立足基础、稳中求新、关注核心素养
——2021 年高考“数列”专题命题分析与备考建议

孔繁晶 (徐州高等师范学校 221116)

摘 要:对 2021 年高考 10 套数学试题共计 18 道数列问题的考点、分值、文理差异、难易程度、创新情况等进行比较与分析,总结得出试题命制具有立足基础、适度综合、灵活应用、稳中求新的特征,并以此探索高考中数列试题的命制趋势,就高三备考提出相关建议.

关键词:2021 年高考;数列;命题分析;备考建议

文章编号:1004-1176(2022)02-0030-04

《普通高中数学课程标准(2017 年版)》指出数列作为一类特殊函数,是反映离散过程的基本模型.它不仅是数学课程的重要研究对象,在其他领域和日常生活中也有着广泛的应用,其研究过程还蕴含了丰富的数学思想方法,对培养学生逻辑推理、数学运算和数学建模等能力有着不可忽视的作用. 2021 年高考共计 10 套数学试题,每套试题均将数列作为主干知识进行考查. 试题编制突出数学本质,重视理性思维,坚持素养导向、能力为重的考查方向.

1 考查内容分析

综合分析 2021 年高考数学试题,其数列命题围绕等差、等比两类特殊数列展开,重点考查概念的理解、基本量的计算以及蕴含的数学思想.

1.1 考点分布合理

2021 年 10 套高考数学试题共计 18 道数列问题,统计如表 1. 2021 年高考数列考查内容分布均衡,主要集中在以下几个方面:数列的表示方法,项与和的关系;等差(比)数列的判断和性质;等差(比)数列的通项公式、前 n 项和公式;利用递推关系求通项;数列求和;数列的综合应用等. 其中,等差(比)数列的概念、性质、通项公式以及前 n 项和公式仍是考查重点. 部分试题还与函数、方程、不等式、简易数论、数学归纳法相结合进行考查,如北京卷第 21 题,浙江卷第 10 题、第 20 题,天津卷第 19 题等.

表 1 2021 年高考数学试卷数列问题考查情况统计

卷别		题号	题型	分值	考点
全国甲卷	理科	7	选择题	5	等比数列通项、前 n 项求和,充要条件
		18	解答题	12	等差数列判断、通项以及前 n 项求和
	文科	9	选择题	5	等比数列前 n 项求和,等比数列性质
		18	解答题	12	等差数列判断、通项以及前 n 项求和
全国乙卷	理科	19	解答题	12	等差数列判断、通项,数列项与和的关系
	文科	19	解答题	12	等差(比)数列通项、前 n 项求和,数列求和
新高考Ⅰ卷		16	填空题	5	数列的综合运用
		17	解答题	10	递推数列求通项,等差数列通项、前 n 项求和
新高考Ⅱ卷		17	解答题	10	等差数列通项、前 n 项求和
北京卷		6	选择题	4	等差数列性质
		10	选择题	4	数列求和,数列的综合运用
		21	解答题	15	数列的综合运用
天津卷		19	解答题	15	等差(比)数列判断、通项、前 n 项求和
上海卷		8	填空题	5	等比数列前 n 项求和
		12	填空题	5	数列的递推关系、求和,数列的综合运用
		19	解答题	14	等差(比)数列通项,等差数列前 n 项求和
浙江卷		10	选择题	4	数列递推关系,数学归纳法,数列的综合运用
		20	解答题	15	数列项与和的关系,等比数列通项、数列求和

1.2 分值比重相当

10 套试题中,数列内容均有一道解答题,选择题、填空题数量各有不同. 总分值在 10 ~ 24 分之间,全国统一命题卷相对偏低,在 10 ~ 17 分之间,地方自主命题卷相对偏高,在 15 ~ 24 分之间.

1.3 文理差异存在

全国甲、乙卷均针对文、理科学生的能力差异进行分别命题. 其中,全国甲卷解答题采用同一题源,理科以“结构不良问题”形式进行考查,文科则以传统形式进行设计. 可见,文理科命题差异依然存在,理科思维跨度稍大,更加注重抽象与逻辑思维,文科则偏重基础知识与基本技能.

1.4 难度层次分明

全国统一命题的数列试题均以容易题和中档题为主,主要考查基础知识和基本方法. 值得注意的是,首次问世的新高考Ⅰ卷数列填空题综合性较强,考查了学生发现、分析、解决问题的能力. 而数列解

答题一改江苏卷多年风格，未与其他知识点交汇命题，也不再以压轴题的身份出现.

地方自主命题的数列试题呈现多层次考查态势.北京卷、上海卷的填空、选择题各一道，一道容易题，一道较难题，浙江卷只有一道选择题，难度较大.而解答题题号均相对偏后，属于中档题或难题，北京卷的解答题为压轴题，难度大.

1.5　问题力求创新

2020年10月，中共中央、国务院在《深化新时代教育评价改革总体方案》中提出要构建引导学生德智体美劳全面发展的考试内容体系，改变相对固化的试题形式，增强试题的创新性.2021年高考数列试题践行这一思路，出现以传统文化为情境的微型建模、加大开放题的创新力度，将考查指向核心素养和关键能力，发挥高考的选拔功能.如全国甲卷理科第18题、新高考Ⅰ卷第16题、北京卷第21题.

2　命题思路分析

2021年高考数列试题紧扣考试大纲，遵循"基础性、综合性、应用性、创新性"的命题原则，立足基础，稳中求新，关注学科核心素养，落实"立德树人，服务选才"的核心功能.

2.1　立足基础，重视基础知识、基本技能和基本方法

等差、等比数列是高中阶段研究的两类重要特殊数列.《普通高中数学课程标准(2017年版)》要求探索并掌握等差(比)数列的概念、变化规律、通项公式和前n项和公式.因此，基本量、基本运算一直都是高考考查的重点.

例1　(新高考Ⅱ卷第17题)记S_n是公差不为0的等差数列$\{a_n\}$的前n项和，$a_3=S_5$，$a_2a_4=S_4$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n；

(2) 求使$S_n>a_n$成立的n的最小值.

评析　本题考查等差数列的通项及前n项和公式，是典型的基本量计算题.题目着眼等差数列五个量a_1,a_n,d,n,S_n之间的关系，通过构造方程组，求得a_n,S_n，再建立一元二次不等式确定n的最小值.这类问题属于高考数学高频考点，重点考查通性通法，方程、整体代换等思想以及数学运算素养.同时，此类解答题还是考查学生数学语言能力的良好载体，书写过程不必繁琐，但不可缺少关键步骤，例如代数化简、写出基本量等.

例2　(全国甲卷文科第9题)记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和.若$S_2=4$，$S_4=6$，则$S_6=$(　　).

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

例3　(北京卷第6题)已知$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个等差数列，且$\frac{a_k}{b_k}(1\leqslant k\leqslant 5)$是常值，若$a_1=288$，$a_5=96$，$b_1=192$，则$b_3$的值为(　　).

A. 64　　B. 100　　C. 128　　D. 132

评析　上述两道例题，依然考查等差(比)数列的通项、前n项和以及性质.在解题时若能灵活运用性质，将其与基本量运算相结合，如例2依题意知"S_2,S_4-S_2,S_6-S_4成等比数列"，例3利用"$2b_3=b_1+b_5$"均可简化计算、节约时间.这也体现了高考命题小题考"小"、解题"多路径"的特征.

例4　(全国乙卷文科第19题)设$\{a_n\}$是首项为1的等比数列，数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{na_n}{3}$.已知a_1，$3a_2$，$9a_3$成等差数列.

(1) 求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 记S_n和T_n分别为$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和，证明：$T_n<\frac{S_n}{2}$.

评析　纵观多年各地考题，数列求和问题屡"考"不鲜.本题题干清晰，易于入手，第(1)小题构造方程求解；第(2)小题考查形如$c_n=a_n\cdot b_n$的数列求和(其中$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列)，需利用错位相减法和等比数列前n项和公式分别求得T_n和S_n，再用作差法完成不等式证明.处理此类问题需要逻辑清晰、公式熟练，其中，错位相减法也是高考数学中考查学生数学运算能力极好的载体.

2.2　适度综合，关注数学本质、理性思维和关键能力

高中数学各知识点并非互相孤立，而是相互关联的.因此，近年高考命题遵循覆盖全面、适度综合的原则.所谓综合，既可指内容，如章节内部、章节之间、跨学科的综合，也可指能力，如联合考查多个核心素养，以促进师生重视知识间的逻辑关系，重视数学本质，重视理性思维和关键能力的培养.

例5　(新高考Ⅰ卷第17题)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, n\text{为奇数},\\ a_n+2, n\text{为偶数}.\end{cases}$

(1) 记$b_n=a_{2n}$，写出b_1,b_2，并求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 求$\{a_n\}$的前20项和.

评析　本题位于试卷解答题第一题，无疑应该属于基础题一类.但递推数列与等差数列的结合，又涉及分奇偶讨论，这样相对综合的问题难住了不少考生.第(1)问关键在于通过奇偶分支写出"$b_{n+1}=a_{2n+2}=a_{2n+1}+1=a_{2n}+2+1=a_{2n}+3=b_n+3$"，第(2)问则需要继续依据奇偶项分类，通过分组求

和得出 S_{20}. 由此可见,所谓大题考“质”,就是避开一些命题固定套路,回归数列本质,通过列举找寻规律,用最原始、最简单的办法突破问题.

例 6 (全国乙卷理科第 19 题) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积. 已知 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$.

(1) 证明:数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

评析 本题属于中档题. 难点有二:其一,以往训练学生比较多的是“前 n 项和”,而本题以“前 n 项积”命题,学生需借助所学知识融会贯通,重点放在知识的迁移上;其二,S_n 身份双重,既满足 $S_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$,也满足 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$. 题目运算量不大,重点考查学生对于数列的项与前 n 项和(积)的关系的理解,体现了“多考点想,少考点算”的命题理念.

例 7 (全国甲卷理科第 7 题) 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q,前 n 项和为 S_n. 设甲:$q>0$,乙:$\{S_n\}$ 是递增数列,则(　　).

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

例 8 (上海卷第 10 题) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_{n+1}=\frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}(n\in\mathbf{N}^*)$. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,则(　　).

A. $\frac{1}{2}<S_{100}<3$　　B. $3<S_{100}<4$

C. $4<S_{100}<\frac{9}{2}$　　D. $\frac{9}{2}<S_{100}<5$

例 9 (浙江卷第 20 题) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,$a_1=-\frac{9}{4}$,且 $4S_{n+1}=3S_n-9(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $3b_n+(n-4)a_n=0(n\in\mathbf{N}^*)$,记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n. 若 $T_n\leqslant\lambda b_n$,对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,求实数 λ 的取值范围.

评析 数列作为高考数学重要考点,既可以独立命题,也可以在与其他数学知识、方法交汇处命题,从而全面考查学生的学科核心素养. 常见类型是与函数方程、不等式、数学归纳法、简易数论等知识相结合,且综合考查多个知识点,难度较大,尤其在自主命题地区常以压轴题身份出现.

例 7 相对简单,将等比数列通项、性质以及前 n 项和与四种条件相结合,依据定义进行充分性和必要性的判断. 例 8 难度较大,考查了递推数列求通项和裂项求和,还融合了利用导数判断函数单调性、数学归纳法以及不等式放缩等内容,着实对学生的综合应用能力进行了考查,具备选材价值. 例 9 第(1)问考查 S_n 与 a_n 关系,属于基本题型,第(2) 问借助错位相减法求 T_n,转化成 $\lambda(n-4)+3n\geqslant 0$ 恒成立问题,考查了特殊数列求和的常见方法以及分类讨论等重要数学思想.

2.3 灵活应用,突出理论联系实际,学以致用

新一轮教学改革倡导理论联系实际,学以致用,体现数学的应用价值. 故高考试题命制将会彰显数学学科内外的应用,考查学生必备知识水平与关键能力,逐级深化构建德智体美劳全面发展的考试体系.

例 10 (北京卷第 10 题) 数列 $\{a_n\}$ 是递增的整数数列,且 $a_1\geqslant 3$,$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=100$,则 n 的最大值为(　　).

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

评析 本题虽然容易,却从简易背景入手,考查学生应用等差数列前 n 项和等知识解决问题的能力,显现出学科内应用的命题思路.

例 11 (上海卷第 19 题) 已知某企业 2021 年第一季度的营业额为 1.1 亿元,以后每个季度的营业额比上个季度增加 0.05 亿元,该企业第一季度的利润为 0.16 亿,以后每季度比前一季度增长 4%.

(1) 求 2021 年起前 20 季度营业额的总和;

(2) 请问哪一季度的利润首次超过该季度营业额的 18%?

评析 本题以求企业 20 季度营业额之和以及利润探讨命题,引导学生关注社会生活,理解数学的应用价值. 第(1) 问考查等差数列前 n 项和公式的应用,第(2) 问利用等差(比) 数列通项知识建立不等关系,进而确定何时“首次超过”,意在考查学生学以致用的意识以及数学抽象、数学建模等学科核心素养.

此外,此应用背景源于教材习题,由此可见,高考命题不仅考查的知识点、方法技能不会脱离课本,就连题设背景往往也源于课本. 因此,再次提醒日常教学和复习必须重视教材.

2.4 稳中求新,体现素养导向

2021 年是高考改革之年,无论是全国统一命题还是地方自主命题,试题都在一个“稳”字的基础上着力创新. 就数列试题的命制来看,在考查基本知识

和关键能力的同时，更加注重对学生创新性运用的考查.除了常考常新的“新定义”问题外，还增加了开放性问题的数量，并从设问方式上、背景设定上作了创新.这既反映了高考数学的考查方向，也体现了人才选拔的意愿.

例 12 （全国甲卷理科第 18 题）已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数.记 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，从下面 ①②③ 中选取两个作为条件，证明另外一个成立.① 数列$\{a_n\}$是等差数列；② 数列$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列；③$a_2=3a_1$.注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.

评析 本题为全国甲卷理科试题的中档题，设问方式相对新颖，试题给出多个条件，要求构建一个命题并加以证明.这类没有明确结构或解决途径的“结构不良问题”相对开放，给学生充分的选择空间.因其需要学生准确表征，自主建构，对于发展学生的创新思维和迁移能力有着丰富的价值.就本题来看，学生可以从多个角度分析，考虑多种可能，组合出三个命题，然后结合条件以及经验判断，①③为条件，② 为结论或是 ②③ 为条件，① 为结论（即为全国甲卷文科第 18 题）.在这个过程中，重点考查学生对于数学本质的理解，评测其思维的系统性、灵活性、深刻性以及创造性.

例 13 （新高考 Ⅰ 卷第 16 题）某校学生在研究民间剪纸艺术时，发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折.规格为 20 dm × 12 dm 的长方形纸，对折 1 次共可以得到 10 dm × 12 dm，20 dm × 6 dm 两种规格的图形，它们的面积之和 $S_1=240\ \mathrm{dm}^2$，对折 2 次共可以得到 5 dm × 12 dm，10 dm × 6 dm，20 dm × 3 dm 三种规格的图形，它们的面积之和 $S_2=180\ \mathrm{dm}^2$，以此类推.则对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为______；如果对折 n 次，那么 $\sum\limits_{k=1}^{n}S_k=$______ dm^2.

评析 本题以我国传统剪纸艺术为背景，具备“新、巧、活”的特征.引导学生通过特例分析推理，体验从特殊到一般的探索过程，并构建数列模型.在确定通项时，既可以利用归纳推理得出各单位小长方形的面积之和 S_k，也可以通过递推关系$\dfrac{S_k}{k+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{S_{k-1}}{k}$推导得出$S_k=\dfrac{240}{2^k}\cdot(k+1)$，之后利用错位相减法完成求和.整个解答过程体现了“以生考熟”，鼓励多种途径思维创新，蕴含转化与化归等重要数学思想，考查了学生数学抽象、数学建模、逻辑推理、数学运算等学科核心素养.该题的命制体现了数学教学及评价正在从“解题”向“解决问题”进行转变，凸显了学科素养立意的评价核心.

3 备考建议

数列是高中数学的重要内容，具有内涵丰富、方法灵活、应用广泛的特点.纵观 2021 年高考数学中的数列试题，深感其难度基本稳定，而深度、广度以及新意都在不断提升，既实现了“选材”的目的，又指明了课程改革的方向.为了使 2022 年高考数列复习更加具有针对性，笔者提出以下备考建议.

3.1 研究试题，把握方向

高考试题既是服务选材的尺，又是引导教学的旗.新一轮高考改革提出“一核”“四层”“四翼”，积极促使命题向素养导向发展.因此，在复习备考中，教师要深入研究试题，捕捉命题内容、难度、题型等线索，并且透过现象看本质，总结规律求推广，以此合理高效地分配备考时间和精力，有的放矢地进行复习.如开展近几年的热点 —— 结构不良问题的探讨，引导学生深度学习，体会数学本质，归纳一些解决问题的方法：由简到繁，优先选择条件单一或者运算方便的；由熟到生，优先选择熟悉的式子或者条件，等等.

3.2 夯实基础，透析本质

九层之台，起于垒土.2021 年高考数列试题依旧坚持回归数学本质，重视基础知识、基本技能的考查，不设“繁难偏怪”的问题，注重通性通法的研究，淡化一些特殊的技巧.因此，在复习备考中，一方面要引导学生用好教材，重视知识的生成与发展，多想多悟，深化对于数学本质的理解；另一方面要帮助学生夯实基础，做好“一题多解”“多题一解”的训练与反思，从通性通法中汲取解题思路，优选方法，强化计算.假以时日才能做到基础题稳扎稳打，万无一失，综合题化繁为简，逐级破解.

3.3 着眼应用，提升素养

数学源于生活，又作用于生活，有着丰富的应用价值.从近年高考试题可以看出，数列命题坚持从学生认知水平出发，本着“重思维、重应用、重创新”的理念，以学科内外的应用为依托，设计开放性问题、创新型应用问题，深化对于学生数学抽象、逻辑推理、数学建模等核心素养的考查.因此，在复习备考中，教师要着眼应用，勇于创新.一方面做好系统化教学，另一方面开展主题式研究，重视思维力和意志力的训练，引导学生用数学眼光观察世界，用数学思维思考世界，用数学语言表达世界，使得学生在考场上遇到新问题能够不乱不惧，会思考、敢尝试、能突破，切实提升学科核心素养.