

拨云见雾 回归本质

——“三个二次”教学的相互转化

安徽省广德市教体局教师发展中心教研室 冯祖军 (邮编:242200)

安徽省广德市桃州中学教育集团北校区 陈培 (邮编:242200)

摘要 一元二次方程、二次函数以及一元二次不等式三者之间存在着紧密的联系,在各种各样的试题中反复出现.在具体解答中,时常将问题从一个类型转化到另一个类型来解答.这也体现出数学类比和数形结合的思想.当然这部分内容对于初中生来说难度较大,本文尝试分析三者之间的联系及区别,利用具体实例分析三者之间如何转化并解决相关问题.

关键词 函数;方程;不等式;数形结合

1 学情分析

在平时的教学和测试中,有关二次函数和一元二次方程及一元二次不等式相关联的习题,学生普遍掌握得不好,理解也很有困难,其主要问题是学生对这三者之间的联系和转化掌握不好,特别是对二次函数的概念及性质理解不好,不能把一元二次方程以及一元二次不等式统一到二次函数的概念及性质上来.为此,我结合各地的教材及历年中考试卷上的部分试题,甚至翻开尘封很久的高中课本,详细归纳了三者之间的联系,重在探讨,厘清三者之间纠缠不清的内在联系,让学生拨开云雾,看清三者之间的联系、转化,充分理解数形结合在三者之间的本质联系.

2 追寻本源

在沪科版教材八年级下册第17章,我们开始学习一元二次方程的内容,教科书按照“实际问题——建立数学模型——探究数学模型的解——回到实际问题的解决”思路展开,从学生熟悉的实际问题入手,让学生经历自主探索与交流合作的活动,体会方程源于实践,同时方程又

是解决问题的重要工具.再利用根的判别式判定方程是否有根,选学了根与系数的关系,最后利用方程解决实际问题.紧随其后,在九年级上学期21章的二次函数,我们可以发现无论是形式还是具体内容上都与一元二次方程很像,有的同学甚至分不清哪个是方程哪个是函数.作为三者之一的一元二次不等式正式出现在课本正文中,还是在高中课本上.但是我们发现,二次函数这一章配备的练习题大量出现了各种各样的一元二次不等式的试题.从内容上看,一元二次方程的解是二次函数与 x 轴的交点横坐标,根的判别式可以用来判断方程根的情况,同时也用来判断函数图象与 x 轴交点情况,利用函数图象以及 x 轴的交点横坐标可以写出一元二次不等式的解集.在二次函数的内容中,还特意强调两个函数的交点坐标求解方法,即联立方程组,并拓展到函数值大小比较的方法.由此,三者之间算是你中有我,我中有你了,纠缠不清,我们的同学要想理顺三者之间的关系,我认为重点还是思维方式的转变,这才是看清三者真正面目的关键.

即 $y = \frac{2p}{y_3 + y_4} \left(x + \frac{y_3 y_4}{2p} \right)$, 因为

$$\frac{y_3 y_4}{2p} = \frac{y_1 y_3 y_2 y_4}{2p y_1 y_2} = \frac{4p^2 t^2}{-4p^2 s} = -\frac{t^2}{s},$$

所以直线PQ过定点 $\left(\frac{t^2}{s}, 0 \right)$.

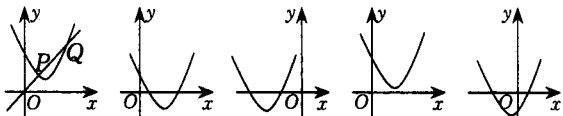
参考文献

- 1 于新华. 二次曲线中极点与极线性质的初等证法[J]. 数学通讯(下半月), 2020(12): 40-41+57
- 2 高继浩. 一道武汉市质检试题的探究与变式[J]. 数学通讯(上半月), 2021(8): 32-33

(收稿日期:2021-09-28)

3 问题提出

我们来看安徽中考数学的一道选择题的压轴题:如图,一次函数 $y=x$ 与二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象相交于 P 、 Q 两点,则函数 $y=ax^2+(b-1)x+c$ 的图象可能是 ()



题图 A. B. C. D.

3.1 解法初探

本题看上去是二次函数图象的判断问题,大多数同学从已知二次函数图象可以看出常数项 c 和一次项系数 b 的正负,也就是可以排除 B、D 两个选项,但是另外两个就难以判断了. 经过仔细分析,我们发现,已知图象中除了二次函数还有正比例函数图象,它有什么作用呢? 原来,正比例函数 $y=x$ 和二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象有两个交点,所以一元二次方程 $ax^2+bx+c=x$,即 $ax^2+(b-1)x+c=0$ 有两个不相等的实数根. 不仅如此,从图象可以看出两个交点都在第一象限,也就是横坐标都是正数,也可以说方程 $ax^2+bx+c=x$ 有两个不相等的正实数根,说明了函数 $y=ax^2+(b-1)x+c$ 与 x 轴有两个不同的交点,且都在正半轴,答案就呼之欲出了.

经过上题的研究我们发现,表面上是二次函数图象的判断,实际上是两个函数联立的方程组,转化成一元二次方程,从交点的情况判断方程组解的情况,从而得到相应二次函数与 x 轴的交点个数与横坐标的正负. 这题充分反应了一元二次方程与二次函数之间的联系.

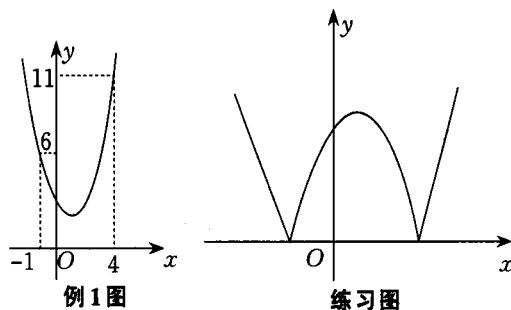
3.2 解法再探

例 1 抛物线 $y=x^2+bx+3$ 的对称轴为直线 $x=1$,若关于 x 的一元二次方程 $x^2+bx+3-t=0$ 在 $-1<x<4$ 的范围内有实数根,则 t 的取值范围是_____.

很多同学拿到这个题目第一反应是先算 b 的值,再用根的判别式来求出 t 的范围,这时候发现方程是在特定的范围内有实数根,根的判别式似乎不能解决这个问题. 这时,我们如果将方程变形为 $x^2+bx+3=t$,就可以发现方程的左边是二次函数的解析式,右边相当于函数值,问题从

方程自然过渡到函数在自变量确定的前提下求解值域. 这样,结合二次函数图形,很容易得出答案,求解答案时要注意函数值的最值不一定是左右端点,如同这一题,最小值就是顶点纵坐标,并且最后答案是半开半闭区间. 具体解答过程是利用对称轴求出 $b=-2$,结合函数图象可以看出在 $-1<x<4$ 的范围内,二次函数 $y=x^2+bx+3$ 的最小值为 2,并且是实心,最大值为 11,为空心,所以最后答案为 $2 \leq t < 11$. 类似这样的题目还有很多,特别是带绝对值的方程根的个数讨论,将方程变形为函数,使其转化为函数值的问题,就变得很简单.

这里举一个例子,供大家练习. 已知函数 $y=|x^2-2x-3|$ 大致图象如图所示,如果方程 $|x^2-2x-3|-m=0$ 有两个不相等的实数根,则 m 的取值范围是_____.



例 1 图

练习图

3.3 解法深入

在各地的关于二次函数的检测卷中,函数与方程之间的转换也经常作为选择填空的压轴题出现. 下面以某地第一学期九年级期末测试卷第 10 小题为例. “如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有两个公共点,那么一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根.”请你根据这句话的理解,解决下面问题:若 $m, n (m < n)$ 是关于 x 的方程 $(x-a)(x-b)=1$ 的两根,且 $a < b$,则 a, b, m, n 的大小关系是 ()

- A. $m < a < b < n$ B. $a < m < n < b$
C. $a < m < b < n$ D. $m < a < n < b$

这一题的难度集中在从一元二次方程 $(x-a)(x-b)=1$ 出发,找不到求解方程两个根 m, n 的方法,加上方程自身的两个参数 a, b 也无法求出,同学们就无从下手,找不到问题的切入点. 这道题,我们必须从题目表面的方程求解转化到函数值上,我们首先找到这题与一元二次方程相关

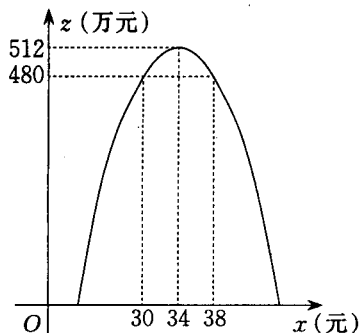
的二次函数 $y=(x-a)(x-b)$,这是二次函数的交点式也就是两根式,其中 a, b 是二次函数与 x 轴两个交点的横坐标.我们将方程 $(x-a)(x-b)=1$ 的两个根 m, n 看作是二次函数 $y=(x-a)(x-b)$ 在函数值是1时的自变量值,结合二次函数开口方向向上,自然得出本题答案是A.

4 实际运用

初中阶段作为方程、函数和不等式三者中的一元二次不等式,安徽省不作为考试内容,因此初中阶段这部分内容作为选学内容出现,考题也只是出现在二次函数综合实际应用题的最后一问,即在规定的利润范围时求出自变量的取值范围.这实际上是解一个一元二次不等式,书本习题及基础训练上多次出现.这里以沪科版九年级数学上《基础训练》为例说明.

例2 某电子产品每件的生产成本为18元,公司按定价40元出售,每月可销售20万件,为了增加销量,公司决定采取降价的办法,经市场调研,每降价1元,月销量可增加2万件.

(1)求月销售利润 w (万元)与售价 x (元/件)之间的函数关系式



(2)为获得最大销售利润,每件产品的售价应为多少元?此时,最大月销售利润是多少?

(3)请你通过(1)中的函数关系式及其大致图象帮助公司确定产品的售价范围,使月销售利润不低于480万元.

前面两个小题属于常规题型,主要考查二次函数的实际应用,根据题目所给条件,求出答案.

(1) $w=(x-18)[20+2(40-x)]=-2x^2+136x-1800$. (2)在第一小题的基础上,对所求二次函数进行配方,即可求出当售价为34元时,可以获得最大销售利润,最大利润为512万元.本题主要难点是第三小题,很多同学根据题意直接

写出一元二次不等式: $w \geq 480$,即 $-2x^2+136x-1800 \geq 480$,就本题问题来说,所列不等式是正确的,关键是我们初中阶段无法解出该不等式.其实,题目也给出了非常明显的提示:“通过(1)中的函数关系式及其大致图象.”这就涉及到一元二次不等式的求解问题,前面也提到一元二次不等式是高中内容,并且解集并不是代数运算求解,而是利用相应一元二次方程求出二次函数与 x 轴的两个交点,结合函数图象,得出解集.具体解答是:令 $-2x^2+136x-1800=480$,解得 $x_1=30, x_2=38$.因二次函数 $w=-2x^2+136x-1800$ 图象开口向下,与直线 $w=480$ 交于 $(30, 480), (38, 480)$ 两点,故当 $30 \leq x \leq 38$ 时, $w \geq 480$,即当售价不小于30元/件,且不大于38元/件时,月销售利润不低于480万元.

虽然一元二次不等式的解法不作为中考考试内容,但是在沪科版教材中第21章第3节二次函数与一元二次方程的课后习题中,出现了各种一元二次不等式求解问题.我认为这一节内容的标题虽然只是提到一元二次方程与二次函数,而我们仔细探究并从教材设计找到一元二次不等式的相关内容,其实,这也是为今后高中学习基本不等式中的一元二次不等式内容作了准备,体现了初高中衔接的思想.

5 回顾反思

在教学过程中,通过本节课的主题复习,学生能初步了解方程、函数和不等式三者之间的联系,体会等价转化思想.虽然如此,学生在完成专项复习练习题中仍然出现不知道如何转化,甚至看不懂题意的情况.要认识到我们初中生在现有的认知水平下,熟练掌握三者之间的转化是有困难的.今后的教学与复习,我们应该利用每一份试卷中出现类似的习题多加分析,耳濡目染,相信我们的学生一定能找到联系三者的那条无形的线,快速准确的求解答案,更重要的是开拓了思路,锻炼的思维,为今后的学习打下了一个良好的基础.

参考文献

- 1 编写组. 数学教师用书(八年级下)[M]. 上海:上海科学技术出版社,2020

(收稿日期:2021-10-12)