基于教学生成视角的习题讲评课探究

◉广州市白云中学　郭根文

1 研究背景

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》指出:“高中数学教学以发展学生数学学科核心素养为导向,创设合适的教学情境,启发学生思考,引导学生把握数学内容的本质”.叶澜教授指出:“学生的发展应是一个开放性的动态生成过程,教学过程应通过师生对话与合作、以动态生成的方式推进”.新课标对师生关系、教师教学方法、学生学习方式等方面提出更高要求,倡导教师尊重学生质疑、协助学生调查、指导学生探究,让学生在实践中学习,积累数学活动经验,从而形成解决问题的技能与方法等关键能力,为终身学习奠定基础.鉴于此,要将课堂还给学生,教师要创设机会给学生介绍自己分析问题、解决问题的思路与体会,营造学习即探索的常态学习氛围,促进学生实践能力和创新意识的发展.本文中基于教学生成及新课程理念视角,对习题讲评课案例展开探究,以期对数学教学策略的启发.

2 案例描述

在一次数学单元测试卷中,有如下题目:在四边形 $ABCD$ 中,若$\overrightarrow{AC}=(1,2)$,$\overrightarrow{BD}=(-4,2)$,则该四边形的面积为(　　).

A.$\sqrt{5}$　　B.$2\sqrt{5}$　　C.5　　D.10

笔者刚见到这题时,发现题目与平时训练略有不同,虽然该班正答率达0.75,为了精准掌握学生对题目的理解及对知识的运用情况,笔者随机提问学生,学生1:“仔细验算后,发现$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$,即 $AC\perp BD$,四边形 $ABCD$ 对角线互相垂直,所以类比菱形面积计算公式,$S_{ABCD}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|$”,讲完后,坐在前排的学生2窃窃私语:“有没有这么巧啊,万一$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}\neq 0$,那岂不是没法做?”如果仅解决此题,学生1的确提供了一种比较好的解法,但学生2也的确产生一个合理的质疑,这时笔者如果装作没有听见,继续按照“预设”进行下去,势必会影响该生的积极性,所以笔者还是鼓励学生2大胆提出自己的疑惑,他认为:“此题 $AC\perp BD$ 确实比较特殊,但如果 AC 与 BD 不垂直,例如$\overrightarrow{AC}=(1,3)$,$\overrightarrow{BD}=(-4,2)$,本题还能不能解答呢,解决的通法是什么?”几分钟过后,学生3说出了他的见解:

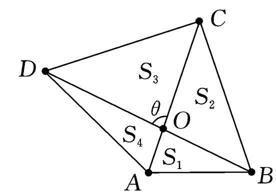

图1

如图1,设向量$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{BD}$夹角为 θ,

因为 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}(0<\theta<\pi)$,

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

$$\begin{aligned}
\text{所以 } S_{ABCD}&=S_1+S_2+S_3+S_4\\
&=\frac{1}{2}|OA||OB|\sin\theta\\
&+\frac{1}{2}|OB||OC|\sin(\pi-\theta)\\
&+\frac{1}{2}|OC||OD|\sin\theta\\
&+\frac{1}{2}|OA||OD|\sin(\pi-\theta)\\
&=\frac{1}{2}(|OA|+|OC|)|OB|\sin\theta\\
&+\frac{1}{2}(|OA|+|OC|)|OD|\sin\theta\\
&=\frac{1}{2}(|OA|+|OC|)(|OB|+|OD|)\sin\theta\\
&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|\sin\theta\\
&=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times 2\sqrt{5}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}\\
&=7.
\end{aligned}$$

学生3讲完后,同学们都向他投来了赞许的眼光,因为他提供了一种解决此题的通法.

笔者还来不及点评小结,学生4马上举手:“老师,我有另一种解法,既然学生3的结果是 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|\sin\theta$,我想到构造以 AC、BD 为邻边的平行四边形,结果也是一样”.学生4提出了一种新的思路,但是如何构造,笔者让学生4上讲台板演:

如图2，过 A 作 $AF\parallel BD$，且 $AF=BD$，以 AF,AC 为邻边作平行四边形 $ACEF$，只需证 $S_{ACEF}=2S_{ABCD}$ 即可，因为 $S_{ACEF}=|AC||BD|\sin\theta$.

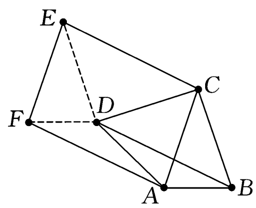

图2

但是为何 $S_{ACEF}=2S_{ABCD}$ 呢？学生4在此卡住了，全班也陷入沉思.笔者鼓励引导："尝试将图形拆分割补看看？"过了片刻，提出问题的学生2提出能否连结 DE、DF，看着学生2兴致勃勃，笔者让学生2也上讲台与学生4合作完成：

因为 $AF//BD//CE$，$AF=BD=CE$，$EF//AC$，$EF=AC$.

所以 $S_{ADF}=S_{DAB}$，$S_{CDE}=S_{DCB}$，$S_{DEF}=S_{BCA}$，$S_{ACD}=S_{ACD}$.

所以 $S_{ADF}+S_{CDE}+S_{DEF}+S_{ACD}=S_{DAB}+S_{DCB}+S_{BCA}+S_{ACD}$.

从而 $S_{ACEF}=S_{ABCD}+S_{ABCD}=2S_{ABCD}$.

故 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}S_{ACEF}=\frac{1}{2}|AC||BD|\sin\theta$.

写完之后，整个课室顿时很安静，同学们认真地思考学生4与学生2所写的内容，稍后纷纷出现赞扬的声音.突然，学生5站起来说："老师，既然 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|\sin\theta$，对比三角形面积，四边形 $ABCD$ 面积等价于将 $\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BD}$ 平移到同一起点后所构成的三角形的面积，再根据向量结论有'在 $\triangle OPQ$ 中，若 $\overrightarrow{OP}=(x,y)$，$\overrightarrow{OQ}=(u,v)$，则 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}|xv-yu|$'，所以本题也可快捷得出 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}|1\times2-3\times(-4)|=7$".同学们都惊讶地看着学生5，沉默片刻后，课室的掌声更为热烈，紧接着笔者及时点评：这道题除了知识值得我们学习外，咱们同学在思考问题的方法与态度更有几点值得我们学习：第一，学生2敢于提出疑问，善于变式，真正做到复习时会一道题懂一类题，也创造了丰富的素材供我们学习；第二，虽然变式后 AC 与 BD 不垂直，但学生3能够快捷的利用向量求夹角，善于类比学习，触类旁通；第三，学生4敢于执果索因，开辟新思路，逆向思维，同时平面几何知识掌握比较扎实；第四，学生2提出疑问后，同学们能共同探讨，最后更是学生4与学生2合作完成，将问题解决；第五，学生5善于类比迁移，将向量迁移到平面几何再回归到向量，充分体现数形结合及向量的工具性.说完，其他同学为他们送来了欣慰的掌声，笔者也发现，上台发言的几位学生脸上更是展露出成功的喜悦.

3 教学反思与启示

在一般的教学过程中，大多数学生的大部分时间基本是在听教师讲，或听教师与其他同学的一问一答，基本停留在被动"听"课的局面.新课标要求教师在课堂上努力创造一切可能使每位学生主动参与教学.学生既是"教学对象"、"学习主体"，更是教学资源的有机组成及动态生成者.尤其对于数学习题讲评课这种反馈教与学效果的综合课型，通过讲评不仅可以促进学生进一步巩固完善和深化提升所学知识，还能使学生了解自己学习上的优势与不足，明确下一次的努力方向.习题讲评课堂应是开放的生成，它是知识主动建构和教学活动的动态生成，为了能有更好生成，笔者认为善待"质疑"、给予"空间"、践行"回顾"、注重"通法"及转变"角色"必不可少.

3.1 善待"质疑"，保护学生积极性

著名心理学家维果茨基的"最近发展区"理论启示我们：教学实际上就是一个搭建脚手架的过程，在脚手架的帮助下，学生能够跨越新旧发展水平间的距离，在原有知识水平的基础上，使自己的思维能力得到发展.同时维果茨基还强调"学习某些知识或技能都有一个最佳期限"，学生2能够产生这个质疑，说明 $AC\perp BD$ 这种情况在他的认知水平内可以解决，但 AC 不与 BD 垂直的情况已经超出了他的认知水平，需要别人的指点，此时到了他的"最近发展区"，也是认知欲望最强的"最佳时刻".笔者也正是发现学生2的疑惑，及时让他讲出来，避开了教学上的"滑过现象".所以才在一周后的学生访谈中，学生2有如下感想：很感谢老师给我机会提出疑问，促使我去思考问题，最后能够想到连结 DE，协同学生4将问题解决，很有成就感，使我更喜欢学数学.

课堂上教师要善待学生的"质疑"，不能只顾自己的"预设"，也正如苏霍姆林斯基所说："教育的技巧并不在于能预见到课堂的所有细节，而在于根据当时的具体情形，巧妙地在学生不知不觉之中做出相应的变动".困惑的产生常常一瞬即逝，教师若发现学生有质疑，适当地给予机会让学生提出，再加上适时点拨释疑，这样既保护学生的积极性，又加强他们的求知欲，有利于形成良好的提问习惯，提高发现问题与提出问题的能力，利于培养创新思维.

3.2 给予"空间"，增强学生自我效能感

班杜拉研究的"自我效能"启发我们：个人根据以往的经验，经过对某些特定工作或事物的多次成败历练后，会形成对处理该项工作所具有的信心.同时自我效能感还会对"选择任务及从事任务的持续性、完成

任务的情绪、面对困难的态度及习得新行为的能力”等方面产生影响.研究还得出对效能感影响最大的是自己的亲身体验，尤其成功的体验会产生正强化，能提高自我效能感，不断地体验成功会让人建立起稳固的自我效能感；多次失败的经验会降低人的自我效能感，而且还会泛化到类似的情境当中.给予学生“空间”，就是让学生去获取直接经验.假如笔者不让学生2提出疑问，不让学生思考，而是迫不及待的将解答告诉学生，那学生将无法直接体验此题的解答过程，无法获得正强化.再者，虽然学生4的解法不一定是最好的，但如果不让她讲解，必将打击其思考问题的积极性，势必影响数学学习的续航力.同时，当学生4被“为何$S_{ACEF}=2S_{ABCD}$”卡住，即将面临着失败的经历时，更是需要教师给予必要引导及足够的空间让她去思索，所以才有后边成功的喜悦.也彰显新课标要求：通过高中数学课程的学习，学生能提兴趣、增信心、养习惯，形成适应终身发展和社会发展需要的必备品格.

3.3 践行“回顾”，提高学生数学解题能力

波利亚提出，善于解题是掌握数学的基本要求，除了要能解决一类基本的经典题目，还应善于解一些要求见解独特，思维严谨有创造性的题.他还认为“加强解题的训练”是中学数学教学的首要任务，“解题”是培养学生的数学才能和教会他们思考的一种手段和途径.而“回顾反思”作为波利亚在《怎样解题》中指出解题四个步骤中的最后一个环节，是属于提升解题能力的重要环节.学生2也正是测试后，对此题有进一步回顾，才会提出质疑.课堂上对此题进行探讨，也属于再一步回顾，才能促使学生3与学生2触类旁通、举一反三，从而有上述教学片断的精彩生成，同时也促使学生4发散思维、创新思维的形成，将向量问题转化为用已掌握的平面几何知识来解决，呈现出创造性的解题.通过回顾反思掌握解决数学问题的角度、方法与途径，能更好透过现象（情境）抓本质（关键与规律），形成有效的解法，及对问题的延伸推广，从而提高反思能力、自我监控能力与元认知水平.

3.4 注重“通法”，提升学生数学思维水平

数学基础知识是基石，思想方法是灵魂.新课标要求：加强对解题的正确指导，应注意引导学生概括解题的思想与方法，及时从某一具体知识、具体解题过程中总结出所包含的一般数学思想和方法，将一个问题发展成为一类问题，即从特殊到一般，形成通法.题目变式后对角线AC与BD不垂直，学生3也正是明白“通性”，掌握垂直的本质，才懂得转化夹角来解决问题；学生4能逆向思考，从平面几何出发，依循答案寻找解决问题的方法，这有赖于平时注重“通性通法”的积累，才能提高思维水平，快捷构建出解答.

3.5 转变“角色”，发展学生数学素养

新课程标准提出：教学活动是师生踊跃参与、交流互动、共同成长的过程.学生学与教师教的高度统一才是有效的教学活动.课堂转型为教师主导下学生发现问题、提出问题，在教师适时讲授引导与评价中分析与解决问题.课堂上充分使学生获得基本的数学活动经验，掌握基本的数学知识与技能以及感悟数学思想和方法.笔者也正是践行新课标这一要求，在学生2发现问题、提出问题时，适时引导；在学生“攀爬”答案高峰遇到障碍时，合理搭建“支架”；在学生体验整个数学基本活动时，给予中肯评价等.在这学习过程中，基本为学生自主发现问题、提出问题、分析问题和解决问题，教师只是扮演了“旁观者”“引路者”的角色，摒弃了过去以教师为中心的讲和学生的练，换来的是学生思维碰撞的火花.角色的转变也能彰显数学学科“培养学生学会思考，特别是学会‘有逻辑地思考’，促使学生成为善于认识问题、善于解决问题的人”独特的育人功能.

4 结束语

数学课堂是学生数学知识与思想方法形成的重要载体.在案例中，若笔者没有善待学生的“质疑”，没有搭建“说数学”的平台，没有给予学生足够的“空间”进行回顾反思，将不会出现学生灵动的“生成”，我们也无法感受到学生的数学学习情感、能力及水平.数学课堂教学应落实以学生为主体、教师为主导，教师要善于抓住课堂动态的教学资源形成新的、又具有连续性的兴奋点和教学步骤，激发学生求知欲，扎实提高学生的课堂参与度，真正做到让每位学生民主参与探究、反思等，促使其形成积极的情感态度，养成良好的创新人格，提高数学素养.

参考文献：

[1]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）[M].北京：人民教育出版社，2020.
[2]刘一萍.一个不等式问题的认知分析和教学对策[J].中学数学，2013(11)：17-18.
[3]吴和贵.支架式教学：有效教学的生长点[M].广州：中山大学出版社，2013.
[4]余文森.论教学中的预设与生成[J].课程·教材·教法，2007(5)：17-20.
[5]郭根文，钟进均.教师无意的设问带来了惊喜——对高中数学课堂教学片断的反思[J].中学数学月刊，2013(9)：31-33.