谈直线与圆锥曲线综合问题中直线方程的合理化选择

何少杰

（清水县第六中学　甘肃　清水　741400）

摘　要：以 2017 年全国Ⅲ卷理科数学解析几何试题为例，通过对不同的直线方程形式下的多解进行比较，来谈谈对直线与圆锥曲线综合问题中直线方程形式的合理化选择，通过模拟试题进一步体会直线方程的合理选择对解题产生的积极作用，并给出对圆锥曲线备考教学的建议.

关键词：直线方程；齐次化；参数方程；二级结论

在直线与圆锥曲线综合问题中，动直线方程往往在题设中不会给出，需要考生合理设出，而在相同的问题背景下，合理地使用公式与方法可以避免繁杂的运算，因该题型运算量大，运算难度高的特点，如果选取的公式与方法不合理往往就会陷入繁复的运算泥潭，难以脱身，给考生解题带来困难. 所以如何让考生在有限的考试时间内，面对具体的问题情境选取合理的公式与方法顺利解决问题，是我们教学中应该高度关注的问题，下面笔者以一道圆锥曲线高考题为例，来谈谈在直线与圆锥曲线综合问题中如何合理使用直线方程；并对圆锥曲线备考教学提出建议.

1　真题呈现

试题　（2017 年全国Ⅲ卷理 20）已知抛物线 C：$y^2=2x$，过点 $(2,0)$ 的直线 l 交 C 于 A,B 两点，圆 M 是以线段 AB 为直径的圆.

（1）证明：坐标原点 O 在圆 M 上；

（2）设圆 M 过点 $P(4,-2)$，求直线 l 与圆 M 的方程.

2　解法探究及比较

2.1　第（1）问解析

视角 1　引入斜率 k，利用点斜式方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 设直线方程为 $y=k(x-2)$.

证法 1　①当直线 l 斜率不存在时，直线 l 方程为 $x=2$，与抛物线 C 交点为 $A(2,2)$ 与 $B(2,-2)$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，所以 $OA\perp OB$，即原点 O 在圆 M 上.

②当直线 l 斜率存在时，设直线方程为 $y=k(x-2)$，联立 $\begin{cases}y=k(x-2),\\y^2=2x,\end{cases}$ 得 $k^2x^2-(4k^2+2)x+4k^2=0$.

当 $k\neq0$ 时，$\triangle=(4k^2+2)^2-16k^4>0$，此时直线与抛物线有两个交点，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由韦达定理，得 $x_1+x_2=4+\dfrac{2}{k^2}$，$x_1x_2=4$，$y_1y_2=k(x_1-2)\cdot k(x_2-2)=k^2[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4]=-4$.

故 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$.

所以 $OA\perp OB$，即原点 O 在圆 M 上.

评析　此解法是解析几何中的通性通法，通过引入参数 k 设直线方程、联立方程、判别式、韦达定理一气呵成，通过向量的数量积为零来证明两条直线垂直，利用直径所对圆周角为直角这一性质，证明了原点在圆上. 事实上，利用向量运算解决几何问题，能将几何问题完美地转化为代数运算，从而降低了思维难度，是一种解决几何问题的有力工具.

证法 2　①当直线 l 斜率不存在时，直线 l 方程为 $x=2$，直线 l 与抛物线 C 交点为 $A(2,2)$ 与 $B(2,-2)$，则 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-1$，所以 $OA\perp OB$，即原点 O 在圆 M 上.

②当直线 l 斜率存在时，设直线方程为 $y=k(x-2)$，联立 $\begin{cases}y=k(x-2),\\y^2=2x,\end{cases}$ 得 $k^2x^2-(4k^2+2)x+4k^2=0$. 当 $k\neq0$ 时，$\triangle=(4k^2+2)^2-16k^4>0$，此时直线与抛物线有两个交点，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由韦达定理，得 $x_1+x_2=4+\dfrac{2}{k^2}$，$x_1x_2=4$，则 $y_1y_2=k(x_1-2)\cdot k(x_2-2)=k^2[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4]=-4$.

故 $k_{OA}\cdot k_{OB}=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=-1$.

基金项目：甘肃省教育科学“十四五”规划 2021 年度一般课题“核心素养视域下高中数学深度学习教学策略研究与实践”（项目编号：GS[2021]GHB1317）.

作者简介：何少杰（1985－），男，甘肃清水人，本科，中学一级教师，研究方向：中学数学教学.

所以 $OA\perp OB$,即原点 O 在圆 M 上.

评析　通过分析要证 $\angle AOB=90^{\circ}$,如果两条直线的斜率均存在,那么它们的斜率乘积必为 -1.

证法 3　①当直线 l 斜率不存在时,直线 l 方程为 $x=2$,直线 l 与抛物线 C 交点为 $A(2,2)$ 与 $B(2,-2)$,则以线段 AB 为直径的圆方程为 $(x-2)^2+y^2=4$,经验证,原点满足此方程,即原点 O 在圆 M 上.

②当直线 l 斜率存在时,设直线方程为 $y=k(x-2)$,联立 $\begin{cases}y=k(x-2),\\ y^2=2x,\end{cases}$ 得 $k^2x^2-(4k^2+2)x+4k^2=0$,当 $k\neq0$ 时,$\triangle=(4k^2+2)^2-16k^4>0$,此时直线与抛物线有两个交点,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由韦达定理,得 $x_1+x_2=4+\frac{2}{k^2}$,$x_1x_2=4$,则 $y_1y_2=k(x_1-2)\cdot k(x_2-2)=k^2[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4]=-4$,$y_1+y_2=k(x_1-2)+k(x_2-2)=k(x_1+x_2-4)=\frac{2}{k}$.

故以线段 AB 为直径的圆 M 圆心坐标为 $(2+\frac{1}{k^2},\frac{1}{k})$. 又因为 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{2\sqrt{(1+k^2)(1+4k^2)}}{k^2}$,

则圆 M 半径为 $\frac{\sqrt{(1+k^2)(1+4k^2)}}{k^2}$.

所以圆 M 的标准方程为 $(x-2-\frac{1}{k^2})^2+(y-\frac{1}{k})^2=\frac{(1+k^2)(1+4k^2)}{k^4}$.

经验证,原点满足此方程,故原点 O 在圆 M 上.

评析　此解法与前两种解法相比较,虽然也体现了通性通法的使用,但是选择了求出圆的方程这一不同的证明思路,在求取方程的过程中使用了中点坐标公式、弦长公式、圆的标准方程等,虽然思路清晰并解决了问题,但是相较之下显然此法思维路径长、使用的公式多、运算量大,是多数学生无法逾越的障碍,看到复杂的运算结果很多学生在紧张而有限的考试时间内,很可能会败下阵来选择放弃.

证法 4　①当直线 l 斜率不存在时,直线 l 方程为 $x=2$,直线 l 与抛物线 C 交点为 $A(2,2)$ 与 $B(2,-2)$,$|AB|=4$,$|OA|=2\sqrt{2}$,$|OB|=2\sqrt{2}$,所以 $|AB|^2=|OA|^2+|OB|^2$,即 $OA\perp OB$,所以原点 O 在圆 M 上.

②当直线 l 斜率存在时,设直线方程为 $y=k(x-2)$,联立 $\begin{cases}y=k(x-2),\\ y^2=2x,\end{cases}$ 得 $k^2x^2-(4k^2+2)x+4k^2=0$. 当 $k\neq0$ 时,$\triangle=(4k^2+2)^2-16k^4>0$,此时直线与抛物线有两个交点,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由韦达定理 $x_1+x_2=4+\frac{2}{k^2}$,$x_1x_2=4$,则 $y_1y_2=k(x_1-2)\cdot k(x_2-2)=k^2[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4]=-4$,$y_1+y_2=k(x_1-2)+k(x_2-2)=k(x_1+x_2-4)=\frac{2}{k}$. 又 $|AB|^2=(\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|)^2=(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=\frac{16k^4+20k^2+4}{k^4}$.

由两点间的距离公式,得 $|OA|^2=x_1^2+y_1^2$,$|OB|^2=x_2^2+y_2^2$,则 $|OA|^2+|OB|^2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2$.

而 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{8k^4+16k^2+4}{k^4}$,同理 $y_1^2+y_2^2=\frac{8k^4+4k^2}{k^4}$,从而有 $|AB|^2=|OA|^2+|OB|^2$,即 $OA\perp OB$,所以原点 O 在圆 M 上.

评析　此解法与上述解法比较,运算难度最大,先后使用了韦达定理、勾股定理、两点间距离公式、弦长公式,需要具备良好的知识储备和运算能力.

以上四种解法都是通过引入斜率 k,基于设直线的点斜式方程,联立方程进行证明的,需要注意的是,设直线的点斜式方程会遗漏掉斜率不存在的情形,每种解法都要对斜率不存在的情形进行说明,通过解法对比也可以看到,在直线方程一定的情况下,要选择思维路径短的解法,利用向量这一有力工具可以规避掉复杂的运算.

视角 2　避免讨论斜率引入参数 m,设直线方程为 $x=my+2$.

证法 5　①当直线 l 斜率为 0 时,直线 l 方程为 $y=0$,与抛物线 C 只有一个交点,不符合题意.

②当直线 l 斜率不为 0 时,设其方程为 $x=my+2$,联立 $\begin{cases}x=my+2,\\ y^2=2x,\end{cases}$ 得 $y^2-2my-4=0$. 因为 $\triangle=4m^2+16>0$,此时直线与抛物线有两个交点.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由韦达定理 $y_1+y_2=2m$,$y_1y_2=-4$,则 $x_1x_2=\frac{y_1^2}{2}\cdot\frac{y_2^2}{2}=4$.

又 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$,所以 $OA\perp OB$,即原点 O 在圆 M 上.

评析　对比以上解法,不难发现这样设直线方程降低了运算难度,避免了对斜率存在与否的讨论,优化了解题步骤. 一般如果动直线过 x 轴的定点 $(c,0)$,可将方程设为 $x=my+c$,这样可以起到简化运算,避

免讨论斜率存在与否的作用. 但需注意这样设直线方程遗漏掉了 $y=0$,需要加以说明.

视角3 “齐次化”解法,设直线方程为 $mx+ny=1$.

证法6 ①当直线 l 过原点时,直线 l 方程为 $y=0$,与抛物线 C 只有一个交点,不符合题意.

②当直线 l 不过原点时,设直线 l 方程为 $mx+ny=1$,与抛物线方程 $y^2=2x$ 联立,将方程齐次化变形为 $y^2=2x(mx+ny)$,整理,得 $y^2-2mx^2-2nxy=0$,同除以 x^2,得方程 $k^2-2nk-2m=0$,则 k_{OA},k_{OB} 为该方程的两根. 由韦达定理 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-2m$,又因为直线过点 $(2,0)$,所以 $2m=1$,即 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-1$,所以 $OA\perp OB$,即原点 O 在圆 M 上.

评析 直线与圆锥曲线综合问题中出现直线斜率之积、斜率之和为定值,可巧设直线方程,利用齐次化解法简解问题. 但需注意,这样设直线方程的缺点是不能表示过原点的直线,所以需要特别说明. 更一般地,如果直线交点为 (x_0,y_0),则需设直线方程为 $m(x-x_0)+n(y-y_0)=1$,再将曲线方程中的 x,y 分别变形为 $(x-x_0)+x_0$,$(y-y_0)+y_0$,展开之后和直线方程为 $m(x-x_0)+n(y-y_0)=1$ 联立使曲线方程二次齐次化,方程两边同除以 $(x-x_0)^2$ 得到斜率 k 的一元二次方程,再使用韦达定理求解.

视角4 利用直线的参数方程,设直线方程为 $\begin{cases}x=2+t\cos\theta,\\ y=t\sin\theta\end{cases}$($t$ 为参数).

证法7 过点 $(2,0)$ 的直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t\cos\theta,\\ y=t\sin\theta\end{cases}$($t$ 为参数),代入 $y^2=2x$,化简,得 $t^2\sin^2\theta-2t\cos\theta-4=0$.

设点 A,B 对应参数分别为 t_A,t_B,则点 A,B 坐标分别为 $(2+t_A\cos\theta,t_A\sin\theta)$,$(2+t_B\cos\theta,t_B\sin\theta)$.

由韦达定理,得 $t_A+t_B=\dfrac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}$,$t_At_B=\dfrac{-4}{\sin^2\theta}$,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4+2(t_A+t_B)\cos\theta+t_At_B$,代入化简,得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,所以 $OA\perp OB$,即原点 O 在圆 M 上.

评析 利用参数方程解决解析几何问题,总会给人一种耳目一新的感觉,因本题中的动直线过定点,可以利用直线的参数方程进行证明.

2.2 第(2)问解析

视角1 在直线方程设为 $y=k(x-2)$ 的情形下求参数 k 值.

解法1 由证法1结论知 $x_1+x_2=4+\dfrac{2}{k^2}$,$x_1x_2=4$,$y_1y_2=-4$,$y_1+y_2=\dfrac{2}{k}$,圆心坐标为 $M(2+\dfrac{1}{k^2},\dfrac{1}{k})$,$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x_1x_2+y_1y_2-4(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)+20$. 又 $P(4,-2)$ 在圆上,故 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$,化简,得 $k^2+k-2=0$,解得 $k=1$ 或 $k=-2$.

当 $k=1$ 时,直线 l 方程为 $x-y-2=0$,圆心坐标为 $(3,1)$,圆的半径为 $\sqrt{10}$,圆 M 方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=10$;

当 $k=-2$ 时,直线 l 方程为 $2x+y-4=0$,圆心坐标为 $(\dfrac{9}{4},-\dfrac{1}{2})$,圆的半径为 $\dfrac{\sqrt{85}}{4}$,圆 M 方程为 $(x-\dfrac{9}{4})^2+(y+\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{85}{16}$.

解法2 由证法3,得圆 M 的标准方程为 $(x-2-\dfrac{1}{k^2})^2+(y-\dfrac{1}{k})^2=\dfrac{(1+k^2)(1+4k^2)}{k^4}$.

又点 P 在圆上,故将 $P(4,-2)$ 代入圆的方程,化简,得 $k^2(k^2+k-2)=0$.

解得 $k=0$(舍),$k=1$ 或 $k=-2$.

当 $k=1$ 时,直线 l 方程为 $x-y-2=0$,圆 M 方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=10$;

当 $k=-2$ 时,直线 l 方程为 $2x+y-4=0$,圆 M 方程为 $(x-\dfrac{9}{4})^2+(y+\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{85}{16}$.

视角2 在直线方程设为 $x=my+2$ 的情形下求参数 m 值.

解法3 由证法5,得 $y_1+y_2=2m$,$y_1y_2=-4$,$x_1x_2=4$,$x_1+x_2=m(y_1+y_2)+4=2m^2+4$,圆心坐标为 $M(m^2+2,m)$,$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x_1x_2+y_1y_2-4(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)+20$.

又 $P(4,-2)$ 在圆上,故 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$.

化简,得 $2m^2-m-1=0$,解得 $m=1$ 或 $m=-\dfrac{1}{2}$.

当 $m=1$ 时,直线 l 方程为 $x-y-2=0$,圆心坐标为 $(3,1)$,圆的半径为 $\sqrt{10}$,圆 M 方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=10$;

当 $m=-\dfrac{1}{2}$ 时,直线 l 方程为 $2x+y-4=0$,圆心坐标为 $(\dfrac{9}{4},-\dfrac{1}{2})$,圆的半径为 $\dfrac{\sqrt{85}}{4}$,圆 M 方程为 $(x-\dfrac{9}{4})^2+(y+\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{85}{16}$.

视角3 在直线方程设为 $\begin{cases}x=2+t\cos\theta,\\ y=t\sin\theta\end{cases}$($t$ 为参数)的情形下,求 $\tan\theta$ 值.

解法4 由证法7知 A,B 坐标分别为 $(2+t_A\cos\theta$,

$t_A\sin\theta)$, $(2+t_B\cos\theta, t_B\sin\theta)$. 由 $t_A+t_B=\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}$, $t_At_B=\frac{-4}{\sin^2\theta}$, 所以 $\overrightarrow{PA}=(-2+t_A\cos\theta, 2+t_A\sin\theta)$, $\overrightarrow{PB}=(-2+t_B\cos\theta, 2+t_B\sin\theta)$, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=t_At_B+2(t_A+t_B)(\sin\theta-\cos\theta)+8$.

化简整理,得

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{4(2\sin^2\theta-\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta-1)}{\sin^2\theta}$.

又点 P 在圆上,故 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$.

则 $2\sin^2\theta-\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta-1=0$.

即 $\sin^2\theta-2\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta=0$.

因为直线斜率 $k=\tan\theta$,所以两边同除以 $\cos^2\theta$ 得 $k^2+k-2=0$,解得 $k=1$ 或 $k=-2$.

当 $k=1$ 时,由 $\tan\theta=1$ 解得 $\cos\theta=\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$,此时直线 l 参数方程为 $\begin{cases}x=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数),消参得直线 l 方程为 $x-y-2=0$,由弦 AB 中点对应参数 $t=\frac{t_A+t_B}{2}=\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}=\sqrt{2}$,代入直线 l 参数方程得圆心坐标为(3,1),易知圆的半径为 $\sqrt{10}$.

故圆 M 方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=10$.

当 $k=-2$ 时,由 $\tan\theta=-2$ 解得 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,此时直线 l 参数方程为 $\begin{cases}x=2-\frac{\sqrt{5}}{5}t,\\ y=\frac{2\sqrt{5}}{5}t\end{cases}$ (t 为参数),消参得直线 l 方程为 $2x+y-4=0$. 由弦 AB 中点对应参数 $t=\frac{t_A+t_B}{2}=\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}=-\frac{\sqrt{5}}{4}$,代入直线 l 参数方程得圆心坐标为 $(\frac{9}{4},-\frac{1}{2})$,圆的半径为 $\frac{\sqrt{85}}{4}$.

故圆 M 方程为 $(x-\frac{9}{4})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{85}{16}$.

评析 直线与圆锥曲线综合性问题作为解析几何中的经典问题,解决此类问题的原则是:"提前预估运算量,合理选择直线方程,力求简化运算过程". 事实上,在齐次化解法的基础上亦可解题,但因运算过程复杂,不再赘述. 就本题在不同的视角下的解法而言,首先要特别注意不同直线形式下遗漏掉的情形,对遗漏掉的情形在解题时要提前阐明,以确保解法的完备性;另外,不同的直线方程形式下要选择相应的知识和方法完成整个运算过程,要熟练相关知识与方法才能够有效地规避复杂而无法在短时间内完成的计算,提高解题的效率;再次要认识到利用齐次化解法、直线参数方程等解题是辅助手段. 虽然这些方法在选填题中可能会简化运算,但这些方法都有各自适用的情形,不可一味追求而忽视对于通性通法的练习.

3 教学建议

通过对题目的多角度分析,在圆锥曲线备考教学中,有以下一些建议:

(1)要力争让学生在解题过程中找到捷径,不能只依赖老师的讲解与启发,其实"经历"是最好的老师,一道题目的多解为他们打开了思路,但只有亲身体验,让学生经历分析问题、解决问题的完整过程,才能让他们深刻领悟不同方法,找到适合自己的解题捷径.

(2)教师要深入研究试题,提高专业化水平. 通过研究解法提升思维能力,精熟解题思路,为学生减负.

(3)解题教学中应以通性通法为主,技巧为辅. 解题中奇招妙招的点缀,可以发散学生思维,有助于学生构建知识网络,是不能缺少的,但不可喧宾夺主.

(4)强化数学运算能力. 平时训练要练到位,如果只注重训练思维,却忽视动手操作能力,带来的后果可能就是在考试解题时动笔就错,所以必须依托具体的题目提升运算基本功;另外题后的思想方法提炼必不可少,它可以使学生的认知水平达到一个更高的层次,提升思想方法基本功.

(5)关注选修知识,重视知识交汇. 事实上,解析几何题目中,圆锥曲线参数方程也常常可以作为题目的突破口,所以对选修部分的极坐标与参数方程,应该高度重视,除此之外,解析几何与向量、导数、不等式、三角函数、数列等知识往往交汇命题,所以也应该关注知识的交汇.

参考文献:

[1]曾心鹉,王佩. 2017 年高考数学全国卷Ⅲ理科第 20 题解法探析[J]. 理科考试研究,2018,25(09):2-4.

[2]林国红. 齐次化法巧解一类圆锥曲线问题[J]. 教学考试,2019(20):56-59.

[3]何少杰. 从一道圆锥曲线焦点分弦题谈二级结论的巧用[J]. 教学考试,2021(20):26-28.

(收稿日期:2021-08-04)

