2022年湖北省七市（州）高三年级3月联合统一调研测试

数学

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合$P=\left\{x\middle|x\geq 1，x\in \mathrm{N}\right\}$，$Q=\left\{x\middle|2^x\leq 8\right\}$，则$P\bigcap Q=$（　　）

A. $\{x|1\leq x<4\}$　　B. $\{x|1\leq x<3\}$　　C. {1，2}　　D. {1，2，3}

【答案】D

【解析】

【分析】先化简集合Q，再去求$P\bigcap Q$即可解决.

【详解】$Q=\left\{x\middle|2^x\leq 8\right\}=\left\{x\middle|x\leq 3\right\}$

则$P\cap Q=\left\{x\middle|x\geq 1，x\in \mathrm{N}\right\}\cap\left\{x\middle|x\leq 3\right\}=\{1,2,3\}$

故选：D

2. 欧拉公式$\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$（e为自然对数的底数，i为虚数单位）由瑞士数学家*Euler*（欧拉）首先发现.它将指数函数的定义域扩大到复数，建立了三角函数和指数函数的关系，被称为“数学中的天桥”，则$\mathrm{e}^{i\pi}=$（　　）

A　-1　　B. 1　　C. -i　　D. i

【答案】A

【解析】

【分析】根据题已知中欧拉公式$\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，直接计算可得答案.

【详解】由题意得：$\mathrm{e}^{i\pi}=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=-1$，

故选：A

3. 抛物线$y^2=2px$（$p>0$）上一点M（3，y）到焦点F的距离$|MF|=4$，则抛物线的方程为（　　）

A. $y^2=8x$　　B. $y^2=4x$　　C. $y^2=2x$　　D. $y^2=x$

【答案】B

【解析】

【分析】根据抛物线的焦半径公式，求得p的值，即可得答案.

【详解】由题意可得：$|MF|=x_M+\frac{p}{2}$ ，

则$3+\frac{p}{2}=4, p=2$ ，故抛物线方程为$y^2=4x$ ，

故选:B

4. 某学校高一年级、高二年级、高三年级的人数分别为1600，1100，800，现用分层抽样的方法从高一年级、高二年级、高三年级抽取一个学生样本测量学生的身高.如果在这个样本中，有高一年级学生32人，且测得高一年级、高二年级、高三年级学生的平均身高分别为160cm，165cm，170cm.则下列说法正确的是（　　）

A. 高三年级抽取的学生数为32人

B. 高二年级每个学生被抽取到的概率为$\frac{1}{100}$

C. 所有年级中，高一年级每个学生被抽取到的概率最大

D. 所有学生的平均身高估计要小于165cm

【答案】D

【解析】

【分析】根据分层抽样的概念、分层抽样的概率、均值的概念判断.

【详解】根据分层抽样的定义，高三抽取的学生数为$\frac{800}{1600}\times 32=16$，A错；

分层抽样中每个个体被抽取的概率相等，均为$\frac{32}{1600}=\frac{1}{50}$，B错，C错；

平均身高为$\frac{1600}{3500}\times 160+\frac{1100}{3500}\times 165+\frac{800}{3500}\times 170\approx 163.9$（cm）,D正确.

故选：D.

5. 函数$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$，先把函数$f(x)$的图像向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位，再把图像上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，得到函数$g(x)$的图像，则下列说法错误的是（　　）

A. 函数$g(x)$是奇函数，最大值是2

B. 函数$g(x)$在区间$\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$上单调递增

C. 函数$g(x)$的图像关于直线$x=\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in Z)$对称

D. π是函数$g(x)$的周期

【答案】B

【解析】

【分析】化简函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，再计算得函数 $g\left(x\right)=2\sin 2x$，利用正弦函数的性质计算最大值，周期，根据整体法计算单调性与对称轴.

【详解】$f\left(x\right)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\left(\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，把函数 $f\left(x\right)$ 的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位，得 $y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sin x$，再把图像上各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$，得 $g\left(x\right)=2\sin 2x$，所以可知 $g\left(x\right)$ 是奇函数，最大值是 2，最小正周期为 π，当 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，得 $-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\le x\le\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z$，所以函数 $g\left(x\right)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减，$2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in Z\right)$，得 $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\left(k\in Z\right)$，所以函数的对称轴为 $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in Z\right)$ 也满足，所以错误的选项为 BC

故选：BC.

6. 已知 $|\overrightarrow{AB}|=3,|\overrightarrow{BC}|=2,|\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}|=6,$ 则 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}|=$（　　）

A. 4　　　　B. $\sqrt{10}$　　　　C. 10　　　　D. 16

【答案】B

【解析】

【分析】根据条件，利用模的平方可求出 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值，再将 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}|$ 变形并平方，即可求得答案.

【详解】由 $|\overrightarrow{AB}|=3,|\overrightarrow{BC}|=2,|\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}|=6$，

可得 $\left|\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}\right|^2=\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}\right)^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+9|\overrightarrow{BC}|^2-6\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=36$，

即 $9+36-6|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|=36,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{3}{2}$，

所以 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}|^2=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=10$，

故 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}|=\sqrt{10}$，

故选：B

7. 已知 $a=e^{-0.02}$，b=0.01，c=ln1.01，则（　　）

A. $c>a>b$　　　　B. $b>a>c$　　　　C. $a>b>c$　　　　D. $b>c>a$

【答案】C

【解析】

【分析】根据指数函数的性质判断a,b，构造函数$f(x)=e^x-1-x$，由导数确定单调性得$f(0.01)>f(0)$，再由对数性质得b,c大小，从而得结论..

【详解】由指数函数的性质得：$e^{-0.02}>e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>0.01$，

设$f(x)=e^x-1-x$，则$f'(x)=e^x-1>0$在$x>0$时恒成立，

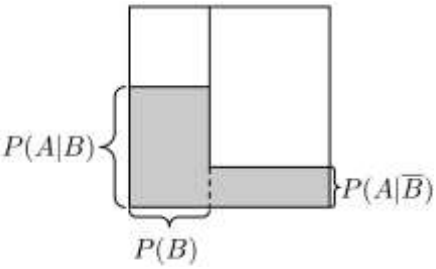
所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，$f(x)$是连续函数，因此$f(x)$在$[0,+\infty)$上是增函数，

所以$f(0.01)>f(0)$，即$e^{0.01}-1-0.01>0$，即$e^{0.01}>1.01$，所以$0.01>\ln 1.01$，

所以$a>b>c$.

故选：C.

8. 若将整个样本空间想象成一个 1×1 的正方形，任何事件都对应样本空间的一个子集，且事件发生的概率对应子集的面积.则如图所示的涂色部分的面积表示（　　）



A. 事件A发生的概率　　B. 事件B发生的概率

C. 事件B不发生条件下事件A发生的既率　　D. 事件A、B同时发生的概率

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意结合条件概率的公式，推出阴影部分的面积，可得其含义，即得答案.

【详解】由题意可知：

阴影部分面积为：$P(A|B)\cdot P(B)+P(A|\overline{B})\cdot(1-P(B))=P(AB)+P(A|\overline{B})\cdot P(\overline{B})$

$=P(AB)+P(A\overline{B})=P(A)$，

故选：A

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x)=|x|+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x$，则下列说法正确的是（　　）

A. $f(x)$ 是偶函数

B. $f(x)$ 在（0，+∞）上单调递减

C. $f(x)$ 是周期函数

D. $f(x)\geq -1$ 恒成立

【答案】AD

【解析】

【分析】判定 $f(x)$ 的奇偶性判断选项 A；判定 $f(x)$ 的单调性判断选项 B；判定 $f(x)$ 的周期性判断选项 C；求得 $f(x)$ 的最小值判断选项 D.

【详解】 $f(x)$ 的定义域为 R

$f(-x)=|-x|+|-x|^{\frac{1}{2}}-\cos(-x)=|x|+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=f(x)$，

则 $f(x)$ 为偶函数.故选项 A 判断正确；

$x>0$ 时， $f(x)=x+\sqrt{x}-\cos x$

$f'(x)=1+\dfrac{\sqrt{x}}{2x}+\sin x\geq 0$ 恒成立，则 $f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上增函数.

故选项 B 判断错误；选项 C 判断错误；

又 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)$ 为 $(-\infty,0)$ 上减函数

又 $f(0)=0+0-\cos 0=-1$，则 $f(x)$ 的最小值为 -1.故选项 D 判断正确；

故选：AD

10. 尽管目前人类还无法准确预报地震，但科学家经过研究，已经对地震有所了解，例如，地震时释放的能量 E（单位：焦耳）与地震里氏震级 M 之间的关系为 $\lg E=4.8+1.5M$，则下列说法正确的是（　　）

A. 地震释放的能量为 $10^{15.3}$ 焦耳时，地震里氏震级约为七级

B. 八级地震释放的能量约为七级地震释放的能量的 6.3 倍

C. 八级地震释放的能量约为六级地震释放的能量的 1000 倍

D. 记地震里氏震级为 n（n=1，2，…，9，10），地震释放的能量为 a_n，则数列$\{a_n\}$是等比数列

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据所给公式，结合指对互化原则，逐一分析各个选项，即可得答案.

【详解】对于 A：当 $E=10^{15.3}$ 时，由题意得 $\lg 10^{15.3}=4.8+1.5M$，

解得 $M=7$，即地震里氏震级约为七级，故 A 正确；

对于 B：八级地震即 $M=8$ 时，$\lg E_1=4.8+1.5\times 8=16.8$，解得 $E_1=10^{16.8}$，

所以 $\dfrac{E_1}{E}=\dfrac{10^{16.8}}{10^{15.3}}=10^{1.5}>10\neq 6.3$，

所以八级地震释放的能量约为七级地震释放的能量的 $10^{1.5}$ 倍，故 B 错误；

对于 C：六级地震即 $M=6$ 时，$\lg E_2=4.8+1.5\times 6=13.8$，解得 $E_2=10^{13.8}$，

所以 $\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{10^{16.8}}{10^{13.8}}=10^3=1000$，

即八级地震释放的能量约为六级地震释放的能量的 1000 倍，故 C 正确；

对于 D：由题意得 $\lg a_n=4.8+1.5n$（n=1，2，…，9，10），

所以 $a_n=10^{4.8+1.5n}$，所以 $a_{n+1}=10^{4.8+1.5(n+1)}=10^{6.3+1.5n}$

所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{10^{6.3+1.5n}}{10^{4.8+1.5n}}=10^{1.5}$，即数列$\{a_n\}$是等比数列，故 D 正确；

故选：ACD

11. 已知直线 $l:kx-y-k+1=0$，圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y+2)^2=16$，则下列选项正确的是（　　）

A. 直线 l 与圆一定相交

B. 当 k=0 时，直线 l 与圆 C 交于两点 M，N，点 E 是圆 C 上的动点，则 $\triangle MNE$ 面积的最大值为 $3\sqrt{7}$

C. 当 l 与圆有两个交点 M，N 时，$|MN|$的最小值为 $2\sqrt{6}$

D. 若圆 C 与坐标轴分别交于 A，B，C，D 四个点，则四边形 $ABCD$ 的面积为 48

【答案】AC

【解析】

【分析】由直线过定点在圆内判断 A，由圆上点到直线的距离的最大值，求得三角形面积最大值判断 B，当定点与圆心连线垂直于直线 l 时，弦长最短，由勾股定理计算可得弦长，判断 C，求出圆与坐标轴的交点坐标，由面积公式计算面积判断 D.

【详解】直线 $l:kx-y-k+1=0$ 过定点 $P(1,1)$，$(1-2)^2+(1+2)^2<16$，P 在圆内，因此直线 l 一定与圆相交，A 正确；

$k=0$ 时，直线为 $y=1$，代入圆方程得 $(x-2)^2+9=16$，$x=2\pm\sqrt{7}$，因此 $|MN|=2\sqrt{7}$，

圆心为 $C(2,-2)$，圆半径为 $r=4$，圆心到直线 l 的距离为 $d=3$，因此 E 到直线 l 的距离的最大值为

$h=4+3=7$，$\triangle MNE$ 的面积最大值为 $S=\dfrac{1}{2}\times 7\times 2\sqrt{7}=7\sqrt{7}$，B 错；

当 l 与圆有两个交点 M，N 时，$|MN|$的最小时，$PC\perp l$，$|PC|=\sqrt{(1-2)^2+(1+2)^2}=\sqrt{10}$，

因此 $|MN|_{\min}=2\sqrt{4^2-(\sqrt{10})^2}=2\sqrt{6}$，C 正确；

在圆方程 $(x-2)^2+(y+2)^2=16$ 中分别令 $x=0$ 和 $y=0$ 可求得圆与坐标轴的交点坐标为

$A(2-2\sqrt{3},0),B((2+2\sqrt{3},0),C(0,-2+2\sqrt{3}),D(0,-2-2\sqrt{3})$，

$|AB|=4\sqrt{3}$，$|CD|=4\sqrt{3}$，四边形 $ABCD$ 面积为 $S'=\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 4\sqrt{3}=24$，D 错.

故选：AC.

12. 已知三棱锥 S-ABC 的底面是边长为 a 的正三角形，$SA\perp$ 平面 ABC，P 为平面 ABC 内部一动点（包括边界）.若 $SA=\dfrac{a}{2}$，SP 与侧面 SAB，侧面 SAC，侧面 SBC 所成的角分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，点 P 到 AB，AC，BC 的距离分别为 d_1,d_2,d_3，那么（　　）

A. $\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}+\sqrt{d_3}$ 为定值

B. $d_1+d_2+d_3$ 为定值

C. 若 $\sin\alpha_1,\sin\alpha_3,\sin\alpha_2$ 成等差数列，则 d_1+d_2 为定值

D. 若 $\sin\alpha_1,\sin\alpha_3,\sin\alpha_2$ 成等比数列，则 $\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}$ 为定值

【答案】BCD

【解析】

【分析】由等面积法 $S_{\triangle ABP}+S_{\triangle ACP}+S_{\triangle BCP}=S_{\triangle ABC}$ 计算判断选项 AB，由等体积法 $V_{P-SAB}+V_{P-SAC}+V_{P-SBC}=V_{S-ABC}$ 计算，并结合等差中项与等比中项的性质，判断选项 CD.

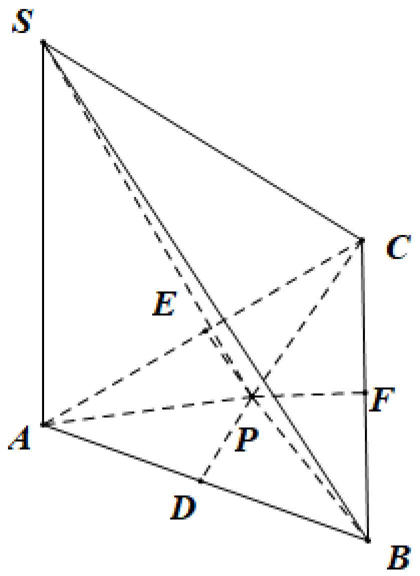
【详解】如图，作 $PD\perp AB,PE\perp AC,PF\perp BC$，由题意，根据等面积法可得 $S_{\triangle ABP}+S_{\triangle ACP}+S_{\triangle BCP}=S_{\triangle ABC}$，即 $\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot d_1+\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot d_2+\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot d_3=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，得 $d_1+d_2+d_3=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，所以 $d_1+d_2+d_3$ 为定值，B 正确；因为 $SA\perp$ 平面 ABC，所以 $SA\perp PE,SA\perp PD$，又因为 $PD\perp AB,PE\perp AC$，$SA\cap AB=A,SA\cap AC=A$，所以 $PD\perp$ 平面 SAB，$PE\perp$ 平面 SAC，设点 P 到平面 SBC 的距离为 h，

由等体积法可知，$V_{P-}\ +_S\ V_{A-}\ {}_B+\ V_{P}$，即

$\dfrac{1}{3}\cdot d_1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot a+\dfrac{1}{3}\cdot d_2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot a+\dfrac{1}{3}\cdot h\cdot\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot a=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，得 $d_1+d_2+2h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，因为

$\sin\alpha_1=\dfrac{d_1}{SP},\sin\alpha_2=\dfrac{d_2}{SP},\sin\alpha_3=\dfrac{h}{SP}$，若 $\sin\alpha_1$ $\sin\alpha_3$ $\sin\alpha_2$ 成等差数列，即 $2\sin\alpha_3=\sin\alpha_1+\sin\alpha_2\Rightarrow 2h=d_1+d_2$，所以 $d_1+d_2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$ 为定值，C 正确；若 $\sin\alpha_1,\sin\alpha_3,\sin\alpha_2$ 成等比数列，即 $\sin^2\alpha_3=\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\Rightarrow h^2=d_1\cdot d_2$，所以 $\left(\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}\right)^2=d_1+2\sqrt{d_1d_2}+d_2=d_1+2h+d_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ 为定值，D 正确；

故选：BCD



【点睛】一般关于三棱锥体积计算一是可以考虑通过空间向量的方法，写出点的坐标，计算底面积与点到底面的距离，代入棱锥的体积公式计算，二是可以通过等体积法，通过换底换高或者分为多个小三棱锥的和计算；

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知函数 $f(x)=a\sqrt{x}+\ln x$ $x=1$ 处取得极值，则实数 $a=$________.

【答案】-2

【解析】

【分析】求出导函数 $f'(x)$，由 $f'(1)=0$ 求得 a 值，并检验此时 $x=1$ 是极值点.

【详解】$\because$ $f(x)=a\sqrt{x}+\ln x,x>0$

$\therefore$ $f'(x)=\dfrac{a}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}$，则 $f'(1)=\dfrac{a}{2}+1=0$，$a=-2$，

当 $a=-2$ 时，$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}=\frac{1-\sqrt{x}}{x}$，

$0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，$x>1$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极值，

所以实数 $a=-2$.

故答案为：-2.

14 若 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{1}{3}$，则 $\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=$__________.

【答案】$\frac{\sqrt{2}}{3}$

【解析】

【分析】利用两角差的正弦公式化简得 $\cos\theta-\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$，再利用二倍角公式代入化简计算 $\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$.

【详解】$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta-\sin\theta)=\frac{1}{3}$，得 $\cos\theta-\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$，所以 $\cos\theta+\sin\theta\neq$ ，所以

$$\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=\cos\theta-\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{3}$.

15. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的右焦点 F 关于它的一条渐近线的对称点在另一条渐近线上，则双曲线 C 的离心率为__________.

【答案】2

【解析】

【分析】设双曲线的右焦点为 $F(c,0)$，求出渐近线方程，设 F 关于 $y=\frac{b}{a}x$ 的对称点为 $(m,-\frac{b}{a}m)$，由中点坐标公式和两直线垂直的条件列出方程，化简整理可得 a，b 的关系，再由离心率公式，计算即可得到所求结果.

【详解】双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 的右焦点为 $F(c,0)$，

渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，

设 F 关于 $y=\frac{b}{a}x$ 的对称点为 $(m,-\frac{b}{a}m)$，

由题意可得 $\frac{\frac{bm}{a}}{c-m}=-\frac{a}{b}$，(*)

且 $\frac{1}{2}(0-\frac{b}{a}m)=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}(m+c)$，

可得 $m=-\frac{1}{2}c$，代入(*)可得 $b^2=3a^2$，

故 $c^2=a^2+b^2=4a^2$，

则离心率 $e=\frac{c}{a}=2$，

故答案为：2．

16. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 的动直线 l 交 C 于 A,B 两点，过 A,B 分别作 C 的切线 l_1，l_2，l_1 与 l_2 交于点 P．经探究可知点 P 必在一条定直线上，其方程为________；记 l_1，l_2 与 y 轴的交点分别为 M,N，若 l 的倾斜角为 30°，则四边形 $PMFN$ 的面积为______.

【答案】 ① $x=-1$ ②. 4

【解析】

【分析】设 $l:x=ty+1$，与抛物线方程联立可得韦达定理形式；结合导数知识可求得 l_1,l_2 方程，由此可求得 P 点横坐标恒为 -1，由此可得定直线 $x=-1$；由 l_1,l_2 方程可求得 M,N 坐标，结合韦达定理可求得 $|MN|$，由 $S=S_{\triangle PMN}+S_{\triangle FMN}$ 可求得结果.

【详解】由抛物线方程知：$F(1,0)$，

设 $l:x=ty+1$，$A(x_1,y_1)(y_1>0)$，$B(x_2,y_2)(y_2<0)$，

由 $\begin{cases}x=ty+1\\y^2=4x\end{cases}$ 得：$y^2-4ty-4=0$，$\therefore\begin{cases}y_1+y_2=4t\\y_1y_2=-4\end{cases}$，

$\therefore x_1x_2=\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}=\frac{(y_1y_2)^2}{16}=1$；

当 $y\geqslant 0$ 时，由 $y^2=4x$ 得：$y=2\sqrt{x}$，$\therefore y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$，

$\therefore l_1: y-y_1=\frac{1}{\sqrt{x_1}}\left(x-x_1\right)$，又 $y_1=2\sqrt{x_1}$，$\therefore l_1: y=\frac{1}{\sqrt{x_1}}x+\sqrt{x_1}$；

当 $y<0$ 时，由 $y^2=4x$ 得：$y=-2\sqrt{x}$，$\therefore y'=-\frac{1}{\sqrt{x}}$，

$\therefore l_1: y-y_2=-\frac{1}{\sqrt{x_2}}\left(x-x_2\right)$，又 $y_2=-2\sqrt{x_2}$，$\therefore l_2: y=-\frac{1}{\sqrt{x_2}}x-\sqrt{x_2}$；

由 $\begin{cases} y=\frac{1}{\sqrt{x_1}}x+\sqrt{x_1} \\ y=-\frac{1}{\sqrt{x_2}}x-\sqrt{x_2} \end{cases}$ 得：$\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1x_2}}x=-\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)$，

又 $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\neq 0$，$\therefore x=-\sqrt{x_1x_2}=-1$，

$\therefore$ 点 P 必在定直线 $x=-1$ 上；

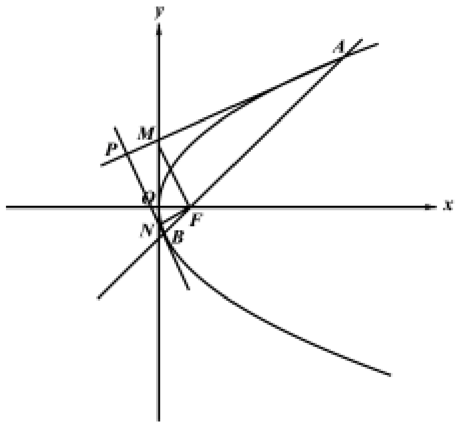
由 l_1,l_2 方程可求得 $M\left(0,\sqrt{x_1}\right)$，$N\left(0,-\sqrt{x_2}\right)$，$\therefore |MN|=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$；

当 l 倾斜角为 30° 时，l 方程为：$x=\sqrt{3}y+1$，

$\therefore \begin{cases} y_1+y_2=4\sqrt{3} \\ y_1y_2=-4 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} x_1+x_2=\sqrt{3}\left(y_1+y_2\right)+2=14 \\ x_1x_2=1 \end{cases}$，

$\therefore |MN|^2=x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}=14+2=16$，解得：$|MN|=4$，

$\therefore$ 四边形 $PMFN$ 的面积 $S=S_{\triangle PMN}+S_{\triangle FMN}=\frac{1}{2}|MN|\times 2=4$.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_n=3S_n-2$（$n\in$N*）.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求证：对任意　$m\in$N*，S_m，S_{m+2}，S_{m+1} 成等差数列.

【答案】（1） $a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$；

（2）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）利用 a_n 与 S_n 关系可得 $a_n=-\dfrac{1}{2}a_{n-1}$，进而可得；

（2）利用等比数列的前 n 项和公式，即证.

【小问 1 详解】

当 $n=1$ 时，$a_1=3S_1-2=3a_1-2$，所以 $a_1=1$；

当 $n\geq 2$ 时，因为 $a_n=3S_n-2$，所以 $a_{n-1}=3S_{n-1}-2$，

所以 $a_n-a_{n-1}=3a_n$，即 $a_n=-\dfrac{1}{2}a_{n-1}$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，其通项公式为 $a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

小问 2 详解】

对任意的 $m\in\mathbf{N}^*$，$2S_{m+2}=2\times\dfrac{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{m+2}}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{4}{3}\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{m+2}\right]$，

$$S_m+S_{m+1}=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{m}}{1+\frac{1}{2}}+\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\left[2-\left(-\frac{1}{2}\right)^{m}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+1}\right]$$

$$=\frac{4}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+2}\right],$$

所以 $2S_{m+1}=S_m+S_{m+1}$，即 S_m,S_{m+2},S_{m+1} 成等差数列.

18. 在△ABC 中，A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且满足 $a\cos C-b-\dfrac{c}{2}=0$.

（1）求 A；

（2）若 $a=\sqrt{3}$ 求 $b+2c$ 的取值范围.

【答案】（1） $\dfrac{2\pi}{3}$；

（2） $(\sqrt{3},2\sqrt{3})$.

【解析】

【分析】（1）利用余弦定理得到$b^2+c^2-a^2=-bc$，进而即得；

（2）利用正弦定理可得$b+2c=2\sin B+4\sin C$，再利用三角函数的性质即得.

【小问1详解】

由余弦定理可得：$a\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-b-\dfrac{1}{2}c=0$，

即$b^2+c^2-a^2=-bc$

所以$\cos A=-\dfrac{bc}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，又$A\in(0,\pi)$，

所以$A=\dfrac{2\pi}{3}$；

【小问2详解】

由题意$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2$，则$c=2\sin C,b=2\sin B$，

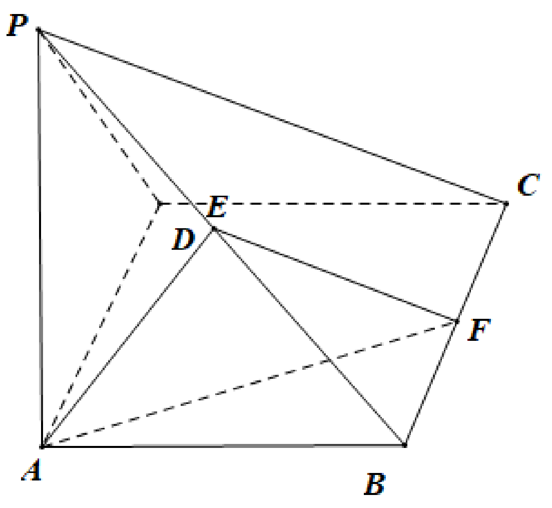
则$b+2c=2\sin B+4\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-B\right)=2\sqrt{3}\cos B$，

由$A=\dfrac{2}{3}\pi$，得$B\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，

则$b+2c\in(\sqrt{3},2\sqrt{3})$，

故$b+2c$的取值范围为$(\sqrt{3},2\sqrt{3})$.

19. 如图所示，在四棱锥P-$ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，$PA\perp$底面$ABCD$，$PA=AB$，E，F分别为线段PB，BC上的动点.



（1）若 E 为线段 PB 的中点，证明：平面 $AEF\perp$ 平面 PBC；

（2）若 $BE=\sqrt{2}BF$，且平面 AEF 与平面 PBC 所成角的弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，试确定点 F 的位置.

【答案】（1）证明见解析

（2）F 为 BC 三等分点处

【解析】

【分析】（1）先证明 $BC\perp$ 平面 PAB，从而可证 $BC\perp AE$，再证明 $AE\perp PB$，可证明 $AE\perp$ 平面 PBC，即可证明平面 $AEF\perp$ 平面 PBC；（2）建立空间直角坐标系，写出对应点的坐标以及对应的向量坐标，并求解平面的法向量，利用向量的夹角公式代入求解.

【小问 1 详解】

（1）证明：由 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，可得 $PA\perp BC$，又在正方形 $ABCD$ 中，$BC\perp AB$，

且 $PA\cap AB=A$，则 $BC\perp$ 平面 PAB，有 $BC\perp AE$.

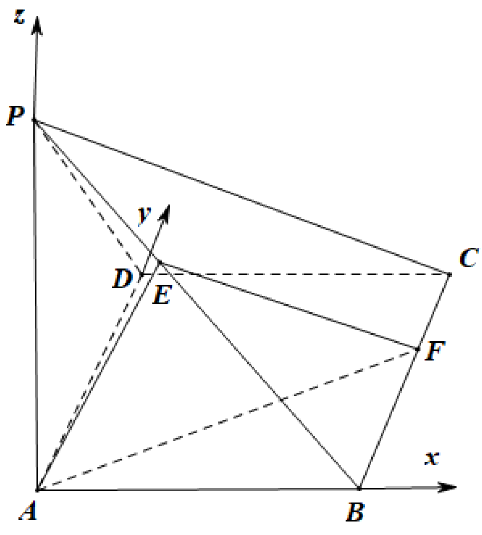
由 $PA=AB$，E 为 PB 中点，可得 $AE\perp PB$

又 $PB\cap BC=B$，则 $AE\perp$ 平面 PBC，从而平面 $AEF\perp$ 平面 PBC.

【小问 2 详解】

以 A 为坐标原点，AB,AD,AP 分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.设 $AB=1$，则

$A(0,0,0),B(1,0,0),C(1,1,0),D(0,1,0),P(0,0,1)$.



由（1）可知 $\overrightarrow{n_1}=\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$为平面 PBC 的法向量.

由 $BE=\sqrt{2}BF$，可知 $EF//PC$，设 $\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BP}$，则 $\overrightarrow{BF}=\lambda(0,1,0)$，$\overrightarrow{BE}=\lambda(-1,0,1)$，可得

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=(1,\lambda,0),\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=(1-\lambda,0,\lambda)$.

设平面 AEF 的法向量为 $\vec{n}_2=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AF}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x+\lambda y=0\\ (1-\lambda)x+\lambda z=0\end{cases}$，

取 $y=1$，则 $x=-\lambda,z=1-\lambda$，即 $\overrightarrow{n_2}=(-\lambda,1,1-\lambda)$.

从而，由 $\left|\cos\left\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{|1-2\lambda|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\lambda^2-2\lambda+2}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 或 $\lambda=\dfrac{2}{3}$，即 F 为 BC 三等分点处.

【点睛】对于立体几何中角的计算问题，往往可以利用空间向量法，通过求解平面的法向量，利用向量的夹角公式求解.

20. 微信小程序“党史知识竞赛”中的“答题竞赛”板块有个“双人竞赛”栏目，可满足两人通过回答多个问题的形式进行竞赛.甲，乙两单位在联合开展党史学习教育特色实践活动中通过此栏目进行比赛，比赛规则是：每一轮比赛中每个单位派出一人代表其所在单位答题，两单位都全部答对或者都没有全部答对则均记 0 分；一单位全部答对而另一单位没有全部答对，则全部答对的单位记 1 分，没有全部答对的单位记-1 分.设每轮比赛中甲单位全部答对的概率为 $\dfrac{4}{5}$，乙单位全部答对的概率为 $\dfrac{2}{3}$，甲，乙两单位答题相互独立，且每轮比赛互不影响.

（1）经过 1 轮比赛，设甲单位的记分为 X，求 X 的分布列和期望；

（2）若比赛采取 3 轮制，试计算第 3 轮比赛后甲单位累计得分低于乙单位累计得分的概率.

【答案】（1）分布列答案见解析，数学期望：$\dfrac{2}{15}$

（2）$\dfrac{26}{135}$

【解析】

【分析】（1）理解题意，列出随机变量 X 所有可能的取值，然后相互独立事件的性质求解即可.

（2）通过列举法列出 3 轮比赛后甲单位累计得分低于乙单位累计得分的所有情况，然后利用小问（1）中所得的结果进行计算.

【小问 1 详解】

由题意 X 的取值可能为 -1，0，1，

则 $P(X=-1)=\left(1-\dfrac{4}{5}\right)\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{15}$，

$P(X=0)=\left(1-\dfrac{4}{5}\right)\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{3}{5}$，

$P(X=1)=\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{15}$,

那么 X 的分布列为：

X	-1	0	1
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{15}$

$E(X)=-1\times\frac{2}{15}+0\times\frac{3}{5}+1\times\frac{4}{15}=\frac{2}{15}$.

【小问 2 详解】

第 3 轮比赛后，甲单位累计得分低于乙单位的 3 轮计分有四种情况（不按先后顺序）：

$-1,-1,-1$；$-1,-1,0$；$-1,-1,+1$；$-1,0,0$，

所以 $P=\left(\frac{2}{15}\right)^3+C_3^2\left(\frac{2}{15}\right)^2\times\frac{3}{5}+C_3^2\left(\frac{2}{15}\right)^2\times\frac{4}{15}+C_3^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{15}=\frac{26}{135}$.

21. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）经过点 A（0，1），且右焦点为 F（1，0）.

（1）求 C 的标准方程；

（2）过点（0，$\frac{1}{2}$）的直线 l 与椭圆 C 交于两个不同的点 $P.Q$，直线 AP 与 x 轴交于点 M，直线 AQ 与 x 轴交于点 N.证明：以 MN 为直径的圆过 y 轴上的定点.

【答案】（1）$\frac{x^2}{2}+y^2=1$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）由已知得 c,b，再求得 a，即得椭圆方程；

（2）由题意直线 l 斜率存在，可设直线 $l:y=kx+\frac{1}{2}$，设 $P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，直线方程代入椭圆方程应用韦达定理得 x_1+x_2,x_1x_2，由直线 AP,AQ 方程求出 M,N 坐标，求出以 MN 为直径的圆的方程，然后代入 x_1+x_2,x_1x_2 求得圆方程的常数项，从而可得 y 的定点坐标.

【小问 1 详解】

由题意可得 $c=1,b=1$ 从而 $a^2=2$.

所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

【小问 2 详解】

证明：由题意直线l斜率存在，可设直线$l: y=kx+\frac{1}{2}$，设$P\left(x_1, y_1\right), Q\left(x_2, y_2\right)$，

将直线l代入椭圆方程得$\left(4k^2+2\right)x^2+4kx-3=0$，

所以$x_1+x_2=\frac{-4k}{4k^2+2}, x_1, x_2=\frac{-3}{4k^2+2}$，

直线AP的方程为$y=\frac{y_1-1}{x_1}x+1$，直线AQ的方程为$y=\frac{y_2-1}{x_2}x+1$.

可得$M\left(\frac{-x_1}{y_1-1}, 0\right), N\left(\frac{-x_2}{y_2-1}, 0\right)$，

以MN为直径的圆方程为，$\left(x+\frac{x_1}{y_1-1}\right)\left(x+\frac{x_2}{y_2-1}\right)+y^2=0$，

即$x^2+y^2+\left(\frac{x_1}{y_1-1}+\frac{x_2}{y_2-1}\right)x+\frac{x_1x_2}{\left(y_1-1\right)\left(y_2-1\right)}=0$.①

因为$\frac{x_1x_2}{\left(y_1-1\right)\left(y_2-1\right)}=\frac{x_1x_2}{\left(kx_1-\frac{1}{2}\right)\left(kx_2-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4x_1x_2}{4k^2x_1x_2-2k\left(x_1+x_2\right)+1}$

$=\frac{-12}{-12k^2+8k^2+4k^2+2}=-6$.

所以在①中令$x=0$，得$y^2=6$，即以MN为直径的圆过y轴上的定点$(0, \pm\sqrt{6})$，

22. 已知函数$f(x)=\ln x+\frac{2}{x}-2$，$g(x)=x\ln x-ax^2-x+1$

（1）证明：函数f（x）在$(1, +\infty)$内有且仅有一个零点；

（2）假设存在常数$\lambda>1$，且满足f（λ）=0，试讨论函数$g(x)$的零点个数.

【答案】（1）证明见解析

（2）答案见解析

【解析】

【分析】（1）由导函数判断出函数f（x）的单调区间，依据零点存在定理即可证明函数f（x）在$(1, +\infty)$内有且仅有一个零点；

（2）把函数 $g(x)$ 的零点个数问题，转化为 $y=ax$ 与 $y=\ln x-1+\frac{1}{x}(x>0)$ 两函数图像的交点个数问题，分类讨论即可解决.

【小问 1 详解】

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{x-2}{x^2}$，令 $f'(x)=0$，则 $x=2$

所以 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递减，在 $(2,+\infty)$ 单调递增.

因为 $f(1)=0, f(2)=\ln 2-1<0, f\left(e^2\right)=2+\frac{2}{e^2}-2>0$，

结合单调性，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 有且仅有一个零点.

【小问 2 详解】

令 $g(x)=0$，即 $x\ln x-ax^2-x+1=0$，从而有 $ax=\ln x-1+\frac{1}{x}$，

令 $\varphi(x)=\ln x-1+\frac{1}{x}(x>0)$，

从而 $g\left(x\right)$ 的零点个数等价于 $y=ax$ 与 $\varphi(x)$ 图像的交点个数.

$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，令 $\varphi'(x)=0$，得 $x=1$.

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，且 $\varphi_{\max}(x)=\varphi(1)=0$，

当 $a=0$ 时，$y=ax$ 图像与 $\varphi(x)$ 图像有一个交点.

当 $a<0$ 时，$y=ax$ 图像经过二、四象限，与 $\varphi(x)$ 图像无交点.

当 $a>0$ 时，$y=ax$ 图像经过一，三象限，与 $\varphi(x)$ 图像至少有一个交点，当 $y=ax$ 图像 $\varphi(x)$ 图像相切时，

设切点横坐标为 x_0，则有 $\begin{cases} a=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0^2} \\ ax_0=lnx_0-1+\frac{1}{x_0} \end{cases}$

即有 $\ln x_0+\frac{2}{x_0}-2=0$，从而 $x_0=\lambda$，

此时 $a=\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{\lambda-1}{\lambda^2}>0$.

所以，当时 $a=\frac{\lambda-1}{\lambda^2}$ 时，$y=ax$ 图像与 $\varphi(x)$ 图像有两个交点；

当 $0<a<\frac{\lambda-1}{\lambda^2}$ 时，$y=ax$ 图像与 $\varphi(x)$ 图像有三个交点；

当 $a>\frac{\lambda-1}{\lambda^{2}}$ 时，$y=ax$ 图像与图像 $\varphi(x)$ 有一个交点.

综上所述，当 $a<0$ 时，$g(x)$ 没有零点；当 $0<a<\frac{\lambda-1}{\lambda^{2}}$ 时，$g\left(x\right)$ 有三个零点；当 $a=\frac{\lambda-1}{\lambda^{2}}$，$g(x)$ 有两个零点；当 $a>\frac{\lambda-1}{\lambda^{2}}$ 或 $a=0$ 时，$g(x)$ 有一个零点.