扎根知识的“来”“用”“走”:从深度学习到深度教学

顾晓峰 （江苏省锡山高级中学 214174）

摘 要:以深度学习为目标的深度教学,是当下课堂教学改革的必然选择.它重在引导学生深度参与学习过程并深刻把握学习内容,通过交互式的学习方式,激活原有认知结构,激发内部学习动机,激起思维与情感的体验,有效落实教学核心素养.其表现在讲清知识的源起生成,构建情境使得所学知识灵活应用,创设合适条件进行知识迁移学习这三个方面.

关键词:深度学习;深度教学;数学核心素养

文章编号:1004-1176(2022)01-0010-03

《普通高中数学课程标准(2017 版)》的实施将数学核心素养的发展推向了新的高度,其六大关键能力的获得依赖于对数学知识与技能的深层次学习,因而以深度学习为目标的深度教学成为了当下课堂教学改革的必然选择.

何为深度学习? 郑毓信将其与“浅度学习”做对比时指出,浅度学习主要依靠死记硬背与机械模仿,满足于内容的简单积累,最终造成了“知识碎片化”的现象[1].深度学习则有效地避免了学习的肤浅化,重视对知识三个维度的认识:第一,关注怎么来,即知识的来龙去脉、发生过程;第二,关注怎么用,即知识如何纳入到已有认知结构,形成基本的数学能力以解决新情境下的新问题;第三,关注怎么走,即知识之间如何交融与综合,发展到新一层次的认知水平.基于深度学习的特点,深度教学重在引导学生深度参与学习过程并深刻把握学习内容,通过交互式的学习方式,激活原有认知结构,激发内部学习动机,激起思维与情感的体验,有效落实数学核心素养.

1 追根溯源——理解知识的内涵

在传统教学中,教师为争取更多训练时间,对知识概念通常进行粗放地介绍甚至直白告知,致使学生的学与教师的教难以产生共鸣.而深度学习扎根于知识间的联系,注重揭示知识的内涵,让学生感悟知识生成的背景和意义.

以“基本不等式”的新授课为例,有学生提出两点疑惑:(1)为什么将“$a,b>0$,$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$(当且仅当 $a=b$ 时取等号)(*)”起名为基本不等式?(2)既然(*)可以看成是“$a,b\in\mathbf{R}$,$a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当 $a=b$ 时取等号)”的推论,它比(*)更一般,为何不将该不等式称为基本不等式? 遇此情景,许多教师会因课时紧张或难以回答而敷衍过去,但仔细思考,学生提出的问题不仅不无聊,而且具有本源性.从知识的生发角度看,从小学到初中,最基础的运算便是加法与乘法(减法与除法分别为其逆运算),而不等关系又是数学中最为普遍的关系,(*)则沟通了和式结构与积式结构的基本关联,而且(*)还可以推广到 n 个正数.从知识的认知过程来看,(*)的证明方法多样,包括作差比较、构造函数或方程、向量、复数等代数方法,射影定理、赵爽弦图、正交(斜交)切分方块等平几手段[2],蕴含了丰富的数学思想方法.其中一个常见的几何解释是(如图 1):圆的半径长($OE=\frac{a+b}{2}$)不小于半弦长($BE=\sqrt{ab}$),这里涉及到的圆又被称为是最优美的基本图形,种种根本性的因素使得(*)区别于其它不等式而“更有资格”称为基本不等式.在深度教学中,教师需选讲部分内容让学生理解基本不等式背后不凡的意义,这实际上是回归到知识的本源和内涵,从中挖掘出的浓浓数学味无疑能让学生体会到无尽的数学美.

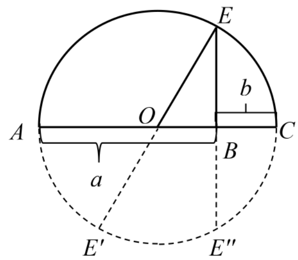

图 1

另外,在“基本不等式”的习题课上,一些教师习惯将基本不等式“拓展”为基本不等式链:$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$,随后赋予一系列“高大上”的名字,而这让学生在感叹之余只觉突兀,有些教师则进行了严密的代数证明,但

学生仅凭机械验证很快就没有印象了.其实,拓展未尝不可,但需注重新旧知识间内涵的钩联.比如给出不等式链后,可以借助学生熟悉的图 2 让其进一步挖掘:既然 $\sqrt{ab}$ 和 $\frac{a+b}{2}$ 均可以在图 2 中找到几何对应,那 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ 和 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 有几何对应吗?是什么呢?问题瞬间激起学生的探索欲,想到将 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ 变形为 $\frac{2ab}{a+b}$,但又无法继续了,教师就提示将 $\frac{2ab}{a+b}$ 与 $\sqrt{ab}$、$\frac{a+b}{2}$ 联系起来,于是继续变形:$\frac{2ab}{a+b}=\frac{(\sqrt{ab})^2}{\frac{a+b}{2}}=\frac{BE^2}{OE}$,设 $H=\frac{2ab}{a+b}$,则 $\frac{H}{BE}=\frac{BE}{OE}$,这恰是相似的比例式,故想到过 B 作 $BF\perp OE$ 于 F,则 $H=EF$;另一方面,$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 比半径还大,说明可以试着构造一个以半径为直角边长,$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 为斜边长的直角三角形,那另一条直角边长就是 $\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=\left|\frac{a-b}{2}\right|$,这恰是 OB 长.故过 O 作 $OM\perp AC$ 交半圆于 M,则 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=\sqrt{OM^2+OB^2}=BM$.这样,基本不等式链就在同一个半圆内被完整地表示了出来($EF\leqslant BE\leqslant OE\leqslant BM$),而且均在 O 与 B 重合(即 $a=b$)时取等号.学生直呼妙哉,教师便顺势提出:除了半圆,还能构造其它图象来解释这个基本不等式链吗?于是引导学生翻看课本(苏教版必修 5 第 106 页)去自主探索如何利用梯形来证明基本不等式链.

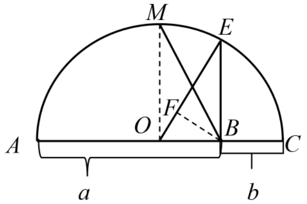

图 2

事实上,在接受新知识时,原有知识结构会有本能的排外反应,深度教学则从学生熟悉的要素出发,注重理性与感性、抽象与具体的交融,让学生看到知识产生的因果关联,真正理解和内化知识.

2　情境建构——促发知识的应用

基于高中生的认知程度,要使他们在数学学习的过程中获得深度体验,情境的有效建构是必不可少的.正如心理学家克劳德·巴斯蒂安所说,认识的进化并非朝向建立愈来愈抽象的认识,而是朝向把他们放置到背景中[3].因此,在教学中应充分利用学科知识、环境资源与学生的心理特点,建构适宜的情境来深入学习数学.

例如笔者通过观察,发现学生每节课会习惯性地看挂钟,于是在函数复习课上提出:大家猜猜你们站在什么位置看黑板上方的挂钟视角最好?问题抛出后立即引起学生的热烈探讨,一部分学生凭肉眼猜测,一部分学生打算站在不同位置观察体验,一部分学生提议要测量挂钟直径、悬挂高度等数据,一部分学生则认为先要画设计图分析再测量数据.大家各抒己见后统一了研究方法:首先确定视角最好的数学意义是指视角最大,并且是在挂钟正前方的某个位置才能达到视角最佳.随后,将挂钟的上沿 M 与下沿 N、墙壁、观察位置 P 抽象在一个截面里(如图 3),原问题转化为"点 P 距离直线 MN 多远时,$\angle MPN$ 最大?"为了便于计算,需再对问题数学化:"过 P 作 $PH\perp MN$ 交 MN 延长线于 H,设 $MH=m$,$NH=n$,则 PH 为多少时,$\angle MPN$ 最大?"学生随即想到可用不同的方法解决,如使用余弦定理、向量知识、两角差的正切公式(比较下来此方法最佳),甚至利用与外接圆有关的平面知识来刻画 $\angle MPN$,再结合导数、基本不等式等有关方法得到 $PH=\sqrt{mn}$ 时,$\angle MPN$ 最大.于是只需要再测量出有关数据,就可以知道最佳观察点了.

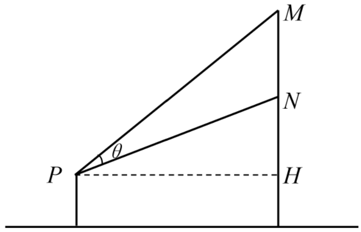

图 3

再比如笔者了解到班级很多男生喜欢看台球比赛,于是设计了如下问题:台球是起源于欧洲的一项高雅室内运动,通过击中目标球或者对方失误而得分.现在台面上有一只白色母球,击打它后要使它碰到蓝色目标球,该怎样控制球杆的方向呢?由于是以真实的体育项目作为问题背景,顿时吸引了学生的"玩劲",分析击打台球后球是沿着直线运动,于是画出俯视图,将台球分别抽象为

圆 A、圆 B，问题归结为：找到一个方向，使得圆 A 的圆心在此方向上运动时，两圆有交点．笔者追问：(1) 在 A 运动的过程中两圆一直要有交点吗？(2) 什么叫找到一个方向？怎么确定？问题(1)让学生意识到圆 A 在运动中只要能与圆 B 有公共点即可，这是存在性问题．问题(2)引导学生想到可以用斜率或倾斜角来刻画方向，故需通过建系对问题进行转化：平面直角坐标系 xOy 中，圆 B：$x^2+y^2=r^2$，$A(a,b)$，直线 l 过点 A 且斜率为 k，若 l 上存在一点 P，使得以 P 为圆心，r 为半径的圆和圆 B 有公共点，求 k 的取值范围．这是一个解析几何问题，如果对圆 B 和点 A 的位置稍加变化，就成为了 2012 年江苏高考题第 12 题(PPT 展示)，学生"恍然大悟"，原来体育问题还能改编成高考题，而高考题的背后竟然还隐藏着"秘密"！欣喜之余，再次把课堂氛围推向高潮．

波利亚认为，良好的组织使得所提供的知识容易用上，这甚至比知识的广泛更为重要．深度学习不刻意加深知识内容本身的难度，而注重对知识内容的综合应用．因此，深度教学首先要求教师自身进行深度学习，善于发现并建构情境，促发学生将已有的知识(包括技能与思想)应用到那些不再有明确数学脚手架的陌生情境中，让他们经历从感性猜测到理性验证，从设计方案到实际测量，从数学运算到结果解释的过程．久而久之，不仅能使学生体验到数学的实用价值，更对实现"三会"的核心目标大有裨益．

3 迁移学习 —— 深化知识的发展

有学者在对国内数学深度学习的研究进行综述后将其特征归纳为四点：深度理解、深度探究、深度体验、深度思维[4]．其中深度思维指向学生的高阶思维，包括对知识的自主学习与创新，这要求学生在面对问题(尤其是具有挑战性的问题)时具有敏锐的洞察力，批判性的眼光和发散性的思考，而这方面能力的培养，笔者比较推崇实施迁移学习策略．

例如，在评讲苏锡常镇一模试卷的解析几何题时，笔者与学生展开了以下探究．

题目 已知 O 为坐标原点，椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的右焦点为 F，右准线为直线 n．(1)略；(2)已知直线 l 上有且仅有一个点到 F 的距离与到直线 n 的距离之比为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，直线 l 与直线 n 交于点 N，过 F 作 x 轴的垂线，交直线 l 于点 M，求证：$\frac{FM}{FN}$ 是一个定值．

问题的关键在于将条件翻译为"l 与椭圆 C 相切"，设直线 l：$y=kx+t$ 后与椭圆方程联立，利用 $\Delta=0$ 得到 k 与 t 的关系，并表示出 M，N 的坐标，最后代入化简 $\frac{FM}{FN}$ 的表达式得出定值是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$．一些学生得到结果后产生疑惑：比值竟然是椭圆的离心率，这是巧合吗？教师顺势提问：如果不是巧合，你们能提出一般性的命题吗？经过一番思考，学生给出猜想．

猜想 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，右准线为直线 n．若直线 l 与 C 相切且与 n 交于点 N，过 F 作 x 轴的垂线交直线 l 于点 M，则 $\frac{FM}{FN}=e$．

类比原问题的解法，学生很快验证了猜想(成为结论 1)，获得了一定的满足感．笔者继续追问：椭圆是一类特殊的圆锥曲线，大家还有没有更大胆的想法？课堂气氛被点燃，有学生举手提出双曲线和椭圆"差不多"，肯定也有类似结论！但抛物线和它们"长得"不太一样，认为应该没有相关结论．笔者提问，抛物线有焦点、准线、离心率吗？抛物线有切线吗？既然都有，那问题的本质属性有变化吗？此时学生若有所思，觉得抛物线也可以研究．于是笔者将他们分成两大组，一组研究双曲线，一组研究抛物线，任务是提出相关猜想并进行证明，然后上台展示和说明．最终得出两个新命题：

结论 2 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，右准线为直线 n．若直线 l 与 C 相切且与 n 交于点 N，过 F 作 x 轴的垂线交直线 l 于点 M，则 $\frac{FM}{FN}=e$．

结论 3 已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为直线 n．若直线 l 与 C 相切且与 n 交于点 N，过 F 作 x 轴的垂线交直线 l 于点 M，则 $\frac{FM}{FN}=e=1$．

将以上三个结论进一步概括、提炼得到结论 4．

(下转第 38 页)

心属性,拓展新思维.以“K 型图”为例抛砖引玉,整体构建知识点的教学,培养学生发现、提出、分析和解决问题的能力,培养学生的创新思维意识,打开学生数学思维的大门,克服数学焦虑,活化数学学习.

参考文献

[1] 张奠宙,李士锜,李俊.数学教育学导论[M].北京:高等教育出版社,2003:112.
[2] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2011 年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2012:45.
[3] 缪雪松.开发元认知 为思维而教——优化数学学习思维定势的理论与实证研究[M].上海:上海教育出版社,2018:50.
[4] 周双珠,韩瑞瑞,陈英和.数学焦虑影响数学学业成就的作用机制——数学元认知的中介作用[J].数学教育学报,2014,23(5):14-17.
[5] 波利亚.怎样解题:数学思维的新方法[M].上海:上海科技教育出版社,2011:11.

(上接第 12 页)

结论4 已知 F 为圆锥曲线的焦点,l 为圆锥曲线的切线且与 F 对应的准线 n 相交于 N,过 F 作 F 所在对称轴的垂线并交直线 l 于点 M,则 $\frac{FM}{FN}=e$.

从课堂效果看,学生全程参与了知识发展的过程,利用知识结构的相似性积极迁移数学思想方法,不断获得新的知识.此时,一位学生突然举手,原来他发现 $\frac{FM}{FN}$ 的值是离心率,而根据圆锥曲线的第二定义,圆锥曲线上的点到焦点的距离比上到相应准线的距离也是离心率,两者之间可不可以联系起来?这一想法让其他学生包括笔者在内都大呼惊讶,一起讨论后决定以椭圆为例尝试探索.如图 4,设 l 与椭圆切于 P,过 P 作 $PH\perp n$ 交 n 于 H,由第二定义知 $\frac{PF}{PH}=e$,根据结论 1 知 $\frac{FM}{FN}=e$,所以 $\frac{PF}{PH}=\frac{FM}{FN}$,整理得 $PF\cdot FN=FM\cdot PH$,而 $FM\cdot PH=2S_{\triangle FPN}$,所以 $S_{\triangle FPN}=\frac{1}{2}FM\cdot PH=\frac{1}{2}PF\cdot FN$,另一方面 $S_{\triangle FPN}=\frac{1}{2}PF\cdot FN\cdot\sin\angle PFN$,联立得 $\sin\angle PFN=1$,所以 $\angle PFN=90^\circ$,这说明 $FP\perp FN$.这一发现将课堂氛围推向高潮,笔者和学生很快对结论进行一般化.

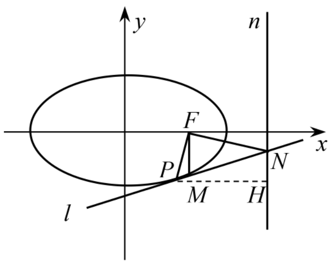

图 4

结论5 设 F 为椭圆 C 的一个焦点,n 为相应准线,过椭圆 C 上一点 P 作椭圆的切线交 n 于点 N,则 $FP\perp FN$.

在课后,通过学习小组的讨论研究,发现结论 5 实际上提供了一种作椭圆一点处切线的方案(过焦点 F 作 F 与椭圆上点 P 连线的垂线并交相应准线于点 N,PN 就是椭圆的切线).结论 5 还可以有其他证法,而且该结论在双曲线与抛物线中依然保留…… 反思教学过程,种种知识的发现并非是学生(甚至是教师)意料之内的,而是在迁移学习中举一反三,打通个体知识间的关联,逐渐形成新的认知结构.由此可知,在以问题解决为核心任务的教学中,深度学习需要建立在一个良好的母题之上,在教师的协助(组织、提示、补充)下以学生为主体进行迁移学习,自主挖掘知识的内部属性,实现知识的结构重组,在深化知识发展的同时升华数学思维品质.

总而言之,深度教学是促使深度学习的理念跳出纸面,走进课堂,落到实处的深度实践,它承担着培养数学核心素养的重大使命.从这个意义上来说,深度教学应具有其明确特征,它表现在讲清知识的源起生成(回答怎么来),构建情境使得所学知识灵活应用(回答怎么用),创设合适条件进行知识迁移学习(回答怎么走),以使学生在这样的深度学习中获得能力和素养,这甚至可以延伸应用到其他学科的学习与发展中.

参考文献

[1] 郑毓信.“数学深度教学”的理论与实践[J].数学教育学报,2019(10):24-32.
[2] 肖建辉.解读基本不等式的几何背景[J].中学数学,2010(2):20-21.
[3] 埃德加·莫兰.复杂性理论与教育问题[M].陈一壮,译.北京:北京大学出版社,2004:67.
[4] 肖凌戆.从数学深度学习走向数学深度教学——以“圆锥曲线探索性问题”为例[J].数学通讯,2020(12):7-11.