,b_9=5,b_{10}=5$，

所以$T_{10}=-2+(-2)^2+2\times(-2)^3+2\times(-2)^4+3\times(-2)^5+3\times(-2)^6+4\times(-2)^7+4\times(-2)^8+5\times(-2)^9+5\times(-2)^{10}$

$=\left[-2+(-2)^2\right]+2\times\left[(-2)^3+(-2)^4\right]+3\times\left[(-2)^5+(-2)^6\right]+4\times\left[(-2)^7+(-2)^8\right]+5\times\left[(-2)^9+(-2)^{10}\right]$

$=2+2^4+3\times2^5+4\times2^7+5\times2^9$

$=2+16+96+512+2560$

$=3186$.

18．本小题主要考查独立事件的概率、互斥事件的概率，二项分布、数学期望等基础知识；考查数学建模能力，运算求解能力，逻辑推理能力，创新能力以及阅读能力等；考查统计与概率思想、分类与整合思想等；考查数学抽象，数学建模和数学运算等核心素养；体现应用性和创新性．满分 12 分.

解法一：（1）甲滑雪用时比乙多$5\times36=180$秒=3 分钟，因为前三次射击，甲、乙两人的被罚时间相同，所以在第四次射击中，甲至少要比乙多命中 4 发子弹.

设“甲胜乙”为事件 A，“在第四次射击中，甲有 4 发子弹命中目标，乙均未命中目标”为事件B，

“在第四次射击中，甲有 5 发子弹命中目标，乙至多有 1 发子弹命中目标”为事件C，

依题意，事件B和事件C是互斥事件，$\mathrm{A}=\mathrm{B}+\mathrm{C}$，

$P(\mathrm{B})=C_5^1\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^4\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^5$，$P(\mathrm{C})=\left(\dfrac{4}{5}\right)^5\times\left[\left(\dfrac{1}{4}\right)^5+C_5^1\left(\dfrac{1}{4}\right)^4\times\dfrac{3}{4}\right]$，

所以，$P(\mathrm{A})=P(\mathrm{B})+P(\mathrm{C})=\dfrac{69}{12500}$.

即甲胜乙的概率为$\dfrac{69}{12500}$.

（2）依题意得，甲选手在比赛中未击中目标的子弹数为X，乙选手在比赛中未击中目标的子弹数为Y，则

$X \sim B\left(20,\dfrac{1}{5}\right)$，$Y \sim B\left(20,\dfrac{1}{4}\right)$，

所以甲被罚时间的期望为$1\times EX = 1\times 20\times\dfrac{1}{5}=4$（分钟），

乙被罚时间的期望为$1\times EY = 1\times 20\times\dfrac{1}{4}=5$（分钟），

又在赛道上甲选手滑行时间慢 3 分钟，所以甲最终用时的期望比乙多 2 分钟.

因此，仅从最终用时考虑，乙选手水平更高.

解法二：（1）同解法一.

（2）设甲在一次射击中命中目标的子弹数为ξ，则$\xi \sim B\left(5,\dfrac{4}{5}\right)$，所以$E\xi = 5\times\dfrac{4}{5}=4$，所以甲在四次射击中命中目标的子弹数的期望为$4E\xi = 16$，

设乙在一次射击中命中目标的子弹数为η，则$\eta \sim B\left(5,\dfrac{3}{4}\right)$，所以$E\eta = 5\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{15}{4}$，所以乙在四次射击中命中目标的子弹数的期望为$4E\eta = 15$，

所以在四次射击中，甲命中目标的子弹数的期望比乙多 1，所以乙被罚时间的期望比甲多 1 分钟，又因为在赛道上甲的滑行时间比乙慢 3 分钟，所以甲最终用时的期望比乙多 2 分钟，

因此，仅从最终用时考虑，乙选手水平更高.

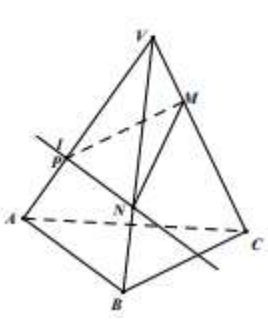
19．本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，直线与平面所成角、二面角等基础知识；考查空间想象能力，逻辑推理能力，运算求解能力等；考查化归与转化思想，数形结合思想，函数与方程思想等；考查直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性和综合性．满分 12 分.

解法一：（1）如图，在ΔVAC内过P作$PM \perp VC$，垂足为M，在ΔVBC内过M作$MN \perp VC$交VB于N，连结PN，则直线PN即为直线l.

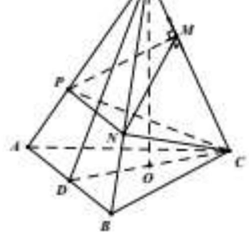
理由如下：因为$PM \perp VC$，$MN \perp VC$，$PM \cap MN = M$，所以$VC \perp$平面PMN，

由于过空间一点与已知直线垂直的平面有且只有一个，所以平面PMN与平面α重合，

因为平面$PMN \cap$平面$VAB = PN$，所以直线PN即为直线l.



（2）因为ΔVAB和ΔABC均为等边三角形，所以$VA = VB$，$AC = BC$，又因为$VC = VC$，所以$\Delta VAC \cong \Delta VBC$，所以$\angle PVM = \angle NVM$，又$VM = VM$，所以



$\mathrm{Rt}\Delta VPM \cong \mathrm{Rt}\Delta VMM$，所以$VP=VN$，所以$VN=\dfrac{2}{3}VB$．如图，设$AB$的中点为$D$，连结$VD$，$CD$，

因为ΔVAB和ΔABC均为等边三角形，

所以$VA=VB$，$AC=BC$，所以$AB\perp VD$，$AB\perp CD$，

又因为$VD\bigcap CD=D$，所以$AB\perp$平面VCD，因为$AB\subset$平面ABC，

所以平面$ABC\perp$平面VCD．

在ΔVCD中，作$VO\perp CD$，垂足为O，

因为平面$ABC\bigcap$平面$VCD=CD$，$VO\subset$平面VCD，

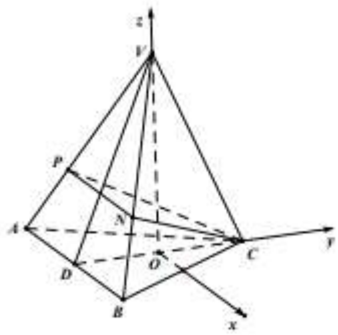
所以$VO\perp$平面ABC，

所以$\angle VCD$是直线VC与平面ABC所成的角，所以$\angle VCD=\dfrac{\pi}{3}$．

因为ΔVAB和ΔABC均是边长为4的等边三角形，所以$VD=DC=2\sqrt{3}$，

所以ΔVCD是等边三角形，所以$VO=3$，$DO=OC=\sqrt{3}$．

以O为原点，分别以$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OV}$的方向为y轴和z轴正方向建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$，



则$A(-2,-\sqrt{3},0),B(2,-\sqrt{3},0),C(0,\sqrt{3},0),V(0,0,3)$，

所以$\overrightarrow{CV}=(0,-\sqrt{3},3),\overrightarrow{CA}=(-2,-2\sqrt{3},0),\overrightarrow{AB}=(4,0,0)$，

$\overrightarrow{CP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CV}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CA}=\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{5\sqrt{3}}{3},1\right),\overrightarrow{PN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{8}{3},0,0\right)$．

过l及点C的平面为平面CPN，

设平面CPN的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{CP}\cdot\vec{n}=0,\\ \overrightarrow{PN}\cdot\vec{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}y+z=0,\\ \dfrac{8}{3}x=0.\end{cases}$取$\vec{n}=(0,\sqrt{3},5)$，

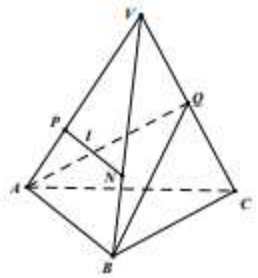
即平面CPN的一个法向量为$\vec{n}=(0,\sqrt{3},5)$．

易知，平面ABC的一个法向量为$\vec{m}=(0,0,1)$，所以$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$，

所以过l及点C的平面与平面ABC所成的锐二面角的余弦值为$\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$．

解法二：（1）如图，在ΔVAB内过P作$PN\,/\!/\,AB$，交VB于N，则直线PN即为直线l．

理由如下：取VC的中点Q，连结AQ，BQ，



因为ΔVAB和ΔABC均为等边三角形，

所以$VA=AC$，$VB=BC$，所以$VC\perp AQ$，$VC\perp BQ$，

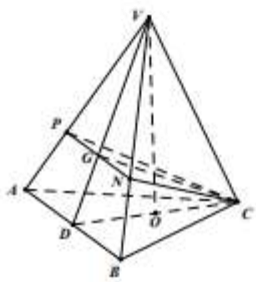
又因为$AQ\bigcap BQ=Q$，所以$VC\perp$平面ABQ，

又因为$VC\perp$平面α，所以平面α∥平面ABQ，

又因为平面$\alpha\bigcap$平面$VAB=l$，平面$ABQ\bigcap$平面$VAB=AB$，

所以AB∥l，所以直线PN即为直线l.

（2）由（1）知，PN∥AB，因为$VP=\dfrac{2}{3}VA$，所以$VN=\dfrac{2}{3}VB$.



设AB的中点为D，连结VD，交PN于G，连结CG，
因为ΔVAB和ΔABC均为等边三角形，
所以$VA=VB$，$AC=BC$，所以$AB\perp VD$，$AB\perp CD$，
又因为$VD\bigcap CD=D$，
所以$AB\perp$平面VCD，$AB\subset$平面ABC，
所以平面$ABC\perp$平面VCD.
在ΔVCD中，作$VO\perp CD$，垂足为O，
因为平面$ABC\bigcap$平面$VCD=CD$，$VO\subset$平面VCD，所以$VO\perp$平面ABC，

所以$\angle VCD$是直线VC与平面ABC所成的角，所以$\angle VCD=\dfrac{\pi}{3}$，

因为ΔVAB和ΔABC均是边长为 4 的等边三角形，所以$VD=DC=2\sqrt{3}$，$\angle VDC=\dfrac{\pi}{3}$，

因为AB∥PN，所以$DG=\dfrac{1}{3}DV=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. 由（1）知，过$l$及点$C$的平面为平面$CPN$，

因为$AB\not\subset$平面CPN，$PN\subset$平面CPN，所以AB∥平面CPN，
设平面$CPN\bigcap$平面$ABC=l'$，因为$AB\subset$平面ABC，所以AB∥l'，
因为$AB\perp$平面VCD，$CG\subset$平面VCD，$CD\subset$平面VCD，所以$AB\perp CG$，$AB\perp CD$，
所以$CG\perp l'$，$CD\perp l'$，又因为$CG\subset$平面CPN，$CD\subset$平面ABC，
所以$\angle GCD$为平面CPN与平面ABC所成的锐二面角的平面角，

在ΔGCD中，由余弦定理得，$CG^2=DG^2+DC^2-2DG\cdot DC\cdot\cos\angle GDC$，$CG=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$，

所以$\cos\angle GCD=\dfrac{CG^2+DC^2-DG^2}{2CG\cdot DC}=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$，

所以过l及点C的平面与平面ABC所成的锐二面角的余弦值为$\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$.

20．本小题主要考查正弦定理、余弦定理及三角恒等变换等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力等，考查化归与转化思想、函数与方程思想、数形结合思想等，考查数学运算、逻辑推理等核心素养，体现基础性和综合性，满分 12 分．

解法一：（1）在 ΔABC 中，由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，又因为 $a=6$，$b+12\cos B=2c$，

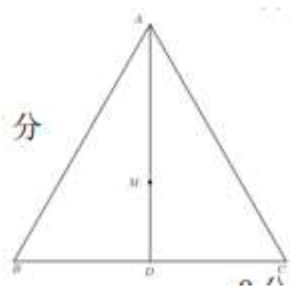
所以 $b+12\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=2c$，整理得 $b^2+c^2-36=bc$．

在 ΔABC 中，由余弦定理得 $b^2+c^2-36=2bc\cos A$，所以 $bc=2bc\cos A$，即 $\cos A=\dfrac{1}{2}$

又因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$．

（2）选③．

因为 M 为 ΔABC 的内心，所以 $\angle BAD=\angle CAD=\dfrac{1}{2}\angle BAC=\dfrac{\pi}{6}$，



由 $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta ACD}$，

得 $\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}c\cdot AD\sin\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}b\cdot AD\sin\dfrac{\pi}{6}$，

因为 $AD=3\sqrt{3}$，所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}bc=3\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}(b+c)$，即 $b+c=\dfrac{bc}{3}$．

由（1）可得 $b^2+c^2-36=bc$，即 $(b+c)^2-3bc=36$，所以 $\dfrac{(bc)^2}{9}-3bc-36=0$，即 $(bc+9)\left(\dfrac{bc}{9}-4\right)=0$，

又因为 $bc>0$，所以 $bc=36$，所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\times 36\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$．

解法二：（1）因为 $a=6$，$b+12\cos B=2c$，所以 $b+2a\cos B=2c$，

在 ΔABC 中，由正弦定理得 $\sin B+2\sin A\cos B=2\sin C$，

即 $\sin B+2\sin A\cos B=2\sin(A+B)$，

即 $\sin B+2\sin A\cos B=2\sin A\cos B+2\cos A\sin B$，

即 $\sin B=2\cos A\sin B$，

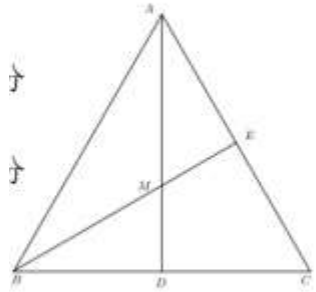
因为 $B\in(0,\pi)$，

所以 $\sin B\neq 0$，故 $\cos A=\dfrac{1}{2}$．

又因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$，

（2）选②．

因为M 为ΔABC的垂心，所以$\angle BMD=\dfrac{\pi}{2}-\angle MBD=\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{2}-\angle ACB\right)=\angle ACB$，又$MD=\sqrt{3}$，



所以在ΔMBD中，$BD=MD\cdot\tan\angle BMD=\sqrt{3}\tan\angle ACB$，

同理可得$CD=\sqrt{3}\tan\angle ABC$，

又因为$BD+CD=6$，所以$\sqrt{3}\tan\angle ABC+\sqrt{3}\tan\angle ACB=6$，即

$\tan\angle ABC+\tan\angle ACB=2\sqrt{3}$，

又因为在ΔABC中，$\tan(\angle ABC+\angle ACB)=-\tan\angle BAC=-\sqrt{3}$，

所以$\dfrac{\tan\angle ABC+\tan\angle ACB}{1-\tan\angle ABC\tan\angle ACB}=-\sqrt{3}$，因此$\tan\angle ABC\tan\angle ACB=3$.

故$\tan\angle ABC$，$\tan\angle ACB$为方程$x^2-2\sqrt{3}x+3=0$两根，即$\tan\angle ABC=\tan\angle ACB=\sqrt{3}$，

因为$\angle ABC$，$\angle ACB\in(0,\pi)$，所以$\angle ABC=\angle ACB=\dfrac{\pi}{3}$，所以$\Delta ABC$为等边三角形，

所以$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times 6^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$.

解法三：(1）同解法一.

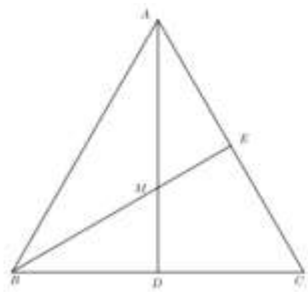
（2）选②.

因为M 为ΔABC的垂心，

所以$\angle AMB=\pi-\angle ACB$，$\angle ABM=\dfrac{\pi}{2}-\angle BAC=\dfrac{\pi}{6}$，

所以在ΔABM 中，由正弦定理得$\dfrac{AM}{\sin\angle ABM}=\dfrac{AB}{\sin\angle AMB}$，即$\dfrac{AM}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$.

又因为在ΔABC中，由正弦定理得$\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{BC}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$，



所以$\dfrac{AM}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{BC}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$因为$a=6$，所以$AM=2\sqrt{3}$.

又因为$MD=\sqrt{3}$，所以$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}a\cdot AD=\dfrac{1}{2}\times 6\times(2\sqrt{3}+\sqrt{3})=9\sqrt{3}$.

解法四：(1）同解法一.

（2）选③.

因为M 为ΔABC的内心，所以$\angle BAD=\angle CAD=\dfrac{1}{2}\angle BAC=\dfrac{\pi}{6}$.

在ΔABD中，由正弦定理得$\dfrac{BD}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{AD}{\sin B}$，因为$AD=3\sqrt{3}$，所以$2BD=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin B}$，

同理可得$2CD=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin C}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)}$.

又因为$BD+CD=6$，所以$\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin B}+\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)}=12$，

即$4\sin B\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\left[\sin B+\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$，

即$4\sin B\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\left(\sin B+\dfrac{1}{2}\sin B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)$，

即$4\sin B\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)=3\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

即$4\sin\left[\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{\pi}{6}\right]\sin\left[\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\pi}{6}\right]=3\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

即 $4\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{1}{2}\cos\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)\right]\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}\cos\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)\right]=3\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

即$4\left[\dfrac{3}{4}\sin^2\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{1}{4}\cos^2\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)\right]=3\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

即$4\sin^2\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)-3\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)-1=0$，即$\left[\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)-1\right]\left[4\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)+1\right]=0$，

因为$A=\dfrac{\pi}{3}$，所以$0<B<\dfrac{2\pi}{3}$，所以$B+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$，

所以$\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)>0$，故$\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$，

即$B+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即$B=\dfrac{\pi}{3}$，所以$\Delta ABC$为等边三角形，

所以$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times 6^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$.

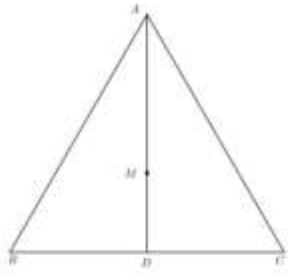
解法五：（1）同解法一.

（2）选③.

因为M 为ΔABC的内心，所以$\angle BAD=\angle CAD=\dfrac{1}{2}\angle BAC=\dfrac{\pi}{6}$． 又因为$AD=3\sqrt{3}$，

在ΔABD中，由余弦定理得$BD^2=c^2+27-2\times3\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}c=c^2-9c+27$，

同理可得$CD^2=b^2-9b+27$.



又因为$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}}{\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot AD\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{AB}{AC}$，

所以$\dfrac{c^2-9c+27}{b^2-9b+27}=\dfrac{c^2}{b^2}$，即$(b-c)[3(b+c)-bc]=0$，

故$b=c$或$b+c=\dfrac{bc}{3}$.

（i）当$b=c$时，ΔABC为等边三角形，所以$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times6^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$.

（ii）当$b+c=\dfrac{bc}{3}$时，由（1）知$b^2+c^2-36=bc$，即$(b+c)^2-3bc=36$，

所以$\dfrac{(bc)^2}{9}-3bc-36=0$，即$(bc+9)\left(\dfrac{bc}{9}-4\right)=0$，

因为$bc>0$，所以$bc=36$.

又因为$A=\dfrac{\pi}{3}$，所以$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\times36\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$.

综上所述，$S_{\Delta ABC}=9\sqrt{3}$.

说明：设ΔABC的外接圆半径为R，则在ΔABC中，由正弦定理得$2R=\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{6}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=4\sqrt{3}$，即$R=2\sqrt{3}$，

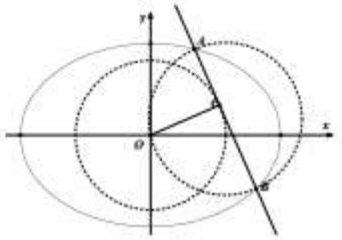
因为M 为外心，所以$AM=2\sqrt{3}$，与$AM=4$盾，故不能选①.

21．本小题主要考查椭圆的标准方程及简单几何性质，直线与圆、椭圆的位置关系，平面向量等基础知识；考查运算求解能力，逻辑推理能力，直观想象能力和创新能力等；考查数形结合思想，函数与方程思想，化归与转化思想等；考查直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性，综合性与创新性．满分 12 分．

解法一：（1）以O为坐标原点，椭圆C的长轴、短轴所在直线分别为x轴、y轴，建立平面直角坐标系，如图.

设椭圆的长半轴为a，短半轴为b，半焦距为c，

依题意得$\begin{cases}\frac{c}{a}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ b-\frac{\sqrt{6}}{3}=1-\frac{\sqrt{6}}{3}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=1\\ c=1\end{cases}$，



所以C的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）因为直线AB与以OA为直径的圆的一个交点在圆O上，所以直线AB与圆O相切.

（i）当直线AB垂直于x轴时，不妨设$A\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，$B\left(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，

此时$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，所以$OA\perp OB$，故以$AB$为直径的圆过点$O$.

（ii）当直线AB不垂直于x轴时，设直线AB的方程为$y=kx+m$，$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$.

因为AB与圆O相切，所以O到直线AB的距离$\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，即$3m^2-2k^2-2=0$.

由$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$得$\left(2k^2+1\right)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，所以$x_1+x_2=\frac{-4km}{2k^2+1},x_1x_2=\frac{2m^2-2}{2k^2+1}$，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+\left(kx_1+m\right)\left(kx_2+m\right)=\left(1+k^2\right)x_1x_2+km\left(x_1+x_2\right)+m^2$$

$$=\left(1+k^2\right)\left(\frac{2m^2-2}{2k^2+1}\right)+km\left(\frac{-4km}{2k^2+1}\right)+m^2$$

$$=\frac{\left(1+k^2\right)\left(2m^2-2\right)+km(-4km)+m^2\left(2k^2+1\right)}{2k^2+1}$$

$$=\frac{3m^2-2k^2-2}{2k^2+1}=0,$$

所以$OA\perp OB$，故以AB为直径的圆过点O.

综上，以AB为直径的圆过点O.

解法二：（1）同解法一.

（2）因为直线AB与以OA为直径的圆的一个交点在圆O上，所以直线AB与圆O相切.

设直线AB与圆O相切于点$M(x_0,y_0)$.

（i）当 $y_0=0$ 时，直线 AB 垂直于 x 轴，不妨设 $A\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right),B\left(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，

此时 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，所以 $OA\perp OB$，故以 AB 为直径的圆过点 O.

（ii）当 $y_0\neq 0$ 时，直线 AB 的方程为 $y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}\left(x-x_0\right)$，因为 $x_0{}^2+y_0{}^2=\frac{2}{3}$，

所以直线 AB 的方程为 $y=-\frac{x_0}{y_0}x+\frac{2}{3y_0}$.

设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，由 $\begin{cases} y=-\frac{x_0}{y_0}x+\frac{2}{3y_0} \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$，得 $\left(18x_0^2+9y_0^2\right)x^2-24x_0x+8-18y_0^2=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{24x_0}{18x_0^2+9y_0^2},x_1x_2=\frac{8-18y_0^2}{18x_0^2+9y_0^2}$，

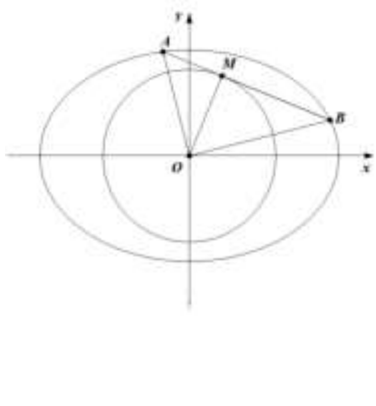
因为 $x_0^2+y_0^2=\frac{2}{3}$，所以 $x_1+x_2=\frac{24x_0}{6+9x_0^2},x_1x_2=\frac{18x_0^2-4}{6+9x_0^2}$，

$$|OA|^2+|OB|^2-|AB|^2=\left(|OM|^2+|AM|^2\right)+\left(|OM|^2+|BM|^2\right)-(|AM|+|BM|)^2$$

$$=2|OM|^2-2|AM||BM|=\frac{4}{3}-2|AM||BM|$$

$$=\frac{4}{3}-2\left[\sqrt{1+\left(-\frac{x_0}{y_0}\right)^2}\left|x_2-x_0\right|\right]\cdot\sqrt{1+\left(-\frac{x_0}{y_0}\right)^2}\left|x_0-x_1\right|\Bigg]$$

$$=\frac{4}{3}-2\left[1+\left(-\frac{x_0}{y_0}\right)^2\right]\left[-x_1x_2+\left(x_1+x_2\right)x_0-x_0^2\right]$$



$$=\frac{4}{3}-2\left[1+\left(-\frac{x_0}{y_0}\right)^2\right]\left(-\frac{18x_0^2-4}{6+9x_0^2}+\frac{24x_0^2}{6+9x_0^2}-x_0^2\right)$$

$$=\frac{4}{3}-2\left(1+\frac{x_0^2}{\frac{2}{3}-x_0^2}\right)\left(-\frac{18x_0^2-4}{6+9x_0^2}+\frac{24x_0^2}{6+9x_0^2}-x_0^2\right)$$

$$=\frac{4}{3}-2\cdot\frac{2}{2-3x_0^2}\cdot\frac{4-9x_0^4}{6+9x_0^2}$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}$$

$=0$.

所以$|OA|^2+|OB|^2=|AB|^2$，即$OA\perp OB$，故以AB为直径的圆过点O.

综上，以AB为直径的圆过点O.

解法三：（1）同解法一.

（2）因为直线AB与以OA为直径的圆的一个交点在圆O上，所以直线AB与圆O相切.

（i）当直线AB不垂直于x轴时，设直线AB的方程为$y=kx+m$，$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$.

因为AB与圆O相切，所以O到直线AB的距离$\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，即$3m^2-2k^2-2=0$.

由$\begin{cases}y=kx+m,\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$得$\left(2k^2+1\right)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，

所以$x_1+x_2=\dfrac{-4km}{2k^2+1},x_1x_2=\dfrac{2m^2-2}{2k^2+1}$，

$y_1+y_2=k\left(x_1+x_2\right)+2m=\dfrac{2m}{2k^2+1}$，

$y_1y_2=\left(kx_1+m\right)\left(kx_2+m\right)=k^2x_1x_2+mk\left(x_1+x_2\right)+m^2=\dfrac{m^2-2k^2}{2k^2+1}$，

$x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{2m^2-2}{2k^2+1}+\dfrac{m^2-2k^2}{2k^2+1}=\dfrac{3m^2-2k^2-2}{2k^2+1}=0$.

设$P(x,y)$是以AB为直径的圆N上的任意一点，由$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，得$\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)+\left(y-y_1\right)\left(y-y_2\right)=0$，

化简得$x^2+y^2-\left(x_1+x_2\right)x-\left(y_1+y_2\right)y+x_1x_2+y_1y_2=0$，

故圆N的方程为$x^2+y^2+\dfrac{4km}{2k^2+1}x-\dfrac{2m}{2k^2+1}y=0$，它过定点$O$.

（ii）当直线AB垂直于x轴时，不妨设$A\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right),B\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$，

此时$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，所以$OA\perp OB$，故以$AB$为直径的圆过点$O$.

综上，以AB为直径的圆过点O.

解法四：（1）同解法一.

（2）因为直线AB与以OA为直径的圆的一个交点在圆O上，所以直线AB与圆O相切.

（i）当直线AB不垂直于x轴时，设直线AB的方程为$y=kx+m$，$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$.

因为 AB 与圆 O 相切，所以 O 到直线 AB 的距离 $\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，即 $3m^2-2k^2-2=0$．

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$，得 $\left(2k^2+1\right)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{-4km}{2k^2+1}, x_1x_2=\frac{2m^2-2}{2k^2+1}$，

$y_1+y_2=k\left(x_1+x_2\right)+2m=\frac{2m}{2k^2+1}$，

以 AB 为直径的圆 N 的圆心为 $N\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$，即 $\left(\frac{-2km}{2k^2+1},\frac{m}{2k^2+1}\right)$.

半径 $r=\frac{|AB|}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\left|x_2-x_1\right|$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{1+k^2}}{2}\cdot\sqrt{\frac{16k^2m^2}{\left(2k^2+1\right)^2}-\frac{8m^2-8}{2k^2+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{1+k^2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{16k^2-8m^2+8}}{2k^2+1}=\frac{\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{4k^2-2m^2+2}}{2k^2+1},$$

以 AB 为直径的圆的方程为 $\left(x+\frac{2km}{2k^2+1}\right)^2+\left(y-\frac{m}{2k^2+1}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{4k^2-2m^2+2}}{2k^2+1}\right)^2$，

整理得 $x^2+y^2+\frac{4km}{2k^2+1}x-\frac{2m}{2k^2+1}y=0$，故以 AB 为直径的圆过定点 O．

（ii）当直线 AB 垂直于 x 轴时，不妨设 $A\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right),B\left(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，

此时 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，所以 $OA\perp OB$，故以 AB 为直径的圆过点 O．

综上，以 AB 为直径的圆过点 O．

22．本小题主要考查导数，函数的单调性、零点、不等式等基础知识；考查逻辑推理能力，直观想象能力，运算求解能力和创新能力等；考查函数与方程思想，化归与转化思想，分类与整合思想等；考查逻辑推理，直观想象，数学运算等核心素养；体现基础性、综合性和创新性．满分 12 分．

解法一：（1）依题意，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

由 $f(x)=\ln x-\frac{a+1}{x}(a\in\mathbf{R})$，得 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{a+1}{x^2}=\frac{x+a+1}{x^2}$，

①当 $a\geq -1$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

②当 $a<-1$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=-a-1$，

当 $x\in(0,-a-1)$ 时， $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,-a-1)$ 单调递减；

当 $x\in(-a-1,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-a-1,+\infty)$ 单调递增；

综上，当 $a\geq -1$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

当 $a<-1$ 时， $f(x)$ 在 $(0,-a-1)$ 单调递减，在 $(-a-1,+\infty)$ 单调递增.

（2）设 $h(x)=f(x)-g(x)$，则 $h'(x)=f'(x)+a(x-3)\mathrm{e}^{1-x}=\dfrac{x+a+1}{x^2}+\dfrac{a(x-3)}{\mathrm{e}^{x-1}}$，

①当 $x\geq 3$ 时，$h'(x)>0$ 恒成立，所以 $h(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 单调递增，

又因为 $0<a<\dfrac{5}{3}$，所以 $h(3)=\ln 3-\dfrac{a+1}{3}-\dfrac{a}{\mathrm{e}^2}+1>\ln 3-\dfrac{a}{\mathrm{e}^2}>1-\dfrac{a}{\mathrm{e}^2}>0$，

所以 $h(x)>0$， $h(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 不存在零点；

②当 $0<x<3$ 时，设 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{x-1}-x$，则 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-1$，

当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减；

当 $1<x<3$ 时，$\varphi'(x)>0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(1,3)$ 单调递增；

所以 $\varphi(x)\geq\varphi(1)=0$，即 $\mathrm{e}^{x-1}\geq x$，因为 $x>0$，所以 $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x-1}}\leq\dfrac{1}{x}$，

又因为 $0<a<\dfrac{5}{3}$ 且 $0<x<3$，所以 $a(x-3)<0$，所以 $\dfrac{a(x-3)}{\mathrm{e}^{x-1}}\geq\dfrac{a(x-3)}{x}$，

所以 $h'(x)\geq\dfrac{x+a+1}{x^2}+\dfrac{a(x-3)}{x}=\dfrac{ax^2+(1-3a)x+a+1}{x^2}$，

当 $0<a\leq\dfrac{1}{3}$ 时，函数 $\delta(x)=ax^2+(1-3a)x+a+1$ 的对称轴为 $x=\dfrac{3a-1}{2a}\leq 0$，

所以 $\delta(x)$ 在 $(0,3)$ 单调递增，所以 $\delta(x)>\delta(0)=a+1>0$，

所以 $h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,3)$ 单调递增；

当 $\dfrac{1}{3}<a<\dfrac{5}{3}$ 时，$\Delta=(1-3a)^2-4a(a+1)=5a^2-10a+1\leq-\dfrac{16}{9}<0$，

所以 $\delta(x)>0$，所以 $h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,3)$ 单调递增；

综上可知，当 $0<a<\dfrac{5}{3}$ 时，均有 $h(x)$ 在 $(0,3)$ 单调递增，

又因为 $h(1)=-a-1+a+1=0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,3)$ 恰有一个零点 1，

故当 $0<a<\dfrac{5}{3}$ 时，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 恰有一个零点 1，

因此不存在 x_1, x_2，且 $x_1 \neq x_2$，使得 $f\left(x_i\right) = g\left(x_i\right)(i=1,2)$.

解法二：（1）同解法一；

（2）记 $F(x) = f(x) - g(x)$，则 $F(x) = \ln x - \dfrac{a+1}{x} - a(x-2)\mathrm{e}^{1-x} + 1$，

则 $F'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{a+1}{x^2} + a(x-3)\mathrm{e}^{1-x} = \dfrac{(x+a+1)\mathrm{e}^x + a\mathrm{e}(x-3)x^2}{x^2\mathrm{e}^x}$，

记 $h(a) = (x+a+1)\mathrm{e}^x + a\mathrm{e}(x-3)x^2 = \left[\mathrm{e}^x + \mathrm{e}(x-3)x^2\right]a + (x+1)\mathrm{e}^x$，

设 $\varphi(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}x$，则 $\varphi'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}$，

当 $0 < x < 1$ 时，$\varphi'(x) < 0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减；

当 $x > 1$ 时，$\varphi'(x) > 0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增；

所以 $\varphi(x) \geq \varphi(1) = 0$，即 $\mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}x$，

所以，$h\left(\dfrac{5}{3}\right) = \left(x + \dfrac{8}{3}\right)\mathrm{e}^x + \dfrac{5}{3}\mathrm{e}(x-3)x^2 \geq \left(x + \dfrac{8}{3}\right)\mathrm{e}x + \dfrac{5}{3}\mathrm{e}(x-3)x^2 = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}x\left(5x^2 - 12x + 8\right)$，

因为 $\Delta = 12^2 - 4\times5\times8 = -16 < 0$，所以 $5x^2 - 12x + 8 > 0$，所以 $h\left(\dfrac{5}{3}\right) > 0$，

又 $h(0) = (x+1)\mathrm{e}^x > 0$

所以当 $0 < a < \dfrac{5}{3}$，$x > 0$ 时，$h(a) > 0$，

所以 $F'(x) > 0$，$F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又因为 $F(1) = 0$，

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有 1 个零点 1，

因此不存在 x_1, x_2 且 $x_1 \neq x_2$，使得 $f\left(x_i\right) = g\left(x_i\right)(i=1,2)$. 12 分

解法三：（1）同解法一；

（2）设 $h(x) = f(x) - g(x)$，则 $h'(x) = f'(x) + a(x-3)\mathrm{e}^{1-x} = \dfrac{x+a+1}{x^2} + \dfrac{a(x-3)}{\mathrm{e}^{x-1}}$，

①当 $x \geq 3$ 时，$h'(x) > 0$ 恒成立，所以 $h(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 单调递增，

又因为 $0 < a < \dfrac{5}{3}$，所以 $h(3) = \ln 3 - \dfrac{a+1}{3} - \dfrac{a}{\mathrm{e}^2} + 1 > \ln 3 - \dfrac{a}{\mathrm{e}^2} > 1 - \dfrac{a}{\mathrm{e}^2} > 0$，

所以 $h(x) > 0$，$h(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 不存在零点；

②当 $0 < x < 3$ 时，设 $\varphi(x) = \mathrm{e}^{x-1} - x$，则 $\varphi'(x) = \mathrm{e}^{x-1} - 1$，

当$0<x<1$时，$\varphi'(x)<0$，所以$\varphi(x)$在$(0,1)$单调递减；

当$1<x<3$时，$\varphi'(x)>0$，所以$\varphi(x)$在$(1,3)$单调递增；

所以$\varphi(x)\ge\varphi(1)=0$，即$e^{x-1}\ge x$，因为$x>0$，所以$\frac{1}{e^{x-1}}\le\frac{1}{x}$，

又因为$0<a<\frac{5}{3}$且$0<x<3$，所以$a(x-3)<0$，所以$\frac{a(x-3)}{e^{x-1}}\ge\frac{a(x-3)}{x}$，

所以$h'(x)\ge\frac{x+a+1}{x^2}+\frac{a(x-3)}{x}=\frac{a\left(x^2-3x+1\right)+x+1}{x^2}$，

设$\delta(a)=a\left(x^2-3x+1\right)+x+1$，则$\delta(0)=x+1>0$，

$$\delta\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}\left(x^2-3x+1\right)+x+1=\frac{5x^2-12x+8}{3}=\frac{5\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}{3}>0,$$

所以$\delta(a)>0$，所以$h'(x)>0$，

综上可知，当$0<a<\frac{5}{3}$时，均有$h(x)$在$(0,3)$单调递增，

又因为$h(1)=-a-1+a+1=0$，所以$h(x)$在$(0,3)$恰有一个零点1，

故当$0<a<\frac{5}{3}$时，$h(x)$在$(0,+\infty)$恰有一个零点1，

因此不存在x_1,x_2，且$x_1\ne x_2$，使得$f\left(x_i\right)=g\left(x_i\right)(i=1,2)$．