2022年广州市普通高中毕业班综合测试（一）

数学

本试卷满分150分，考试用时120分钟.

注意事项：

1.答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上.用2B铅笔在答题卡的相应位置填涂考生号.

2.作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案.答案不能答在试卷上.

3.非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答无效.

4.考生必须保持答题卡的整洁.考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\middle|-1\le x\le 1\right\}$， $B=\left\{x\middle|0\le x\le 2\right\}$，则 $A\cap B$ 的子集个数为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

【1题答案】

【答案】C

【解析】

【分析】求出 $A\cap B$ 的集合，然后找出子集个数即可.

【详解】由题可知 $A=\{-1,0,1\}$，所有 $A\cap B=\{0,1\}$，所有其子集分别是 $\varnothing,\{1\},\{0\},\{0,1\}$，所有共有 4 个子集

故选：C

2. 若复数 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$，则 $|z-\mathrm{i}|=$（　　）

A. 2　　B. $\sqrt{5}$　　C. 4　　D. 5

【2题答案】

【答案】B

【解析】

【分析】先化简复数 z，再利用复数的模求解.

【详解】因为复数 $z=\dfrac{2}{1+i}$，

所以 $z-i=\dfrac{2}{1+i}-i=1-2i$，

所以 $\left|z-i\right|=\sqrt{1^2+\left(-2\right)^2}=\sqrt{5}$，

故选：B

3. 甲，乙两人在 5 天中每天加工零件的个数用茎叶图表示如图，中间一列的数字表示零件个数的十位数，两边的数字表示零件个数的个位数，则下列结论正确的是（　　）

甲			乙		
	9	8	1	7	9	
8	7	3	2	1	3	5

A. 在这 5 天中，甲，乙两人加工零件数的极差相同

B. 在这 5 天中，甲，乙两人加工零件数的中位数相同

C. 在这 5 天中，甲日均加工零件数大于乙日均加工零件数

D. 在这 5 天中，甲加工零件数的方差小于乙加工零件数的方差

【3 题答案】

【答案】C

【解析】

【分析】由茎叶图的数据，分别计算甲、乙加工零角个数的极差，中位数，平均数，方差，进而得解.

【详解】甲在 5 天中每天加工零件的个数为：18, 19, 23, 27, 28；乙在 5 天中每天加工零件的个数为：17, 19, 21, 23, 25

对于 A，甲加工零件数的极差为 $28-18=10$，乙加工零件数的极差为 $25-17=8$，故 A 错误；

对于 B，甲加工零件数的中位数为 23，乙加工零件数的中位数为 21，故 B 错误；

对于 C，甲加工零件数的平均数为 $\dfrac{18+19+23+27+28}{5}=23$，乙加工零件数的中位数为 $\dfrac{17+19+21+23+25}{5}=21$，故 C 正确；

对于 D，甲加工零件数的方差为 $\dfrac{5^2+4^2+0^2+4^2+5^2}{5}=16.4$，乙加工零件数的方差为

$\frac{4^2+2^2+0^2+2^2+4^2}{5}=8$，故 D 错误；

故选：C

4. 曲线 $y=x^3+1$ 在点 $(-1,a)$ 处的切线方程为（　　）

A. $y=3x+3$　　B. $y=3x+1$　　C. $y=-3x-1$　　D. $y=-3x-3$

【4 题答案】

【答案】A

【解析】

【分析】求出导函数，进而利用导数的几何意义得到切线的斜率，再求出 a 的值，利用点斜式求出切线方程.

【详解】$f'(x)=3x^2$，所以 $f'(-1)=3$，又当 $x=-1$ 时，$a=x^3+1=-1+1=0$，所以 $y=x^3+1$ 在点 $(-1,a)$ 处的切线方程为：$y=3(x+1)$，即 $y=3x+3$

故选：A

5. $(x+3y)(x-2y)^6$ 的展开式中 x^5y^2 的系数为（　　）

A. 60　　B. 24　　C. -12　　D. -48

【5 题答案】

【答案】B

【解析】

【分析】首先写出 $(x-2y)^6$ 展开式通项，再考虑通项与 $x+3y$ 相乘得到含 x^5y^2 的项，即可得系数.

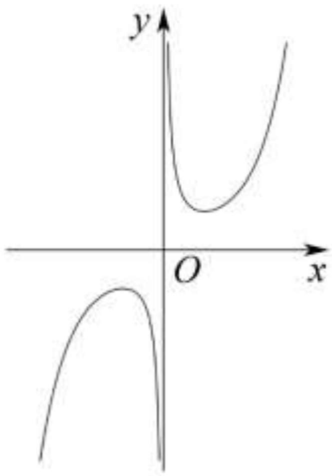
【详解】由 $(x-2y)^6$ 的展开式通项为 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}(-2y)^r=(-2)^r C_6^r x^{6-r}y^r$，

所以 $(x+3y)(x-2y)^6$ 的展开式 x^5y^2 项为 $\left[4C_6^2-6C_6^1\right]\cdot x^5y^2$，

故系数为 $4C_6^2-6C_6^1=24$.

故选：B

6. 若函数 $y=f(x)$ 的大致图象如图，则 $f(x)$ 的解析式可能是（　　）



A. $f(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^{2x}+1}$　　B. $f(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{x^2e^x}$　　C. $f(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^{2x}-1}$　　D. $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{x^2e^x}$

【6 题答案】

【答案】D

【解析】

【分析】根据定义域排除 A，根据奇偶性排除 B，根据值域或单调性排除 C.

【详解】由图可知函数定义域为$\{x|x\neq 0\}$，由此排除 A；

该函数图像关于原点对称，则该函数为奇函数，需满足 $f(x)+f(-x)=0$，

对于 B 项：$f(x)+f(-x)\neq 0$，故排除 B；

C 和 D 均满足 $f(x)+f(-x)=0$，

对于 C：$f(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^{2x}-1}=\dfrac{x^2}{e^x-\dfrac{1}{e^x}}$，当 $x\to+\infty$时，$\dfrac{1}{e^x}\to 0$，故 $f(x)\to\dfrac{x^2}{e^x}$，

$\because y=x^2$ 增长的速率比 $y=e^x$ 增长的速率慢，$\therefore f(x)\to\dfrac{x^2}{e^x}\to 0$，

即图像在 x 轴上方无限接近于 x 轴正半轴，与题意不符，故排除 C.

综上，D 选项正确.

故选：D.

7. 设抛物线 $E:y^2=8x$ 的焦点为 F，过点 $M(4,0)$ 的直线与 E 相交于 A，B 两点，与 E 的准线相交于点 C，点 B 在线段 AC 上，$|BF|=3$，则$\triangle BCF$ 与$\triangle ACF$ 的面积之比$\dfrac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}}=$（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{7}$

【7 题答案】

【答案】C

【解析】

【分析】根据抛物线焦半径公式得到 B 点横坐标，进而利用抛物线方程求出 B 点纵坐标，直线 AB 的方程，求出 C 点坐标，联立直线与抛物线，求出 A 点纵坐标，利用 $\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}}=\frac{BC}{AC}=\frac{y_2-y_C}{y_1-y_C}$ 求出答案.

【详解】如图，过点 B 作 BD 垂直准线 $x=-2$ 于点 D，则由抛物线定义可知：$|BF|=|BD|=3$，

设直线 AB 为 $x=my+4$，　$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，$C\left(-2,y_C\right)$，不妨设 $m>0$，则 $y_1>0,y_2<0$，

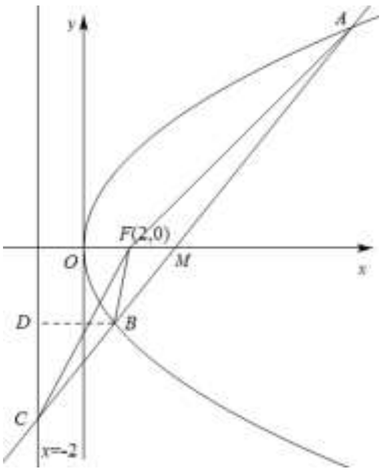
所以 $x_2+2=3$，解得：$x_2=1$，则 $y_2^2=8x_2=8$，解得：$y_2=-2\sqrt{2}$，则 $B\left(1,-2\sqrt{2}\right)$，

所以 $-2\sqrt{2}m+4=1$，解得：$m=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，则直线 AB 为 $x=\frac{3\sqrt{2}}{4}y+4$，

所以当 $x=-2$ 时，即 $\frac{3\sqrt{2}}{4}y+4=-2$，解得：$y_C=-4\sqrt{2}$，则 $C\left(-2,-4\sqrt{2}\right)$，

联立 $x=my+4$ 与 $y^2=8x$ 得：$y^2-8my-32=0$，则 $y_1y_2=-32$，

所以 $y_1=8\sqrt{2}$，其中 $\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}}=\frac{BC}{AC}=\frac{y_2-y_C}{y_1-y_C}=\frac{2\sqrt{2}}{12\sqrt{2}}=\frac{1}{6}$.



故选：C

8. 若正实数 a，b 满足 $a>b$，且 $\ln a\cdot\ln b>0$，则下列不等式一定成立的是（　　）

A. $\log_a b<0$　　B. $a-\frac{1}{b}>b-\frac{1}{a}$　　C. $2^{ab+1}<2^{a+b}$　　D. $a^{b-1}<b^{a-1}$

【8 题答案】

【答案】D

【解析】

【分析】根据函数单调性及$\ln a\cdot\ln b>0$得到$a>b>1$或$0<b<a<1$，分别讨论两种情况下四个选项是否正确，A 选项可以用对数函数单调性得到，B 选项可以用作差法，C 选项用作差法及指数函数单调性进行求解，D 选项，需要构造函数进行求解.

【详解】因为$a>b>0$，$y=\ln x$为单调递增函数，故$\ln a>\ln b$，由于$\ln a\cdot\ln b>0$，故$\ln a>\ln b>0$，或$\ln b<\ln a<0$，

当$\ln a>\ln b>0$时，$a>b>1$，此时$\log_a b>0$；

$a-\frac{1}{b}-\left(b-\frac{1}{a}\right)=(a-b)\left(1-\frac{1}{ab}\right)>0$，故$a-\frac{1}{b}>b-\frac{1}{a}$；

$ab+1-(a+b)=(a-1)(b-1)>0$，$2^{ab+1}>2^{a+b}$；

当$\ln b<\ln a<0$时，$0<b<a<1$，此时$\log_a b>0$，$a-\frac{1}{b}-\left(b-\frac{1}{a}\right)=(a-b)\left(1-\frac{1}{ab}\right)<0$，故

$a-\frac{1}{b}<b-\frac{1}{a}$；

$ab+1-(a+b)=(a-1)(b-1)>0$，$2^{ab+1}>2^{a+b}$；

故 ABC 均错误；

D 选项，$a^{b-1}<b^{a-1}$，两边取自然对数，$(b-1)\ln a<(a-1)\ln b$，因为不管$a>b>1$，还是$0<b<a<1$，均有$(a-1)(b-1)>0$，所以$\frac{\ln a}{a-1}<\frac{\ln b}{b-1}$，故只需证$\frac{\ln a}{a-1}<\frac{\ln b}{b-1}$即可，

设$f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$（$x>0$且$x\neq1$），则$f'(x)=\frac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$，令$g(x)=1-\frac{1}{x}-\ln x$（$x>0$且$x\neq1$），则

$g'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}$，当$x\in(0,1)$时，$g'(x)>0$，当$x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)<0$，所以$g(x)<g(1)=0$，

所以$f'(x)<0$在$x>0$且$x\neq1$上恒成立，故$f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$（$x>0$且$x\neq1$）单调递减，因为$a>b$，所以$\frac{\ln a}{a-1}<\frac{\ln b}{b-1}$，结论得证，D 正确

故选：D

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知直线$l: x+y-\sqrt{2}=0$与圆$C:(x-1)^2+(y+1)^2=4$，则（　　）

A. 直线l与圆 C 相离

B. 直线l与圆 C 相交

C. 圆 C 上到直线l的距离为 1 的点共有 2 个

D. 圆 C 上到直线l的距离为 1 的点共有 3 个

【9 题答案】

【答案】BD

【解析】

【分析】根据直线与圆的位置关系可判断.

【详解】由圆$C:(x-1)^2+(y+1)^2=4$，可知其圆心坐标为$(1,-1)$，半径为2，

圆心$(1,-1)$到直线$l: x+y-\sqrt{2}=0$的距离$d=\dfrac{|1-1-\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1$，所以可知选项 B，D 正确，选项 A，C 错误.

故选：BD

10. 将函数$y=\sin 2x$　图象向右平移φ个单位，得到函数$y=f(x)$的图象，则下列说法正确的是（　　）

A. 若$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，则$y=f(x)$是偶函数

B. 若$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，则$y=f(x)$在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递减

C. 若$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，则$y=f(x)$的图象关于点$\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$对称

D. 若$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，则$y=f(x)$在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递增

【10 题答案】

【答案】AC

【解析】

【分析】由函数平移得$f(x)=\sin(2x-2\varphi)$，讨论$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$、$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，结合正余弦函数　性质判断奇偶、对称性以及$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的单调性，即可得答案.

【详解】由题设，$f(x)=\sin(2x-2\varphi)$，

$\varphi=\frac{\pi}{4}$时， $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{2})=-\cos 2x$为偶函数，

在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上有$2x\in[0,\pi]$， $f(x)$递增，故 A 正确，B 错误；

$\varphi=\frac{\pi}{2}$时， $f(x)=\sin(2x-\pi)=-\sin 2x$，

此时， $f(\frac{\pi}{2})=-\sin\pi=0$，即 $f(x)$关于点$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$对称，

在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上有$2x\in[0,\pi]$， $f(x)$不单调，故 C 正确，D 错误.

故选：AC

11. 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中， $AB=2$， $AA_1=3$， $AD=4$，则下列命题为真命题的是（　　）

A. 若直线AC_1与直线CD所成的角为φ，则$\tan\varphi=\frac{5}{2}$

B. 若经过点A的直线l与长方体所有棱所成的角相等，且l与面BCC_1B_1交于点M，则$AM=\sqrt{29}$

C. 若经过点A的直线m与长方体所有面所成的角都为θ，则$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. 若经过点A的平面β与长方体所有面所成的二面角都为μ，则$\sin\mu=\frac{\sqrt{6}}{3}$

【11 题答案】

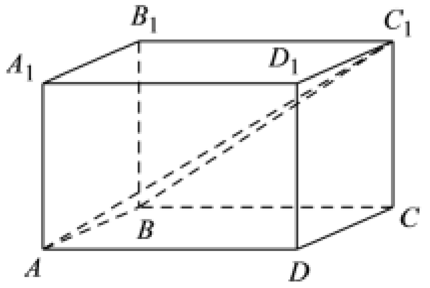
【答案】ACD

【解析】

【分析】A 根据长方体的性质找到直线AC_1与直线CD所成角的平面角即可；B 构建空间直角坐标系，根据线线角相等，结合空间向量夹角的坐标表示求$\cos<\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AM}>=\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}>=\cos<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AM}>$，即可求$M$坐标，进而确定线段长；C、D 将长方体补为以 4 为棱长的正方体，根据描述找到对应的直线m、平面β，结合正方体性质求线面角、面面角的正弦值.

【详解】A：如下图，直线AC_1与直线CD所成角，即为直线AC_1与直线AB所成角$\angle BAC_1$，则

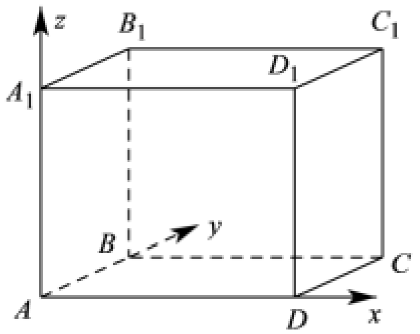
$\tan\varphi=\tan\angle BAC_1=\frac{BC_1}{AB}=\frac{5}{2}$，正确；



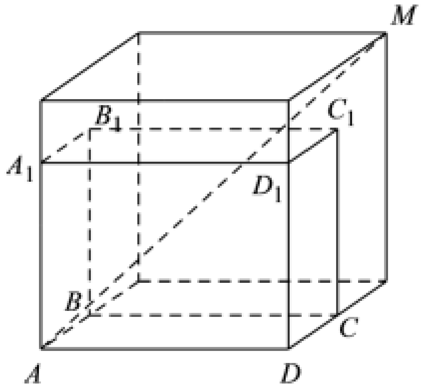
B：构建如下图示的坐标系，过 A 的直线 l 与长方体所有棱所成的角相等，与面 BCC_1B_1 交于 $M(x,2,z)$ 且

$x,z>0$，又 $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,3),\overrightarrow{AB}=(0,2,0),\overrightarrow{AD}=(4,0,0)$，则 $\cos<\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AM}>=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+4+z^2}}=$

$\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}>=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+4+z^2}}=\cos<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AM}>=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4+z^2}}$，故 $x=z=2$，则 $AM=2\sqrt{3}$，错误.

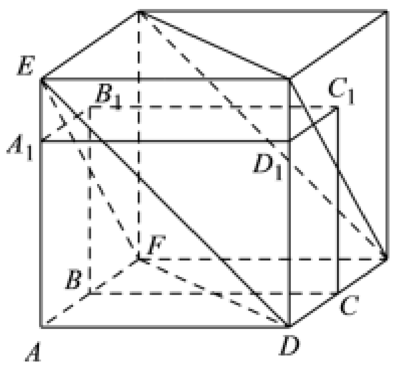


C：如下图，过 A 的直线 m 与长方体所有面所成的角都为 θ，则直线 m 为以 4 为棱长的正方体的体对角线 AM，故 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，正确；



D：如下图，过 A 的平面 β 与长方体所有面所成的二面角都为 μ，只需面 β 与以 4 为棱长的正方体中相邻的

三条棱顶点所在平面平行，如面 EDF，故 $\cos\mu=\frac{S_{\triangle EDF}}{3S_{\triangle ADE}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\sin\mu=\frac{\sqrt{6}}{3}$，正确.



故选：ACD

【点睛】关键点点睛：根据长方体或将其补全为正方体，结合各选项线线角、线面角相等判断直线或平面的位置，进而求对应角的函数值.

12. 十九世纪下半叶集合论的创立，奠定了现代数学的基础，著名的"康托三分集"是数学理性思维的构造产物，具有典型的分形特征，其操作过程如下：将闭区间[0，1]均分为三段，去掉中间的区间段$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，记为第 1 次操作：再将剩下的两个区间$\left[0,\frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3},1\right]$分别均分为三段，并各自去掉中间的区间段，记为第 2 次操作：…；每次操作都在上一次操作的基础上，将剩下的各个区间分别均分为三段，同样各自去掉中间的区间段；操作过程不断地进行下去，剩下的区间集合即是"康托三分集".若第 n 次操作去掉的区间长度记为 $\varphi(n)$，则（　　）

A. $\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}=\frac{3}{2}$

B. $\ln[\varphi(n)]+1<0$

C. $\varphi(n)+\varphi(3n)>2\varphi(2n)$

D. $n^2\varphi(n)\le 64\varphi(8)$

【12 题答案】

【答案】BC

【解析】

【分析】分析题意发现 $\varphi(n)$ 是一个等比数列，按照等比数列　性质逐一验证即可，其中 B 选项是化简成一个等差数列进行判断，CD 两个选项需要利用数列的单调性进行判断，尤其是 D 选项，需要构造新数列，利用做差法验证单调性.

【详解】由题可知 $n=1$，$\varphi(1)=\frac{1}{3}$；$n=2,\varphi(2)=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$，$n=3,\varphi(3)=2^2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$；$n=4,\varphi(4)=2^3\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$，

由此可知 $\varphi(n)=2^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$，即一个等比数列；

A：$\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{2}{3}\neq\frac{3}{2}$，A 错误；

B：$\ln[\varphi(n)]+1=\ln[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n]+1=n\ln\frac{2}{3}-\ln 2+1$，因为 $\ln\frac{2}{3}<0$，所以该数列为递减数列，

又因为当 $n=1$ 时，$\ln\frac{2}{3}-\ln 2+1=-\ln 3+1<0$，所以 $\ln[\varphi(n)]+1<0$ 恒成立，B 正确；

C：$\varphi(n)+\varphi(3n)>2\varphi(2n)$，即 $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{3n}>2\times\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$，两边约去 $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 得到 $1+\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}>2\left(\frac{2}{3}\right)^n$，

当 $n=1$ 时，$1+\frac{4}{9}=\frac{13}{9}>\frac{4}{3}$，原式成立；

当 $n\geq 2$ 时，$1>2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 恒成立，所以 $1+\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}>2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 成立，

即 $\varphi(n)+\varphi(3n)>2\varphi(2n)$ 成立，C 正确；

D：令 $k(n)=n^2\varphi(n)$，再令 $k(n+1)-k(n)=(n+1)^2\varphi(n+1)-n^2\varphi(n)=(n+1)^2\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-n^2\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n\left[\frac{2}{3}(n+1)^2-n^2\right]=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(-n^2+4n+2\right)$，

令 $-n^2+4n+2=0$ 解得 $n_1=2+\sqrt{6},n_2=2-\sqrt{6}$(舍)，因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以取 $4<n<5$，

由此可知 $n\leq 4$ 时 $k(n+1)-k(n)>0$；$n\geq 5$ 时 $k(n+1)-k(n)<0$，

故 $k(5)$ 为最大值，$k(8)=8^2\varphi(8)=64\varphi(8)$，根据单调性 $k(5)>k(8)$，即 $n^2\varphi(n)\leq 64\varphi(8)$ 不恒成立，D 错误.

故选：BC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\tan\alpha=$__________.

【13 题答案】

【答案】$-\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】根据同角三角函数的基本关系计算可得；

【详解】解：因为$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以$\cos\alpha=\pm\frac{4}{5}$，因为$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$

所以$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$

故答案为：$-\frac{3}{4}$

14. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle ABC=60^\circ$，点 P 在 BC 边上（包括端点），则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}$的取值范围是

__________.

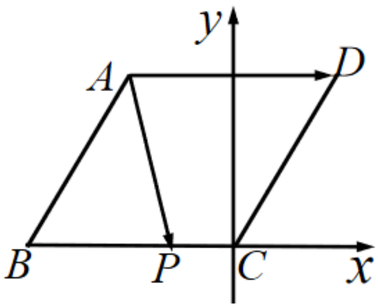
【14 题答案】

【答案】$[-2,2]$

【解析】

【分析】以 C 为原点，$\overrightarrow{BC}$为 x 轴正方向，过 C 垂直向上方向为 y 轴建立平面直角坐标系，利用向量的坐标运算直接求解.

【详解】



如图示，以 C 为原点，$\overrightarrow{BC}$为 x 轴正方向，过 C 垂直向上方向为 y 轴建立平面直角坐标系.

因为菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle ABC=60^\circ$，则$B(-2,0),C(0,0),D(1,\sqrt{3}),A(-1,\sqrt{3})$.

因为点 P 在 BC 边上（包括端点），所以$P(t,0)$,其中$t\in[-2,0]$.

所以$\overrightarrow{AD}=(2,0),\overrightarrow{AP}=(t+1,-\sqrt{3})$,

所以$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}=2t+2$.

因为$t\in[-2,0]$，所以$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}=2t+2\in[-2,2]$.

故答案为：$[-2,2]$

15. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的棱 AP，AB，AC 两两互相垂直，$AP=AB=AC=2\sqrt{3}$，以顶点 P 为球心，4 为半径作一个球，球面与该三棱锥的表面相交得到四段弧，则最长弧的弧长等于__________.

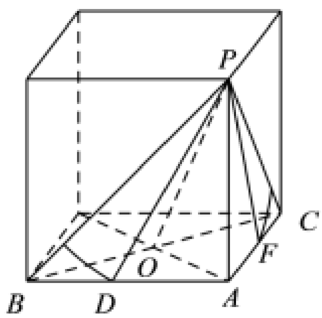
【15 题答案】

【答案】$\frac{4\pi}{3}$ ## $\frac{4}{3}\pi$

【解析】

【分析】将三棱锥 $P-ABC$ 补全为棱长为 $2\sqrt{3}$ 的正方体，根据已知条件判断棱锥各面与球面相交所成圆弧的圆心、半径及对应圆心角，进而求出弧长，即可知最长弧长.

【详解】由题设，将三棱锥 $P-ABC$ 补全为棱长为 $2\sqrt{3}$ 的正方体，如下图示：



若 $AD=AF=2$，则 $PD=PF=4$，即 D,F 在 P 为球心，4 为半径的球面上，且 O 为底面中心，

又 $OA=\sqrt{6}>2$，$OP=3\sqrt{2}>4$，

所以，面 ABC 与球面所成弧是以 A 为圆心，2 为半径的四分之一圆弧，故弧长为 π；

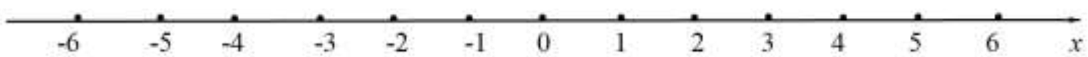
面 PBC 与与球面所成弧是以 P 为圆心，4 为半径且圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的圆弧，故弧长为 $\frac{4\pi}{3}$；

面 PBA,PCA 与球面所成弧是以 P 为圆心，4 为半径且圆心角为 $\frac{\pi}{12}$ 的圆弧，故弧长为 $\frac{\pi}{3}$；

所以最长弧的弧长为 $\frac{4\pi}{3}$.

故答案为：$\frac{4\pi}{3}$.

16. 如图，在数轴上，一个质点在外力的作用下，从原点 O 出发，每次等可能地向左或向右移动一个单位，共移动 6 次，则事件“质点位于 -2 的位置”的概率为__________.



【16 题答案】

【答案】$\dfrac{15}{64}$

【解析】

【分析】理解题意构建数学模型，利用排列组合进行解题.

【详解】由图可知，若想通过 6 次移动最终停在-2　位置上，则必然需要向右移动 2 次且向左移动 4 次，记向右移动一次为 R，向左移动一次为 L，

则该题可转化为 $RRLLLL$ 六个字母排序的问题，故落在−2 上的排法为 $\dfrac{A_6^6}{A_2^2A_4^4}=15$

所有移动结果的总数为 $2^6=64$，所有落在−2 上的概率为 $P=\dfrac{15}{64}$

故答案为：$\dfrac{15}{64}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，a_1,a_2,a_3 分别是下表第一，二，三行中的某一个数，且 a_1,a_2,a_3 中的任何两个数不在下表的同一列.

	第一列	第二列	第三列
第一列	3	2	3
第二列	4	6	5
第三列	9	12	8

（1）写出 a_1,a_2,a_3，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n+(-1)^n\log_2 a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

【17~18 题答案】

【答案】（1）$a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=8$，$a_n=2^n$

（2）$T_n=\begin{cases}2^{n+1}+\dfrac{n}{2}-2, n\text{为偶数}\\ 2^{n+1}-\dfrac{n}{2}-\dfrac{5}{2}, n\text{为奇数}\end{cases}$

【解析】

【分析】（1）根据等比数列的定义和表格中数据的特点得到$a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=8$，进而求得通项公式;

（2）由（1）知$b_n=2^n+(-1)^n n$，利用分组求和，含有$(-1)^n$需讨论n为偶数与奇数，然后按照等差数列求和.

【小问1详解】

根据等比数列的定义和表格中数据，得到$a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=8$，

即数列$\{a_n\}$是首项为2，公比为2的等比数列，故$a_n=2\times 2^{n-1}=2^n$.

【小问2详解】

因为$b_n=a_n+(-1)^n\log_2 a_n=2^n+(-1)^n\log_2 2^n=2^n+(-1)^n n$

当n为偶数时，$S_n=(2^1+2^2+\cdots+2^n)+\ [-1+2-3+4-\cdots-(n-1)+n]$

$$=\frac{2-2^{n+1}}{1-2}+\frac{n}{2}=2^{n+1}+\frac{n}{2}-2$$

当n为奇数时，$S_n=(2^1+2^2+\cdots+2^n)+\ [-1+2-3+4-\cdots+(n-1)-n]$

$$=\frac{2-2^{n+1}}{1-2}+\frac{n-1}{2}-n=2^{n+1}+\frac{n-1}{2}-n-2=2^{n+1}-\frac{n}{2}-\frac{5}{2}$$

综上所述，$T_n=\begin{cases}2^{n+1}+\dfrac{n}{2}-2, n\text{为偶数}\\ 2^{n+1}-\dfrac{n}{2}-\dfrac{5}{2}, n\text{为奇数}\end{cases}$

18. $\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\triangle ABC$的面积为$\left(\frac{1}{2}a^2-b^2\right)\sin C$.

（1）证明：$\sin A=2\sin B$；

（2）若$a\cos C=\frac{3}{2}b$，求$\cos A$.

【18~19题答案】

【答案】（1）证明见解析；

（2）$-\frac{\sqrt{2}}{4}$

【解析】

【分析】(1)根据三角形面积公式及三角形内角性质可得$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}a^2-b^2$，再由正弦定理的边角关系即可证结论.

(2)由(1)及题设可得$\cos C=\frac{3}{4}\in(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，进而求得$\sin C=\frac{\sqrt{7}}{4}$，应用余弦定理及正弦定理边角关系求$\sin B$，即可求$\cos B$，注意根据$B$的范围判断符号，最后利用$\cos A=-\cos(B+C)$及和角余弦公式求值即可.

【小问1详解】

由题设，$\frac{1}{2}ab\sin C=\left(\frac{1}{2}a^2-b^2\right)\sin C$，又$\sin C\neq 0$，

所以$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}a^2-b^2$，由正弦定理可得$\sin A\sin B=\sin^2 A-2\sin^2 B$，

所以$\sin B(\sin A+\sin B)=\sin^2 A-\sin^2 B=(\sin A+\sin B)(\sin A-\sin B)$，又$\sin A+\sin B\neq 0$，

所以$\sin B=\sin A-\sin B$，即$\sin A=2\sin B$.

【小问2详解】

由(1)及题设，$\sin A\cos C=2\sin B\cos C=\frac{3}{2}\sin B$，且$\sin B>0$，

所以$\cos C=\frac{3}{4}\in(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，则$\frac{\pi}{4}<C<\frac{\pi}{3}$，故$\sin C=\frac{\sqrt{7}}{4}$，

又$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C}{2\sin A\sin B}=\frac{5\sin^2 B-\frac{7}{16}}{4\sin^2 B}=\frac{3}{4}$，可得$\sin B=\frac{\sqrt{14}}{8}$，

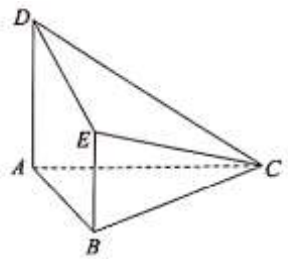
若$\cos B=-\frac{5\sqrt{2}}{8}<-\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$\frac{5\pi}{6}<B<\pi$，而$\frac{2\pi}{3}<A+B<\frac{3\pi}{4}$，故不合题设；

所以$\cos B=\frac{5\sqrt{2}}{8}$，

所以$\cos A=\cos[\pi-(B+C)]=-\cos(B+C)=\sin B\sin C-\cos B\cos C$

$=\frac{\sqrt{14}}{8}\times\frac{\sqrt{7}}{4}-\frac{5\sqrt{2}}{8}\times\frac{3}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

19. 如图，在五面体$ABCDE$中，$AD\perp$平面ABC，$AD//BE$，$AD=2BE$，$AB=BC$.



（1）求证：平面 $CDE \perp$ 平面 ACD；

（2）若 $AB=\sqrt{3}$， $AC=2$，五面体 $ABCDE$ 的体积为 $\sqrt{2}$，求直线 CE 与平面 $ABED$ 所成角的正弦值.

【19~20 题答案】

【答案】（1）证明见解析；

（2）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

【解析】

【分析】（1）若 O 是 AC 中点，连接 OB，作 $Oz//AD$，根据题设可得 Oz,OB,AC 两两垂直，构建空间直角坐标系，令 $AD=2BE=2a$， $OB=c,OA=OC=b$ 并确定点坐标，求面 CDE 、面 ACD 的法向量，应用空间向量夹角的坐标表示即可证结论.

（2）根据已知体积，结合棱锥的体积公式求出 AD,BE，进而求面 $ABED$ 的法向量、直线 CE 的方向向量，应用空间向量夹角的坐标表示求线面角的正弦值.

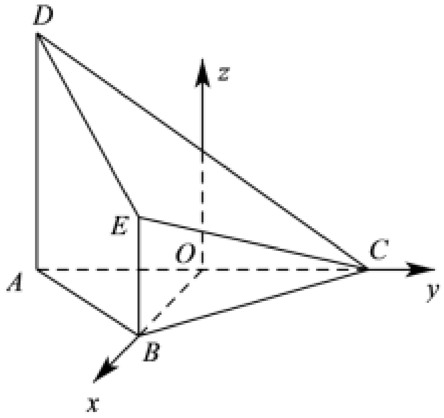
【小问 1 详解】

若 O 是 AC 中点，连接 OB，作 $Oz//AD$，由 $AB=BC$ 知：$OB \perp AC$，

因为 $AD \perp$ 面 ABC，则 $Oz \perp$ 面 ABC，又 $OB,AC \subset$ 面 ABC，

所以 $Oz \perp OB$， $Oz \perp AC$，

综上，Oz,OB,AC 两两垂直，故可构建如下图示的空间直角坐标系 $O-xyz$，



令 $AD=2BE=2a$，$OB=c$，$OA=OC=b$，则 $D(0,-b,2a)$，$C(0,b,0)$，$E(c,0,a)$，

所以 $\overrightarrow{CD}=(0,-2b,2a)$，$\overrightarrow{CE}=(c,-b,a)$，

若 $\vec{m}=(x,y,z)$ 是面 CDE 的一个法向量，即 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CD}=-2by+2az=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CE}=cx-by+az=0\end{cases}$，令 $z=b$，则 $\vec{m}=(0,a,b)$，

又 $\vec{n}=(1,0,0)$ 是面 ACD 的一个法向量，则 $\vec{m}\cdot\vec{n}=0$，

所以面 $CDE\perp$ 面 ACD.

【小问 2 详解】

由 $AD\perp$ 面 ABC，$AD\subset$ 面 $ABED$，则面 $ABED\perp$ 面 ABC，故 C 到面 $ABED$ 的距离，即为△ ABC 中 AB 上的高，

因为 $AB=BC=\sqrt{3}$，$AC=2$，则 $\cos B=\dfrac{3+3-4}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$，故 $\sin B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 AB 上的高 $h=BC\cdot\sin B=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

又 $AB\subset$ 面 ABC，则 $AD\perp AB$，而 $AD//BE$，有 $BE\perp AB$，$AD=2BE$，

所以 $ABED$ 为直角梯形，令 $AD=2BE=2a$，则 $S_{ABED}=\dfrac{1}{2}\times 3a\times\sqrt{3}=\dfrac{3\sqrt{3}a}{2}$，

综上，$V_{ABCDE}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{3\sqrt{3}a}{2}=\sqrt{2}a=\sqrt{2}$，故 $a=1$.

由（1）知：$A(0,-1,0)$，$D(0,-1,2)$，$C(0,1,0)$，$E(\sqrt{2},0,1)$，

所以 $\overrightarrow{AD}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{DE}=(\sqrt{2},1,-1)$，

若 $\vec{l}=(m,n,k)$ 是面 $ABED$ 的一个法向量，即 $\begin{cases}\vec{l}\cdot\overrightarrow{AD}=2k=0\\ \vec{l}\cdot\overrightarrow{DE}=\sqrt{2}m+n-k=0\end{cases}$，令 $m=-1$，则 $\vec{l}=(-1,\sqrt{2},0)$，

而 $\overrightarrow{CE}=(\sqrt{2},-1,1)$，则 $|\cos<\vec{l},\overrightarrow{CE}>|=|\dfrac{\vec{l}\cdot\overrightarrow{CE}}{|\vec{l}||\overrightarrow{CE}|}|=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times 2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

所以直线 CE 与平面 $ABED$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

20. 人们用大数据来描述和定义信息时代产生的海量数据，并利用这些数据处理事务和做出决策，某公司通过大数据收集到该公司销售的某电子产品 1 月至 5 月的销售量如下表.

月份 x	1	2	3	4	5
销售量 y（万件）	4.9	5.8	6.8	8.3	10.2

该公司为了预测未来几个月的销售量，建立了 y 关于 x 的回归模型：$\hat{y}=\hat{u}x^2+\hat{v}$.

（1）根据所给数据与回归模型，求 y 关于 x 的回归方程（$\hat{u}$ 的值精确到 0.1）；

（2）已知该公司的月利润 z（单位：万元）与 x，y 的关系为 $z=24\sqrt{x}-\dfrac{5y+2}{\sqrt{x}}$，根据（1）的结果，问该公司哪一个月的月利润预报值最大？

参考公式：对于一组数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，其回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

【20~21 题答案】

【答案】（1）$y=0.2x^2+5$；

（2）第 9 个月的月利润预报值最大

【解析】

【分析】（1）根据数据与回归方程的公式进行求解 $u,\hat{v}$，得到回归方程；（2）结合第一问所求得到 z 关于 x 的函数，通过导函数求出单调区间，极值及最值，求出答案.

【小问 1 详解】

令 $w=x^2$，则 $\overline{w}=\dfrac{1+4+9+16+25}{5}=11$，$\overline{y}=\dfrac{4.9+5.8+6.8+8.3+10.2}{5}=7.2$，

$$u=\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(w_i-\overline{w}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{5}\left(w_i-\overline{w}\right)^2}=\frac{-10\times(-2.3)+(-7)\times(-1.4)+(-2)\times(-0.4)+5\times1.1+14\times3}{(1-11)^2+(4-11)^2+(9-11)^2+(16-11)^2+(25-11)^2}=\frac{81.1}{374}\approx0.2,$$

$\hat{v}=\overline{y}-\hat{b}\overline{w}=7.2-0.2\times11=5$，所以 y 关于 x 的回归方程为 $y=0.2x^2+5$；

【小问 2 详解】

由（1）知：$y=0.2x^2+5$，

$z=24\sqrt{x}-\dfrac{5y+2}{\sqrt{x}}=24\sqrt{x}-\dfrac{5\left(0.2x^2+5\right)+2}{\sqrt{x}}=24\sqrt{x}-x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{27}{\sqrt{x}}$，令 $h(x)=24\sqrt{x}-x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{27}{\sqrt{x}}(x>0)$，

$$h'(x)=\frac{12}{\sqrt{x}}-\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{27}{2}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{-3x^2+24x+27}{2x\sqrt{x}}=\frac{-3(x-9)(x+1)}{2x\sqrt{x}}(x>0)$$

令 $h'(x)>0$ 得：$0<x<9$，令 $h'(x)<0$ 得：$x>9$，令 $h'(x)=0$ 得：$x=9$，所以

$h(x)=24\sqrt{x}-x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{27}{\sqrt{x}}(x>0)$ 在 $x=9$ 处取得极大值，也是最大值，$h(x)_{\max}=h(9)=72-27-9=36$

所以第 9 个月的月利润预报值最大.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，点 M 满足直线 AM 与直线 BM 的斜率之积为 $-\dfrac{3}{4}$，点 M 的轨迹为曲线 C.

（1）求 C 的方程；

（2）已知点 $F(1,0)$，直线 $l:x=4$ 与 x 轴交于点 D，直线 AM 与 l 交于点 N，是否存在常数 λ，使得 $\angle MFD=\lambda\angle NFD$？若存在，求 λ 的值；若不存在，说明理由.

【21~22 题答案】

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 且 $x\neq\pm2$；

（2）存在 $\lambda=2$，理由见解析.

【解析】

【分析】（1）利用斜率两点式，结合直线斜率之积为定值列方程，即可求 M 的轨迹为曲线 C，注意 $x\neq\pm2$.

（2）设 $N(4,n)$、直线 AM 为 $y=\dfrac{n}{6}(x+2)$，联立曲线 C，应用韦达定理求 M 坐标，进而应用 n 表示 $\tan\angle MFD$、$\tan\angle NFD$，结合二倍角正切公式判断 $\tan\angle MFD$ 与 $\tan\angle NFD$ 的数量关系，即可得解.

【小问 1 详解】

设 $M(x,y)$，则 $k_{AM}k_{BM}=\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=-\frac{3}{4}$ 且 $x\neq\pm2$，

所以 M 的轨迹为曲线 C 方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 且 $x\neq\pm2$.

【小问 2 详解】

设 $N(4,n)$，则直线 AM 为 $y=\frac{n}{6}(x+2)$，

联立曲线 C 得：$\begin{cases}y=\frac{n}{6}(x+2)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，整理得：$(n^2+27)x^2+4n^2x+4n^2-108=0$，

由题设知：$x_A+x_M=-\frac{4n^2}{n^2+27}$，则 $x_M=\frac{54-2n^2}{n^2+27}$，故 $y_M=\frac{n}{6}\times\frac{108}{n^2+27}=\frac{18n}{n^2+27}$，

又 $\tan\angle MFD=\frac{y_M}{x_M-1}=\frac{6n}{9-n^2}$，$\tan\angle NFD=\frac{n}{3}$，

所以 $\frac{2\tan\angle NFD}{1-\tan^2\angle NFD}=\frac{\frac{2n}{3}}{1-\frac{n^2}{9}}=\frac{6n}{9-n^2}=\tan\angle MFD$，即 $\angle MFD=2\angle NFD$，

所以存在 $\lambda=2$，使 $\angle MFD=2\angle NFD$.

22. 已知函数 $f(x)=e^x+\sin x-\cos x$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

（1）证明：当 $x\geq0$ 时，$f'(x)\geq2$；

（2）设 $g(x)=f(x)-2x-1$，证明：$g(x)$ 有且仅有 2 个零点.

【22~23 题答案】

【答案】（1）证明过程见解析

（2）证明过程见解析

【解析】

【分析】（1）令 $h(x)=e^x+\cos x+\sin x$，利用导数判断 $h(x)$ 的单调性，并求出其最小值即可证明；

（2）由（1）可知，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，利用零点存在性定理可证明在这个区间上有一个零点，通过构造函数即可证明 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，同理利用零点存在性定理可证明在这个区间上有一个零点，即可得证.

【小问 1 详解】

由 $f'(x)=\mathrm{e}^x+\cos x+\sin x$，

设 $h(x)=\mathrm{e}^x+\cos x+\sin x$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^x-\sin x+\cos x$，

当 $x\ge 0$ 时，设 $p(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，$q(x)=x-\sin x$，

$\because p'(x)=\mathrm{e}^x-1\ge 0$，$q'(x)=1-\cos x\ge 0$，

$\therefore p(x)$ 和 $q(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore p(x)\ge p(0)=0$，$q(x)\ge q(0)=0$，

$\therefore$ 当 $x\ge 0$ 时，$\mathrm{e}^x\ge x+1$，$x\ge \sin x$，

则 $h'(x)=\mathrm{e}^x-\sin x+\cos x\ge x+1-\sin x+\cos x=(x-\sin x)+(1+\cos x)\ge 0$，

$\therefore$ 函数 $h(x)=\mathrm{e}^x+\cos x+\sin x$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore h(x)\ge h(0)=2$，

即当 $x\ge 0$ 时，$f'(x)\ge 2$；

【小问 2 详解】

由已知得 $g(x)=\mathrm{e}^x+\sin x-\cos x-2x-1$，

①当 $x\ge 0$ 时，

$\because g'(x)=\mathrm{e}^x+\cos x+\sin x-2=f'(x)-2\ge 0$，

$\therefore g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $\because g(0)=-1<0$，$g(\pi)=\mathrm{e}^\pi-2\pi>0$，

$\therefore$ 由零点存在性定理可知 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上仅有一个零点，

②当 $x<0$ 时，

设 $m(x)=\dfrac{2-\sin x-\cos x}{\mathrm{e}^x}(x<0)$，则 $m'(x)=\dfrac{2(\sin x-1)}{\mathrm{e}^x}\le 0$，

$\therefore m(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

$\therefore m(x)>m(0)=1$，

$\therefore \mathrm{e}^x+\cos x+\sin x-2<0$，

$\therefore g'(x)=e^{x}+\cos x+\sin x-2<0$，

$\therefore g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，

又$\because g(0)=-1<0$，$g(-\pi)=e^{-\pi}+2\pi>0$，

$\therefore$由零点存在性定理可知$g(x)$在$(-\infty,0)$上仅有一个零点，

综上所述，$g(x)$有且仅有 2 个零点.