引元搭桥,变式探究,提高数学运算素养

324000 浙江省衢州博文中学 林美琳
311121 浙江省杭州二中未来科技城学校 李 盛

摘 要:笔者由一道联考压轴题,思考总结出换元搭桥的解题方法,并进行变式探究和方法的类推应用.通过总结归纳,发现引元搭桥不仅可以使此类问题迎刃而解,而且能够很好地优化学生的数学思维,提高解题效率,发展其数学运算素养.

关键词:引元搭桥;变式;数学运算素养

一、问题提出

2020年11月,浙江衢州、丽水、湖州高三教学质量联合检测中有这样一道填空压轴题.

题1 若实数 x,y 满足 $(2x+\sqrt{4x^2+1})\cdot(y+\sqrt{y^2+1})=4$,则 $x+y$ 的最小值是________.

这是一道非常典型的二元最值题,条件复杂,初看之下似乎令人无从下手.注意到 $(\sqrt{4x^2+1})^2-(2x)^2=(\sqrt{y^2+1})^2-y^2=1$,采用整体换元搭桥的方法化生为熟,就能转化为学生熟悉的"积定和(最)小"型问题加以解决.

解:设 $a=2x+\sqrt{4x^2+1}$,$b=y+\sqrt{y^2+1}$,则 $a>0$,$b>0$,且 $ab=4$,$(a-2x)^2=4x^2+1$,$(b-y)^2=y^2+1$,整理可得 $x=\frac{a^2-1}{4a}=\frac{a}{4}-\frac{b}{4ab}=\frac{a}{4}-\frac{b}{16}$,$y=\frac{b^2-1}{2b}=\frac{b}{2}-\frac{a}{2ab}=\frac{b}{2}-\frac{a}{8}$,所以 $x+y=\frac{a}{8}+\frac{7b}{16}\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{8}\cdot\frac{7b}{16}}=\frac{\sqrt{14}}{4}$.当且仅当 $\frac{a}{8}=\frac{7b}{16}$,$ab=4$,即 $a=\sqrt{14}$,$b=\frac{2}{7}\sqrt{14}$ 时等号成立,故 $x+y$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

评注:多变量的最值问题综合性强、形式多变、技巧性强,是最值求解问题中的一个难点.这里用的整体换元法,起到了重要的桥梁作用,将函数、不等式等核心知识紧密联系起来,顺利解决了问题.

二、变式探究

继续采用引元搭桥的方法,对题1进行变式探究,额外收获十分丰硕.

1.改变条件的呈现方式

变式1 若实数 x,y 满足 $4\sqrt{y^2+1}-\sqrt{4x^2+1}=2x+4y$,则 $x+y$ 的最小值是________.

在题1所给等式两边同乘以 $\sqrt{y^2+1}-y$,可得 $2x+\sqrt{4x^2+1}=4(\sqrt{y^2+1}-y)$.等价变形即得 $4\sqrt{y^2+1}-\sqrt{4x^2+1}=2x+4y$,所以答案仍为 $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

变式2 若实数 x,y 满足 $(2x-\sqrt{4x^2+1})\cdot(y-\sqrt{y^2+1})=\frac{1}{4}$,则 $x+y$ 的最小值是________.

答案为 $\frac{\sqrt{14}}{4}$.此变式与题1完全等价,过程略.

2.改变目标函数的形式

变式3 若实数 x,y 满足 $(2x+\sqrt{4x^2+1})\cdot(y+\sqrt{y^2+1})=4$,则 xy 的最大值是________,x^2+y^2 的最小值是________.

解:设 $a=2x+\sqrt{4x^2+1}$,$b=y+\sqrt{y^2+1}$,则 $a>0$,$b>0$,且 $ab=4$,同题1,可知 $xy=\left(\frac{a}{4}-\frac{b}{16}\right)\left(\frac{b}{2}-\frac{a}{8}\right)=\frac{ab}{8}+\frac{ba}{16\times 8}-\frac{1}{32}(a^2+b^2)\leqslant\frac{17}{32}-\frac{ab}{16}=\frac{9}{32}$,当 $a=b$ 时取等号.$x^2+y^2=\left(\frac{a}{4}-\frac{1}{4a}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-\frac{1}{2b}\right)^2=\frac{5}{64}a^2+\frac{65}{16^2}b^2-\frac{5}{8}\geqslant\frac{5\sqrt{13}-10}{16}\cdot\frac{5}{64}a^2=\frac{65}{16^2}$,即 $2a=\sqrt{13}b$ 时取等号.

所以 xy 的最大值是 $\frac{9}{32}$,x^2+y^2 的最小值是 $\frac{5\sqrt{13}-10}{16}$.

若同时将条件的"乘积"形式改为"和"式,目标函数 $x+y$ 改为 $2x+y$,可得变式4.

变式4 若实数 x,y 满足 $(2x+\sqrt{4x^2+1})+$

$(y+\sqrt{y^2+1})=4$，则 $2x+y$ 的最小值是________.

解：设 $a=2x+\sqrt{4x^2+1}$，$b=y+\sqrt{y^2+1}$，则 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=4$，于是 $x=\frac{a^2-1}{4a}$，$y=\frac{b^2-1}{2b}$，$2x+y=\frac{a^2-1}{2a}+\frac{b^2-1}{2b}=\frac{(a+b)(ab-1)}{2ab}\leqslant 2-\frac{2}{ab}\leqslant 2-\frac{8}{(a+b)^2}=\frac{3}{2}$. 当且仅当 $a=b=2$ 时等号成立.

所以 $2x+y$ 的最小值是 $\frac{3}{2}$.

3. 将条件一般化

变式5 若实数 x,y 满足 $(2x+\sqrt{4x^2+1})\cdot(y+\sqrt{y^2+1})=t$，$t>2$，则 $x+y$ 的最小值是________.

此变式与题1解答过程完全类似，解答过程如下.

解：设 $a=2x+\sqrt{4x^2+1}$，$b=y+\sqrt{y^2+1}$，则 $a>0$，$b>0$，且 $ab=t$，$(a-2x)^2=4x^2+1$，$(b-y)^2=y^2+1$，整理可得 $x=\frac{a^2-1}{4a}=\frac{a}{4}-\frac{b}{4ab}=\frac{a}{4}-\frac{b}{4t}$，$y=\frac{b^2-1}{2b}=\frac{b}{2}-\frac{a}{2ab}=\frac{b}{2}-\frac{a}{2t}$，所以 $x+y=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2t}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4t}\right)b\geqslant 2\sqrt{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2t}\right)a\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4t}\right)b}=\frac{\sqrt{t(t-2)(2t-1)}}{2t}$.

当且仅当 $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2t}\right)a=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4t}\right)b$，$ab=t$，即 $a=\sqrt{\frac{t(2t-1)}{t-2}}$，$b=\sqrt{\frac{t(t-2)}{2t-1}}$ 时等号成立，故 $x+y$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{t(t-2)(2t-1)}}{2t}$.

将变式5条件中的等式改为不等式，有额外收获.

结论1：若实数 x,y 满足 $(2x+\sqrt{4x^2+1})\cdot(y+\sqrt{y^2+1})\geqslant t$，$t>2$，则 $x+y$ 的最小值是 $\frac{\sqrt{t(t-2)(2t-1)}}{2t}$.

4. 局部字母变换

在不等式(1)的条件中作替换，令 $\frac{x}{2}\to x$，得变式6.

变式6 若 $0<\frac{\lambda}{4}<\mu<4\lambda$，实数 x,y 满足 $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=4$，则 $\lambda x+\mu y$ 的最小值是________.

解：设 $a=x+\sqrt{x^2+1}$，$b=y+\sqrt{y^2+1}$，则 $a>0$，$b>0$，且 $ab=4$，则 $(a-x)^2=x^2+1$，整理可得 $x=\frac{a^2-1}{2a}=\frac{a}{2}-\frac{b}{2ab}=\frac{a}{2}-\frac{b}{8}$，同理 $y=\frac{b}{2}-\frac{a}{8}$，则有 $\lambda x+\mu y=\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{8}\right)a+\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\lambda}{8}\right)b\geqslant 2\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{8}\right)a\cdot\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\lambda}{8}\right)b}=\frac{\sqrt{(4\lambda-\mu)(4\mu-\lambda)}}{4}$.

当且仅当 $\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{8}\right)a=\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\lambda}{8}\right)b$，结合 $ab=4$，即 $a=2\sqrt{\frac{4\mu-\lambda}{4\lambda-\mu}}$，$b=2\sqrt{\frac{4\lambda-\mu}{4\mu-\lambda}}$ 时等号成立，故 $\lambda x+\mu y$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{(4\lambda-\mu)(4\mu-\lambda)}}{4}$.

三、方法的类推应用

在解答数学竞赛题与高考模考题中，引元搭桥的方法应用广泛，下面举例说明它在解题中的妙用.

1. 简化目标函数

例1(2020年甘肃省预赛试题) 设 x,y 均为正数，则 $M=\frac{4x}{x+3y}+\frac{3y}{x}$ 的最小值为________.

分析：题目给出的关系式 $M=\frac{4x}{x+3y}+\frac{3y}{x}$ 中，两个相加的分式 $\frac{4x}{x+3y}$，$\frac{3y}{x}$ 的分子和分母中 x,y 的次数都是一次的，可以多元归一简化问题.

解：令 $t=\frac{y}{x}$，则 $t>0$，$M=\frac{4}{1+3t}+3t=\frac{4}{1+3t}+(1+3t)-1\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{1+3t}(1+3t)}-1=3$，当且仅当 $\frac{4}{1+3t}=1+3t$，即 $t=\frac{1}{3}$ 时取得等号，所以 M 的最小值为3.

例2 已知 $x>0$，$y>0$，且 $x+8y+3\leqslant\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$，求 $\frac{xy}{x+2y}$ 的最大值.

解：设 $t=\frac{xy}{x+2y}$，则 $t>0$，$\frac{1}{t}=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$. 于是 $x+8y+3\leqslant\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{t}$，所以 $x+8y=t(x+8y)(\frac{2}{x}+\frac{1}{y})=t(10+\frac{x}{y}+\frac{16y}{x})\geqslant t(10+2\sqrt{16})=18t$（当 $\frac{x}{y}=\frac{16y}{x}$ 即 $x=4y$ 时取等号），故 $\frac{1}{t}-3\geqslant x+8y\geqslant 18t\Rightarrow 0<t\leqslant\frac{1}{6}$. 因此 $\frac{xy}{x+2y}$ 的最大值为 $\frac{1}{6}$，此时 $t=$

$\frac{1}{6}, x=1, y=\frac{1}{4}$.

评析：结论代换是简化目标函数的一种好方法.

2. 简化条件

例3（2021年4月台州二模-16） 已知 $x,y\in(0,+\infty)$，$a\in\mathbf{R}$，若 $(x-y+\sin^2\alpha+1)(x+3y-2\sin^2\alpha)=2$，则 $3x+y$ 的最小值为________.

解：令 $\begin{cases}m=x-y+\sin^2\alpha+1\\n=x+3y-2\sin^2\alpha\end{cases}$，则条件转化为 $mn=2$，消去 $\sin^2\alpha$，结合基本不等式得 $3x+y+2=2m+n\geqslant2\sqrt{2mn}=4$，故 $3x+y\geqslant2$，当 $m=1,n=2$ 取等号，故 $3x+y$ 的最小值为2.

例4（2021年4月稽阳高三联考-15） 已知 $x,y\in\mathbf{R}$ 且满足 $2x^2-y^2+xy=2$，则 x^2+2y^2 的最小值是________.

解：由 $(2x-y)(x+y)=2$，设 $\begin{cases}a=2x-y\\b=x+y\end{cases}$，即 $\begin{cases}x=\frac{a+b}{3}\\y=\frac{-a+2b}{3}\end{cases}$，则条件转化为 $ab=2$，所以 $x^2+2y^2=\frac{a^2+3b^2-2ab}{3}\geqslant\frac{(2\sqrt{3}-2)ab}{3}=\frac{4\sqrt{3}-4}{3}$，当且仅当 $a=\sqrt{3}b$，$ab=2$ 时等号成立. 所以答案为 $\frac{4\sqrt{3}-4}{3}$.

评析：当已知等式或所求代数式能因式分解时，通过双换元把已知条件转换成形式上更简单的乘积形式，再结合基本不等式就能很方便地求解了.

3. 发现解题思路

例5（2021年上海市高三数学竞赛试题） 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4,+\infty)$，且满足对任意实数 t，都有 $f(t^2+4t)=|t+2|$，则 $f(x)$ 的解析式是 $f(x)=$________.

分析：已知 $f(t^2+4t)=|t+2|$，要求 $f(x)$ 的解析式，自然会想到令 $x=t^2+4t$ 搭设桥梁.

解：令 $x=t^2+4t$，则 $|t+2|=\sqrt{t^2+4t+4}=\sqrt{x+4}$，所以 $f(x)$ 的解析式是 $f(x)=\sqrt{x+4}$.

例6（2020年全国高中数学联赛重庆预赛试题） 若实数 x,y 满足 $2^x+4x+12=\log_2(y-1)^3+3y+12=0$，则 $x+y=$________.

解：$2^x+4x+12=0$ 即 $2^{x-2}+x+3=0$，令 $s=x-2$，则 $2^s=-s-5$；令 $t=y-1$，则 $\log_2(y-1)^3+3y+12=0\Leftrightarrow\log_2 t=-t-5$.

注意到 $y=2^x$ 与 $y=\log_2 x$ 图像关于直线 $y=x$ 对称，且函数 $y=-x-5$ 图像也关于直线 $y=x$ 对称，而 $y=x$ 与 $y=-x-5$ 交点横坐标为 $-\frac{5}{2}$，所以 $s+t=-5$，从而 $x+y=s+t+3=-2$.

评析：变形后换元搭桥，帮助发现了解决问题的思路.

4. 转移变更条件

如果条件不能直接应用于解题，通过引元搭桥整体转移变更条件，达到使问题顺利获解的目的.

例7（2021年清华大学领军计划试题） 已知：a,b,c,d 都是正整数，且 $a^3=b^2$，$c^5=d^4$，$c-a=77$，求 $d-b$.

解：由题意，可设 $a=x^2$，$b=x^3$，$c=y^4$，$d=y^5$，从而 $y^4-x^2=77$，因式分解得 $(y^2-x)(y^2+x)=77$，所以 $y^2-x=7$，$y^2+x=11$，解得 $x=2$，$y=3$，所以 $d-b=235$.

评析：通过换元搭桥，将条件 $a^3=b^2$，$c^5=d^4$ 隐含在所设 $a=x^2$，$b=x^3$，$c=y^4$，$d=y^5$ 之中，归结为求解一个较为简单的不定方程 $y^4-x^2=77$ 问题.

例8（2021年1月宁波市高三期末考试数学试题） 设点 $P(x_1,y_1)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 上，点 $Q(x_2,y_2)$ 在直线 $x+2y-8=0$ 上，则 $|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$ 的最小值是________.

解：设 $x_1=2\sqrt{2}\cos\alpha$，$y_1=\sqrt{2}\sin\alpha$，$\alpha\in[0,2\pi)$，由题意有 $x_2+2y_2-8=0$，$|x_2-x_1|+|y_2-y_1|=|x_2-2\sqrt{2}\cos\alpha|+|y_2-\sqrt{2}\sin\alpha|=\frac{1}{2}(2|x_2-2\sqrt{2}\cos\alpha|+2|y_2-\sqrt{2}\sin\alpha|)\geqslant\frac{1}{2}(|x_2-2\sqrt{2}\cos\alpha|+2|y_2-\sqrt{2}\sin\alpha|)\geqslant\frac{1}{2}|x_2-2\sqrt{2}\cos\alpha+2(y_2-\sqrt{2}\sin\alpha)|=\frac{1}{2}|8-2\sqrt{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)|=\frac{1}{2}|8-4\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})|\geqslant2$.

当且仅当 $P(2,1)$，$Q(2,3)$ 时，取到最小值2.

通过以上例题可以发现，在解决多变量的最值问题时，换元搭桥是一种很好的方法. 在具体解题过程中，教师引导学生观察题设与所求，抓住式子的结构特征，合理假设新元，可以化隐为显、化繁为简、化难为易，使问题快速破解. 在解决问题的过程中，优化学生的数学思维，提高解题效率，发展数学运算素养.