2022届高三第二次联合测评

数学试卷

命题单位：圆创教育教学研究中心　　　　　　　2022年2月10日下午15:00-17:00

本试卷共4页，22题．满分150分．考试用时120分钟．

★祝考试顺利★

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，用签字笔或钢笔将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

1．设全集$U=R$，集合$A=\left\{x\middle|x^2-x-2>0\right\}$，$B=\left\{x\middle|\ln x>0\right\}$，则$\left(\complement_U A\right)\cap B=$（　　）

A．$(0,2)$　　B．$(0,2]$　　C．$(1,2)$　　D．$(1,2]$

2．复数$z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$（i为虚数单位），则$z^{2022}=$（　　）

A．1　　B．-1　　C．$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　D．$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

3．中国古代中的“礼、乐、射、御、书、数”合称“六艺”．“礼”主要指德育；“乐”主要指美育；“射”和“御”就是体育和劳动；“书”指各种历史文化知识；“数”指数学．某校国学社团开展“六艺”讲座活动，每艺安排一次讲座，共讲六次．讲座次序要求“礼”在第一次，“数”和“书”相邻，则“六艺”讲座不同的次序共有（　　）

A．24种　　B．36种　　C．48种　　D．120种

4．已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{c}|=2$，则$\vec{a}$与$\vec{c}$的夹角为（　　）

A．60°　　B．90°　　C．120°　　D．150°

5．已知P为椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1(y\neq-1)$上任一点，过$P$作圆$C:x^2+(y+2)^2=1$的两条切线$PM$，$PN$，切点分别为$M$，$N$，则$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}$的最小值为（　　）

A．0　　B．$-\frac{3}{4}$　　C．$-\frac{7}{9}$　　D．$-\frac{11}{14}$

6．用祖暅原理计算球的体积时，夹在两个平行平面之间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意一个平面

所截，若截面面积都相等，则这两个几何体的体积相等．构造一个底面半径和高都与球的半径相等的圆柱，与半球（如图 1）放置在同一平面上，然后在圆柱内挖去一个以圆柱下底面圆心为顶点，圆柱上底面为底面的圆锥后得到一新几何体（如图 2），用任何一个平行于底面的平面去截它们时，可证得所截得的两个截面面积相等，由此可证明新几何体与半球体积相等．现将椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1(y\ge 0)$ 绕 y 轴旋转一周后得一半橄榄状的几何体（如图 3），类比上述方法，运用祖暅原理可求得其体积等于（　　）

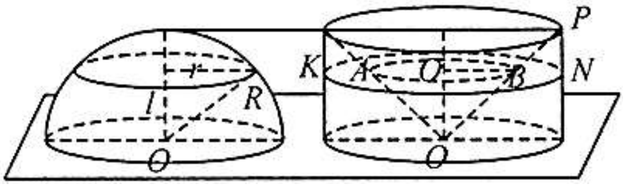


图 1　　　　图 2

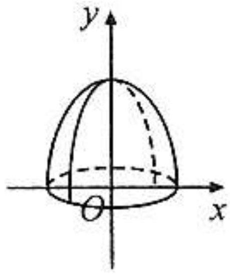


图 3

A．15π　　B．30π　　C．45π　　D．60π

7．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不等于 0．其前 n 为项和为 S_n．若 $a_5,S_3,S_9\in\{0,18\}$，则 S_n 的最大值为（　　）

A．18　　B．20　　C．22　　D．24

8．已知 $a,b,c\in(1,+\infty)$．且 $a^2-2\ln a-1=\frac{\ln 2}{2}$，$b^2-2\ln b-1=\frac{1}{e}$，$c^2-2\ln c-1=\frac{\ln\pi}{\pi}$，则（　　）

A．$b>a>c$　　B．$b>c>a$　　C．$a>b>c$　　D．$c>a>b$

二、多选题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．）

9．下列结论正确的是（　　）

A．若随机变量 X 服从两点分布，$P(X=1)=\frac{1}{2}$，则 $D(X)=\frac{1}{2}$

B．若随机变量 Y 的方差 $D(Y)=2$，则 $D(3Y+2)=8$

C．若随机变量 ξ 服从二项分布 $B\left(4,\frac{1}{2}\right)$，则 $P(\xi=3)=\frac{1}{4}$

D．若随机变量 η 服从正态分布 $N\left(5,\sigma^2\right)$，$P(\eta<2)=0.1$，则 $P(2<\eta<8)=0.8$

10．已知函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)+1(\omega>0)$，$f(x)\ge f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 恒成立，且 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$ 单调递增，则下列说法正确的是（　　）

A．将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位所得图像关于 y 轴对称

B．$f(x)$ 的对称中心是 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},0\right)(k\in\mathbf{Z})$

C．若 $x_1+x_2=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$

D． $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{6}\right]$ 上的值域为 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$

11．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3，点 M 是棱 A_1D_1 的中点，N 是棱 CD 的靠近点 C 的三等分点，P 在四边形 $ABCD$ 内（包含边界），点 Q 在线段 BN 上，若 $PM=\sqrt{10}$，则（　　）

A．点 P 的轨迹的长度为 π

B．线段 MP 的轨迹与平面 ADC_1B_1 的交线为圆弧

C． PQ 长度的最大值为 $3\sqrt{2}$

D． PQ 长度的最小值为 $\dfrac{3\sqrt{10}-4}{4}$

12．函数 $f(x)=a\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}-x}-1\right)-\sqrt{2}\cos x$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最小值为 -1，且在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 唯一的极大值点 x_0．则下列说法正确的有（　　）

A． $a=1$

B． $x_0\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$

C． $x_0\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$

D． $f\left(x_0\right)<1$

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13．设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$，若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最大值为 M，最小值为 m，则 $M+m=$________.

14．已知动点 $M(x,y)$ 到定点 $F(1,0)$ 与定直线 $x=0$ 的距离的差为 1．则动点 M 的轨迹方程为________.

15.已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n\in\mathbf{N}^*$，且 $a_{n+1}=\begin{cases}3a_n+1, & a_n\text{为奇数}\\ \dfrac{a_n}{2}, & a_n\text{为偶数}\end{cases}$．若 $a_4=7$ 时，则 $a_1=$________.

16．由 6 个实数组成的一组数据的方差为 S_1^2，将其中一个数 5 改为 2，另一个数 4 改为 7，其余的数不变，得到新的一组数据的方差为 S_2^2，则 $S_2^2-S_1^2=$________.

四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17．（10 分）在 $\triangle ABC$ 中，A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且满足 $a\cos C+c\cos A=1$，$B=\dfrac{\pi}{6}$．

（1）求 b 边长；

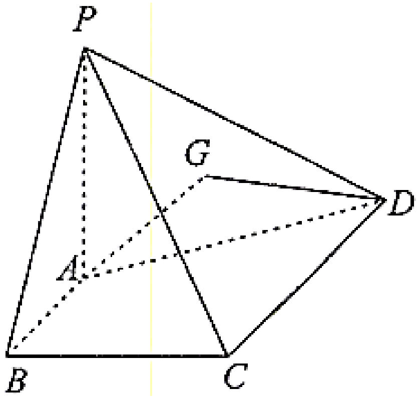
（2）求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

18.（12 分）公差 d 不为 0 的等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，其中 S_1，S_2，S_4 成等比数列，且满足 $a_2\cdot a_5=27$．

（1）求 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（2）已知 $d<0$，$c_n=\left(2-a_n\right)\cdot 4^n$．求数列 $\left\{c_n\right\}$ 的前 n 项和 T_n．

19.（12 分）如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=90°$，$AB\,//\,CD$，$AB=1$，$BC=1$，$CD=2$，点 A 在平面 PCD 内的投影恰好是 $\triangle PCD$ 的重心 G．



（1）求证：平面 $PAB\perp$ 平面 PBC；

（2）求直线 DG 与平面 PBC 所成角的正弦值．

20.（12 分）核酸检测是诊断新冠肺炎的重要依据，首先提取人的唾液或咽拭子的样本，再提取唾液或咽拭子样本里的遗传物质，如果有病毒，样本检测会呈现阳性，否则为阴性．根据统计发现，疑似病例核酸检测呈阳性的概率为 $t(0\le t\le 1)$，现有 6 例疑似病例，分别对其取样、检测，检测时既可以逐个化验，也可以将若干个样本混合在一起化验，混合样本中只要有病毒，则混合样本化验结果就会呈阳性，若混合样本呈阳性，则将该组中各个样本再逐个化验；若混合样本呈阴性，则该组各个样本均为阴性．现有以下二种方案：

方案一：逐个化验；

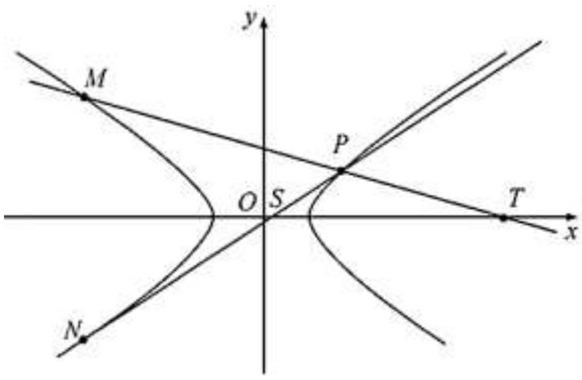
方案二：平均分成三组化验．

在新冠肺炎爆发初期，由于检查能力不足，化验次数的期望值越小，则方案越“优”．

（1）求 2 个疑似病例样本混合化验结果为阳性的概率（用 t 表示）；

（2）现将该 6 例疑似病例样本进行检验，分别求方案一与方案二化验次数的期望值（方案二用 t 表示）．

21.（12 分）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，F_1，F_2 为其左右焦点，Q 为其上任一点，且满足 $\overrightarrow{QF_1}\cdot\overrightarrow{QF_2}=0$，$\left|\overrightarrow{QF_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{QF_2}\right|=2$．



（1）求双曲线 C 的方程；

（2）已知M，N是双曲线C上关于x轴对称的两点，点P是C上异于M，N的任意一点，直线PM、PN分别交x轴于点T、S，试问：$|OS|\cdot|OT|$是否为定值，若不是定值，说明理由，若是定值，请求出定值（其中O是坐标原点）.

22．（12分）已知$f(x)=x^2-2a\ln x$，$a\in\mathbf{R}$．

（1）讨论$y=f(x)$的单调性；

（2）若$y=f(x)$有两个零点$x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$．

（ⅰ）求实数a的取值范围；

（ⅱ）x_0是$y=f(x)$的极值点，求证：$x_1+3x_2>4x_0$．

2022届高三第二次联合测评

数学试题参考答案与评分细则

一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	C	C	D	B	B	B

二、多选题（本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．）

题号	9	10	11	12
答案	CD	ACD	AD	ACD

三、填空题（本题共4小题，每小题5分，共20分．）

13．0　　14．$y^2=4x(x\geq 0)$，$y=0(x<0)$（注：$y^2=2|x|+2x$也算对）　　15．9或56　　16．2

四、解答题

17．【解答】解：（1）由正弦定理知，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，

因为$a\cos C+c\cos A=1$，

所以$2R(\sin A\cos C+\cos A\sin C)=1$，即$2R\sin B=1$，　　3分

所以$b=2R\sin B=1$　　4分

（2）在$\triangle ABC$中，由余弦定理得

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$　　6分

$\therefore a^2+c^2=\sqrt{3}ac+1\geq 2ac$（当且仅当$a=c$取“=”）

$\therefore (2-\sqrt{3})ac \le 1$

$\therefore ac \le 2+\sqrt{3}$　　　　8 分

又$\because S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}ac\sin B = \dfrac{1}{4}ac$

$\therefore S_{\triangle ABC} \le \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$，即$\triangle ABC$面积最大值为$\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$　　　　10 分

18.【解答】解：(1) 由$S_2^2 = S_1 \cdot S_4$得$\left(2a_1+d\right)^2 = a_1\cdot\left(4a_1+6d\right)$，$\therefore d^2 = 2a_1 d$，又$\because d \ne 0$，$\therefore d = 2a_1$

由$a_2 \cdot a_5 = 27$即$\left(a_1+d\right)\cdot\left(a_1+4d\right)=27$，$\therefore 3a_1\cdot 9a_1 = 27$，$\therefore a_1 = \pm 1$　　　　4 分

$\therefore \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$或$\begin{cases} a_1 = -1 \\ d = -2 \end{cases}$，即$a_n = 2n-1$或$a_n = 1-2n$　　　　6 分

(2) $\because d<0$，$\therefore a_n = -2n+1$

$\therefore c_n = (2n+1)\cdot 4^n$　　　　7 分

$T_n = 3\times 4^1 + 5\times 4^2 + 7\times 4^3 + \cdots + (2n-1)\cdot 4^{n-1} + (2n+1)\cdot 4^n$ ①

$\therefore 4T_n = 3\times 4^2 + 5\times 4^3 + 7\times 4^4 + \cdots + (2n-1)\cdot 4^n + (2n+1)\cdot 4^{n+1}$ ②

由① − ②得：$-3T_n = 3\times 4 + 2\times 4^2 + 2\times 4^3 + 2\times 4^4 + \cdots + 2\cdot 4^n - (2n+1)\cdot 4^{n+1}$　　　　9 分

$\therefore -3T_n = 12 + \dfrac{32\times\left(4^{n-1}-1\right)}{3} - (2n+1)\cdot 4^{n+1}$　　　　11 分

$\therefore T_n = \dfrac{(6n+1)}{9}\cdot 4^{n+1} - \dfrac{4}{9}$　　　　12 分

19.【解答】(1) 求证：因为$PA\perp$平面$ABCD$，$BC\subset$平面$ABCD$，所以$PA\perp BC$，

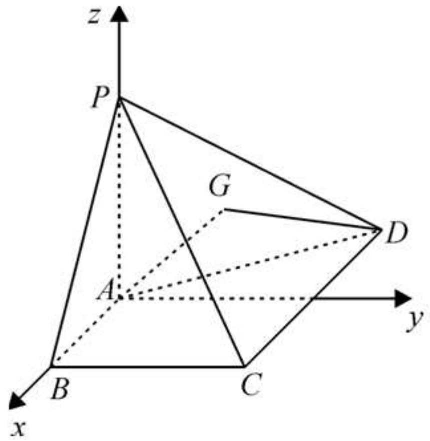
因为$\angle ABC = 90^\circ$，所以$BC\perp AB$，

因为$PA\cap AB = A$，$PA\subset$平面PAB，$AB\subset$平面PAB，

所以$BC\perp$平面PAB，　　　　3 分

又因为$BC\subset$平面PBC，所以平面$PBC\perp$平面PAB，

所以平面$PAB\perp$平面PBC．　　　　5 分



（2）解：取CD中点E，连接AE，

因为$\angle ABC=90°$，$AB//CD$，$AB=BC=1$，$CD=2$，

所以四边形$ABCE$是矩形，所以$AB\perp AE$，

因为$PA\perp$平面$ABCD$，所以$PA\perp AB$，$PA\perp AE$，

所以AB、AE、AP两两垂直，

建立如图所示的空间直角坐标系，　　　　　　7 分

$A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,1,0)$，$E(0,1,0)$，$D(-1,1,0)$，

设$P(0,0,t)(t>0)$，则$G\left(0,\frac{2}{3},\frac{t}{3}\right)$，$\overrightarrow{AG}=\left(0,\frac{2}{3},\frac{t}{3}\right)$，$\overrightarrow{CG}=\left(-1,-\frac{1}{3},\frac{t}{3}\right)$，$\overrightarrow{DG}=\left(1,-\frac{1}{3},\frac{t}{3}\right)$，

因为点A在平面PCD内的投影恰好是$\triangle PCD$的重心G，所以$AG\perp CG$，

所以$\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{AG}=0$，所以$0-\frac{2}{9}+\frac{t^2}{9}=0$，$t=\sqrt{2}$，　　　　　　9 分

$\overrightarrow{BC}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{PB}=(1,0,-\sqrt{2})$，

令$\vec{m}=(\sqrt{2},0,1)$，　　　　　　10 分

因为$\overrightarrow{BC}\cdot\vec{m}=0$，$\overrightarrow{PB}\cdot\vec{m}=0$，

所以$\vec{m}$是平面PBC的法向量，

DG的方向向量是$\overrightarrow{DG}=\left(1,-\frac{1}{3},\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$，　　　　　　11 分

所以直线CG与平面PBC所成角的正弦值为

$$\sin\theta=|\cos\langle\vec{m},\overrightarrow{DG}\rangle|=\frac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{DG}|}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{DG}|}=\frac{\frac{4}{3}\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{12}{9}}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$　　　　　　12 分

20.【解答】解：（1）∵2 个疑似病例样本混合化验结果为阴性的概率为$(1-t)^2$，　　　　　　2 分

设 2 个疑似病例样本混合化验结果为阳性的概率为 x

$\therefore x=1-(1-t)^2$．　　　4 分

（2）方案一：化验次数为 6，期望值为 6，　　　6 分

方案二：平均分成三组化验，其化验次数 Y 为 3，5，7，9

由（1）知，2 个疑似病例样本混合化验结果为阳性的概率为 $1-(1-t)^2$，$\left(x=1-(1-t)^2\right)$

$P(Y=3)=(1-x)^3$，$P(Y=5)=C_3^1\cdot x\cdot(1-x)^2$，$P(Y=7)=C_3^2\cdot x^2\cdot(1-x)$，$P(Y=9)=x^3$，

故 Y 的分布列为：

Y	3	5	7	9
P	$(1-x)^3$	$C_3^1 x\cdot(1-x)^2$	$C_3^2\cdot x^2\cdot(1-x)$	x^3

8 分

$E(Y)=3\cdot(1-x)^3+5\cdot C_3^1(1-x)^2\cdot x+7C_3^2(1-x)x^2+9x^3=6x+3$，　　　10 分

$\because x=2t-t^2$

$\therefore E(Y)=-6t^2+12t+3$　　　12 分

21．【解答】解：（1）设 $\left|\overrightarrow{QF_1}\right|=m$，$\left|\overrightarrow{QF_2}\right|=n$（不妨设 $m>n$）

则 $\begin{cases} m-n=2a \\ m\cdot n=2 \\ m^2+n^2=4c^2 \end{cases}$

而 $(m-n)^2=m^2+n^2-2mn$

$\therefore 4a^2=4c^2-4$　　　3 分

又 $\because \mathrm{e}=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 且 $a^2+b^2=c^2$

$\therefore a=\sqrt{2}$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$

$\therefore$ 双曲线 C 的方程 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$　　　5 分

$\therefore \dfrac{x^2}{2}-y^2=1$．

（2）是定值，定值为 2．

法一：设直线 MP 的方程为 $x=ty+m(t\neq 0)$，$S\left(x_0,0\right)$，$T(m,0)$，

代入$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$，得$\left(t^2-2\right)y^2+2tmy+m^2-2=0$，　　7 分

因为渐近线方程为$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，$MP$ 与渐近线不平行，$\therefore t^2\neq 2$

设点$M\left(x_1,y_1\right)$，$P\left(x_2,y_2\right)$，则$N\left(x_1,-y_1\right)$，

由韦达定理可得：$y_1+y_2=\dfrac{-2tm}{t^2-2}$，$y_1y_2=\dfrac{m^2-2}{t^2-2}$，　　8 分

由N，S，P三点共线得$\dfrac{y_1}{x_0-x_1}=\dfrac{y_2+y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow x_0=\dfrac{y_1x_2+x_1y_2}{y_1+y_2}=\dfrac{2ty_1y_2+m\left(y_1+y_2\right)}{y_1+y_2}$，　　9 分

$$\Rightarrow x_0=\frac{2t\cdot\dfrac{m^2-2}{t^2-2}+m\cdot\dfrac{-2tm}{t^2-2}}{\dfrac{-2tm}{t^2-2}}=\frac{2}{m},$$　　11 分

$\therefore |OS||OT|=|m|\left|\dfrac{2}{m}\right|=2$，即$|OS||OT|$为定值.　　12 分

法二：是定值，定值为 2，

设点$M\left(x_1,y_1\right)$，$P\left(x_2,y_2\right)$，则$N\left(x_1,-y_1\right)$，$l_{MP}:y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)$，

令$y=0$，$\therefore x_T=\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{y_2-y_1}$，　　7 分

同理：$x_S=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{v_2+y_1}$，　　8 分

因为点$M\left(x_1,y_1\right)$，$P\left(x_2,y_2\right)$，在双曲线上，

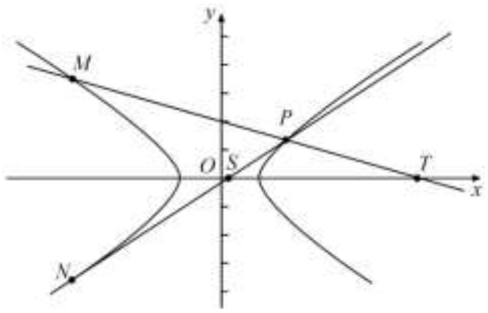
$\therefore \dfrac{x_1^2}{2}-{y_1}^2=1$（1），

$\dfrac{{x_2}^2}{2}-{y_2}^2=1$（2），

$\therefore x_T\cdot x_S=\dfrac{{x_1}^2{y_2}^2-{x_2}^2{y_1}^2}{{y_2}^2-{y_1}^2}$（3），　　10 分

由（1）（2）可得：${x_1}^2=2+2{y_1}^2$，${x_2}^2=2+2{y_2}^2$，

代入（3）可得：$x_T \cdot x_S = \dfrac{2{y_2}^2 - 2{y_1}^2}{{y_2}^2 - {y_1}^2} = 2$（定值）.　　　　　　　12 分



22.【解答】解：（1） $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，

$f'(x) = 2x - \dfrac{2a}{x} = \dfrac{2\left(x^2 - a\right)}{x}$，　　　　　　2 分

①$a \le 0$ 时，$f'(x) > 0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

②$a > 0$ 时，$f'(x) = \dfrac{2(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})}{x}$，

令 $f'(x) > 0$，解得：$x > \sqrt{a}$，令 $f'(x) < 0$，解得：$0 < x < \sqrt{a}$，

故 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a})$ 递减，在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 递增，

综上：$a \le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

$a > 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a})$ 递减，在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 递增；　　　　　　4 分

（2）（ⅰ）由（1）知要使 $y = f(x)$ 有两个零点，则 $a > 0$

此时 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a}]$ 上单调减，在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 单调增

依题意需 $f(\sqrt{a}) = (\sqrt{a})^2 - 2a\ln\sqrt{a} < 0$

此时 $1 < \ln a$，故 $a > \mathrm{e}$　　　　　　6 分

而 $f(1) = 1 - 2a\ln 1 = 1 > 0$，$f(a) = a^2 - 2a\ln a = a(a - 2\ln a)$

当 $a > \mathrm{e}$ 时，令 $g(a) = a - 2\ln a$

则 $g'(a) = 1 - \dfrac{2}{a} = \dfrac{a-2}{a} > 0$，故 $g(a) > g(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - 2 > 0$

$\therefore$ $f(a) > 0$，$\therefore$ $f(1) \cdot f(\sqrt{a}) < 0, f(\sqrt{a}) \cdot f(a) < 0$

由零点存在定理知，$f(x)$在$(1,\sqrt{a})$与$(\sqrt{a},a)$上分别存在唯一零点. 8分

（ii）因为$1<x_1<\sqrt{a}$，$x_2>\sqrt{a}$，令$\dfrac{x_2}{x_1}=t(t>1)$，

由$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)\Rightarrow x_1^2-2a\ln x_1=x_2^2-2a\ln x_2$，

即$x_1^2-2a\ln x_1=t^2x_1^2-2a\ln tx_1\Rightarrow x_1^2=\dfrac{2a\ln t}{t^2-1}$，

而$x_1+3x_2>4x_0\Leftrightarrow(3t+1)x_1>4\sqrt{a}\Leftrightarrow(3t+1)^2x_1^2>16a$，

即$(3t+1)^2\cdot\dfrac{2a\ln t}{t^2-1}>16a$， 10分

由$a>0$，$t>1$，只需证$(3t+1)^2\ln t-8t^2+8>0$，

令$h(t)=(3t+1)^2\ln t-8t^2+8$，

则$h'(t)=(18t+6)\ln t-7t+6+\dfrac{1}{t}$，

令$n(t)=(18t+6)\ln t-7t+6+\dfrac{1}{t}$，则$n'(t)=18\ln t+11+\dfrac{6t-1}{t^2}>0(t>1)$，

故$n(t)$在$(1,+\infty)$上递增，$n(t)>n(1)=0$，

故$h(t)$在$(1,+\infty)$上递增，$h(t)>h(1)=0$；

$\therefore x_1+3x_2>4x_0$. 12分