变式教学在高中数学教学中的应用分析

吴　莺
江苏省常熟梅李高级中学　215500

[摘　要] 新一轮课改以来，传统教学理念受到了不少诟病. 变式教学与当前教育教学理念相吻合，实现了新课程所设置的诸多教学目标，具有一定的研究价值. 文章认为，变式教学需做到以下几点：课堂民主，改变单一式传输的课堂现状；教师主导，立足于变式示范的教学样态；有效互动，实现共同发展的有效载体. 这样做能够培养学生的创新思维能力，实现变式教学的育人价值.

[关键词] 高中数学；新课程；变式教学；思考

不少高中生对数学持有“爱恨交织”的情感，“爱”是源于其在高考中的重要地位而“不得不爱”，“恨”则是源于对数学的枯燥、抽象而“爱不起来”. 无论是改变学生对数学根深蒂固的枯燥而抽象的看法，还是扭转学生对数学的负面情感，抑或是提升教学的有效性和培养高阶思维能力，我们教师都需要转变观念、改造课堂.

“变式教学”作为一个很好的研究方向，它不仅与当前的教育教学理念相吻合，还可以提升学生的学习兴趣、减轻学生的学业负担，培养创新思维能力，为学生理解数学知识、理解数学思想方法和提升数学能力助力. 本文以实例为载体，从变式教学中的课堂民主、教师主导和有效互动三个方面谈起，对变式教学在高中数学教学中的应用进行分析，以期实现变式教学的育人价值.

课堂民主：改变单一式传输的课堂现状

当前，仍然有相当一部分教师坚持传统教学方式，对变式教学模式的课堂操作生硬，使得课堂得不到良好的转型. 事实上，变式教学作为一种伴随时代潮流发展而诞生的新型教学模式，需要教师去革新教学方法，以此来凸显教学本质，从而有效突破原有数学思维的禁锢，改变传统教学中单一式传输的教学现状，使新的教学理念与新时代的教学要求相符.

那么，教学方法革新的首要任务是什么？笔者认为，要转变传统教学现状，首先需创设和谐的课堂氛围，凸显学生的主体地位，还民主于学生，从而点燃学生的创造力和想象力，达成共识、共享、共进，实现共同发展和教学相长，为变式教学的展开提供广阔的空间，为打造理想的开放式课堂奠定良好的基础.

教师主导：立足于变式示范的教学样态

什么是变式教学？按照通常说法，它是指教师从学习内容和具体学情出发，不断变化设计命题，而学生从这些命题中可以独立探索，自行发现知识和结论，并举一反三的一种教学方法. 这样的释义似乎将教师“教”的一面近乎弃而不顾，让课堂落入学生个人探究为主的旧套，完全违背了高中用时紧张而无法腾出充足思考时间的课堂教学实情，使得一部分习惯于“接受”的学生学而无获. 因此，通过教师主导下的“变式地教”，是开展变式教学的重要方式，为学生提供良好的变式示范，让学生模仿到思考和探究的策略与方法，为培养学生发现能力、探究能力和创新意识提供很好的指导.

例1： 已知抛物线$y=ax^2(a>0)$，过其焦点F作一条直线，并与抛物线交于点P，Q. 若PF的长为p，QF的长为q，那么$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$等于(　　)

A. $4a$　B. $\frac{1}{4a}$　C. $2a$　D. $\frac{1}{2a}$

分析： 基于解题技巧，在读题和审题之后认为，可以通过特例法来解决这道选择题. 变形抛物线方程为$x^2=\frac{1}{a}y$，取$PQ\perp y$轴，则有$p=q=\frac{PQ}{2}=\frac{1}{2a}$，则$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=4a$，故本题选A.

变式1：(题型变式为填空题)

已知抛物线$y^2=2px(p>0)$，过其焦点F的一条直线与抛物线交于点P，Q. 若PF的长为m，QF的长为n，那么$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=$__________.

分析： 经过读题和审题，同样地，也可通过特例法来解决这道填空题. 取

作者简介：吴莺(1986-)，本科学历，一级教师，主要从事数学工作或研究，曾获常熟市学科带头人，常熟市把握学科能力(解题竞赛)一等奖等荣誉.

$PQ\perp x$轴，则有$P\left(\frac{p}{2},p\right)$，$Q\left(\frac{p}{2},-p\right)$，则$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{p}$.

变式2：（题型变式为证明题）

已知抛物线$y^2=2px(p>0)$，过其焦点F的一条直线与抛物线交于点P,Q. 若PF的长为m，QF的长为n，试证明：$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{p}$.

分析：本题可结合焦半径公式与韦达定理进行证明，具体证明过程如下：

①当$PQ\perp x$轴时，易得证.

②当PQ不垂直于x轴时，设PQ方程为$y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)$，代入方程$y^2=2px$，可得$k^2x^2-(pk^2+2p)x+\frac{p^2k^2}{4}=0$. 设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，基于焦半径公式与韦达定理，可得$m+n=p+(x_1+x_2)=p+\frac{p(k^2+2)}{k^2}$，$mn=\frac{p^2}{2}+\frac{p^2(k^2+2)}{2k^2}$，则$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{m+n}{mn}=\frac{2}{p}$.

变式3：（变式推广到圆锥曲线）

如图1所示，已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，过其右焦点$F$作一条直线与抛物线交于点$P,Q$. 若$PF$的长为$m$，$FQ$的长为$n$，试求出$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的值.

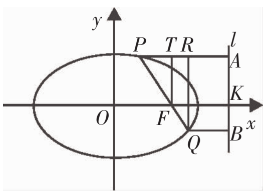

图1

解：可设$m>n$，分别过点P,Q作右准线l的垂线，点A,B为垂足，分别过点Q,F作PA的垂线，点R,T为垂足.

因为$\triangle QRP\backsim\triangle FTP$，所以$\frac{QP}{FP}=\frac{RP}{TP}$.

又因为$RP=PA-QB=\frac{m}{e}-\frac{n}{e}=\frac{m-n}{e}$，$TP=PA-FK=\frac{m}{e}-p$，且$p$为焦点到对应的准线距离，所以$\frac{m+n}{m}=\frac{m-n}{m-ep}$，$ep(m+n)=2mn$，所以$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{ep}$.

思考：继续联想该结论还在哪个曲线中可以成立？请试着进行变式.（经过合作探究，学生一致认为可以在抛物线、椭圆和双曲线中统一结论$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{ep}$，并生成以下变式4）

变式4：已知一圆锥曲线，过其焦点F作一条直线与圆锥曲线交于点P,Q. 若PF的长为m，FQ的长为n，p为焦点到对应的准线距离，则有$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{ep}$.

以上案例中，教师将教材内容设计为变式题组的形式，并富有创意地、阶梯式地设计各个变式问题. 在经历三次变式示范后，引导学生继续联想和推导，将问题置于曲线之中进行系统分析，从而生成变式问题并解答. 在日常教学中，经常性地开展变式示范教学，可以为学生掌握变式的策略和方法提供有效指导，使得教师的变式示范与学生的自主探究交织前行，可以有效地培养学生的数学发现能力，提升学生的数学核心素养.

有效互动：实现共同发展的有效载体

在学生解决变式问题的过程中，会面临各种不同程度的问题，此时教师情感与精神层面的激励则具有勉励之效，可以大大提升学生的学习热情，点燃自我超越的火花，释放出巨大的内在潜能，从而增强思维的创造性. 因此，在变式教学的实施过程中，不仅需要教师创设民主和谐的课堂氛围，还需点燃学生学习和探究的热情. 通过积极的变式问题情境，引发学生的互动交流，使其不断积累探究思维活动经验；通过积极参与和合作交流，流淌出更多好的思考方式，促进学生的数学探究和发现的能力得以自然提升；通过数学精神的不断渗透，促进学生“情”与“智”的协调发展，升华学生的数学素养，实现师生的共同发展.

例2：已知数列$\{a_n\}$中，有$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，请写出$\{a_n\}$的前4项.

本题较为简单，学生解决起来得心应手，能快速建立起解题信心. 笔者拾级而上，抛出以下变式.

变式1：已知数列$\{a_n\}$中，有$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，请求出$a_{2014}$的值.

分析：若类比例2中解题方式去逐一探求，显然是不可行的，那此处就需进一步思考数列$\{a_n\}$的通项，进而有了以下变式.

变式2：已知数列$\{a_n\}$中，有$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，请求出其通项$a_n$.（教室里的气氛慢慢热烈起来，学生间展开了讨论. 经过一段时间后，出现了多种解法展示的精彩场面）

解法1：（递推转化法）

据$a_{n+1}=2a_n+1$，即$a_n=2a_{n-1}+1$，可得$a_{n+1}-a_n=2(a_n-a_{n-1})$，$a_2=2a_1+1=3$，$a_2-a_1=2$，据此可得，$\{a_{n+1}-a_n\}$是首项为$a_2-a_1=2$、公比为2的等比数列，从而有$a_n=2^n-1$.

解法2：（待定系数法）

设$a_{n+1}+\lambda=2(a_n+\lambda)$，则$a_{n+1}=2a_n+\lambda$，对比$a_{n+1}=2a_n+1$后，可得$\lambda=1$，即$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，据此可得，$\{a_n+1\}$是首项为$a_1+1=2$、公比为2的等比数列，从而有$a_n=2^n-1$.

解法3：（方程法）

据解法1可得$a_n-a_{n-1}=2\times2^{n-2}$，$a_n=2a_{n-1}+1$，再联立方程组即可求得$a_n=2^n-1$.

有了以上多种多样的解法，再去解决变式1则简单多了. 此时在教师的触碰下，学生绽放出夺目的思维火花，笔者适时抓住，并借机更进一步地进行了如下变式：

变式3：已知数列$\{a_n\}$中，有$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n-3^n(n\in\mathbf{N}^*)$，请求出其通项$a_n$.

有了以上解法的启迪，学生很快生成如下解法：令$a_{n+1}+\lambda\cdot3^{n+1}=2(a_n+\lambda\cdot3^n)$，则$a_{n+1}=2a_n-\lambda\cdot3^n$，对比$a_{n+1}=2a_n-3^n$后，可得$\lambda=1$，即$a_{n+1}+3^{n+1}=2(a_n+3^n)$，据此可得，$\{a_n+3^n\}$是首项为4、公比为2的等比数列，从而有$a_n+3^n=4\times2^{n-1}$，$a_n=2^{n+1}-3^n$.

教师在变式教学中，将研究性学习引入教学，让教师的“主导”与学生的“主体”交相辉映，从而在教师的不断触碰下，连绵不断地绽放思维火花，使得学生获得成功的体验，助学生扬起数学之帆遨游在知识的海洋之中，实现共同发展.

总之，变式教学不仅是一种教学方式，也是一种教学技艺，长期以来，变式教学对教学的促进作用是有目共睹的. 教师只有把握好教学内容的本质，掌握好变式的方法和节奏，不断挖掘出变式教学的创新模式，才能使得学生的兴趣更加浓郁，思维更加活跃，打造和谐数学课堂，更好地发挥数学教育在育人方面的价值.