

2021—2022 学年第一学期 12 月六校联合调研试题

高三数学参考答案

2021.12

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题意的。

1. A 2. B 3. A 4. C 5. D 6. B 7. A 8. D

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分。每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题意。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. AC 10. BC 11. ABD 12. AD

三、填空题：（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）。

13. 2 14. 4 15. $2n+1$ 或 $3n-1$ (形如 $kn-(k-2)$ (k 为不小于 3 的正整数) 答案不唯一)

16. 3, $4\sqrt{6}$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (本题满分 10 分)

解: (1) 由图象知, $A=2$.

又 $T = \frac{5\pi - \pi}{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = \frac{4\pi}{\frac{1}{12}} = 48\pi$, $\omega > 0$, 所以 $T = 2\pi = \frac{2\pi}{\omega}$, 得 $\omega = 1$2 分

所以 $f(x) = 2\sin(x + \varphi)$, 将点 $(\frac{\pi}{3}, 2)$ 代入, 得 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

即 $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$. 又 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$4 分

所以 $f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$5 分

(2) $g(x) = 2\sin(\frac{1}{t}x + \frac{\pi}{6})$,7 分

所以 $\frac{1}{t} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

所以 $t = \frac{3}{12k-2}, k \in \mathbf{Z}$ 9 分

故时 $k=1$, t 的最大值为 $\frac{3}{10}$ 10 分

18. (本题满分 12 分)

解: (1) 由题意知:

$\therefore X$ 的所有可能取值为: 27000, 36000, 48000,1 分

设 A 表示事件“作物亩产量为 900kg”, 则 $P(A)=0.5$,

B 表示事件“作物市场价格为 30 元/kg”, 则 $P(B)=0.4$,

则 $P(X=27000)=0.5 \times 0.4=0.2$,

$P(X=36000)=0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.6=0.5$,

$P(X=48000)=0.5 \times 0.6=0.3$,5 分

$\therefore X$ 的分布列为:

X	27000	36000	48000
P	0.2	0.5	0.3

.....6 分

(2) 设 C 表示事件“种植该农作物一亩一年的收入不少于 30000 元”，
 则 $P(C)=P(X \geq 30000)=P(X=36000)+P(X=48000)=0.8$,8 分

设这三年中有 Y 年有收入不少于 30000 元，则有 $Y \sim B(3, 0.8)$,10 分

\therefore 这三年中该农户种植该农作物一亩至少两年收入超过 30000 元的概率为：

$P(Y \geq 2) = 0.896$12 分

19. (本题满分 12 分)

解解(1)选①, 令 $n=1$, 则 $6S_1 = a_1^2 + 3a_1 - 4$,

所以 $a_1 = 4$ (负值舍去) 1 分

令 $n=2$, 则 $6S_2 = a_2^2 + 3a_2 - 4$,

则 $a_2 = 7$ (负值舍去) 2 分

所以 $a_n = 3n + 1$ 3 分

又 $a_2 = 2b_2 - 1$, $a_3 = b_3 + 2$, 所以 $b_2 = 4$, $b_3 = 8$

所以 $b_n = 2^n$ 6 分

选②, 令 $n=2$, 则 $a_2 = 2a_1 - 1$; 设数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列

所以 $a_1 = d + 1$ 1 分

令 $n=2$, 则 $a_3 = 2a_2 - 4$,

则 $d = 3$, $a_1 = 4$ 2 分

所以 $a_n = 3n + 1$ 3 分

又 $a_2 = 2b_2 - 1$, $a_3 = b_3 + 2$, 所以 $b_2 = 4$, $b_3 = 8$

所以 $b_n = 2^n$ 6 分

(2) 当 $\{c_n\}$ 的前 70 项中含有 $\{b_n\}$ 的前 6 项时, 令 $3n + 1 < 2^7 = 128 \Rightarrow n < \frac{127}{3}$,

此时至多有 $41 + 7 = 48$ 项 (不符).

当 $\{c_n\}$ 的前 70 项中含有 $\{b_n\}$ 的前 7 项时, 令 $3n + 1 < 2^8 = 256 \Rightarrow n < 85$, 9 分

且 $2^2, 2^4, 2^6$ 是 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的公共项, 则 $\{c_n\}$ 的前 70 项中含有 $\{b_n\}$ 的前 7 项且含有 $\{a_n\}$ 的前 66 项, 再减去公共的三项.

$\therefore S_{70} = (66 \times 4 + \frac{66 \times 65}{2} \times 3) + 2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 = 6869$ 12 分

(注其他方法正确, 酌情给分)

20. (本题满分 12 分)

解: (1) 证明: \because 四边形 $ABCD$ 是直角梯形, $AD=CD=2, BC=4,$

$$\therefore AC=2\sqrt{2}, AB=\sqrt{(BC-AD)^2+CD^2}=2\sqrt{2},$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 即 $AB \perp AC,$ 2 分

$\because PA \perp$ 平面 $ABCD, AB \subset$ 平面 $ABCD, \therefore PA \perp AB,$

又 $PA \cap AC=A, \therefore AB \perp$ 平面 $PAC,$ 4 分

又 $PC \subset$ 平面 $PAC, \therefore AB \perp PC.$ 6 分

(2) 过点 M 作 $MN \perp AD$ 于 $N,$ 则 $MN \parallel PA,$

$\therefore MN \perp$ 平面 $ABCD, \therefore MN \perp AC.$

过点 M 作 $MG \perp AC$ 于 $G,$ 连接 $NG,$ 则 $AC \perp NG,$

$\therefore \angle MGN$ 是二面角 $M-AC-D$ 的平面角.8 分

若 $\cos \angle MGN = \frac{\sqrt{3}}{3},$ 则 $\sqrt{2}NG = MN,$ 又 $AN = \sqrt{2}NG = MN,$

设 $MN=x,$ 则 $AN=x, ND=2-x,$

$\because \triangle MND$ 是等腰直角三角形, 解得 $x=2-x,$

$\therefore MN=1$ 10 分

在三棱锥 $M-ABC$ 中, $V_{M-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot MN = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times 1 = \frac{4}{3}$ 12 分

(2) 另解: 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于 $E,$ 以 A 点为原点, AE, AD, AP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立平面直角坐标系

取平面 DAC 的法向量 $\vec{AP} = (0, 0, 2).$ 8 分

设 $M(0, a, 2-a) (0 < a \leq 2), \vec{AM} = (0, a, 2-a), \vec{AC} = (2, 2, 0),$

设平面 CAM 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z).$

$$\text{由 } \vec{AC} \cdot \mathbf{n} = 0, \vec{AM} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ 得 } \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ ay + (2-a)z = 0 \end{cases}, \text{ 可取 } \mathbf{n} = (a-2, 2-a, -a),$$

所以 $\cos \theta < \vec{AP}, \mathbf{n} > = \frac{\sqrt{3}}{3}.$ 得 $a=1$ 10 分

故 $V_{M-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot a = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times 1 = \frac{4}{3}$ 12 分

21. (本小题满分 12 分)

解: (1) 直线 $l: y=2x-4$

$$\text{由 } \begin{cases} y = 2x - 4 \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}. \text{2 分}$$

所以 $A(4, 4), B(1, -2),$ 故 $AB=3\sqrt{5}.$ 4 分

(2) 存在 x 轴上的点 $N(-a, 0)$ 满足题意, 证明如下:5 分

设直线 $l: x=my+a$

$$\text{由} \begin{cases} x = my + a \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{得 } y^2 - 4my - 4a = 0.$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4a$ 7 分

$$\begin{aligned} k_{AN} + k_{BN} &= \frac{y_1}{x_1 + a} + \frac{y_2}{x_2 + a} = \frac{y_1(x_2 + a) + y_2(x_1 + a)}{(x_1 + a)(x_2 + a)} \\ &= \frac{y_1(my_2 + 2a) + y_2(my_1 + 2a)}{(x_1 + a)(x_2 + a)} = \frac{2my_1 y_2 + 2a(y_1 + y_2)}{(x_1 + a)(x_2 + a)} \\ &= \frac{2m \cdot (-4a) + 2a \cdot 4m}{(x_1 + a)(x_2 + a)} = 0 \end{aligned} \quad \text{.....10 分}$$

所以 $k_{AN} + k_{BN} = 0$, 可知 AN, BN 的倾斜角互补, 所以 $\angle ANM = \angle AMN$.

所以 NM 为 $\triangle ABN$ 的角平分线,

由正弦定理:

$$\frac{BM}{\sin \angle BNM} = \frac{BN}{\sin \angle BMN}, \quad \frac{AM}{\sin \angle ANM} = \frac{AN}{\sin \angle AMN}$$

两式相除得 $\frac{AN}{BN} = \frac{AM}{BM}$

综上, 存在 x 轴上的点 $N(-a, 0)$ 满足题意12 分

22. (本小题满分 12 分)

解: (1) 已知函数 $f(x) = e^{x+a} + b \sin x - 1$ 的图象在原点处的切线方程为 $y = 2x$

则 $f'(0) = 2, f(0) = 0$ 2 分

解得 $a = 0, b = 1$, 则 $f(x) = e^x + \sin x - 1$ 4 分

(2) 证 $f(x) \geq 2x$, 即证 $e^x + \sin x - 2x - 1 \geq 0$, 令 $g(x) = e^x + \sin x - 2x - 1$, 则 $g(0) = 0$, ...5 分

$g'(x) = e^x + \cos x - 2$. 则 $g'(0) = 0$, 令 $h(x) = e^x + \cos x - 2$, 则 $h(0) = 0, h'(x) = e^x - \sin x$.

当 $x > 0$ 时, $h'(x) = e^x - \sin x > 0$, 则 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, $h(x) > h(0) = 0$, 即 $g'(x) > 0$.

则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 则 $g(x) > g(0) = 0$ 7 分

当 $-\pi < x < 0$ 时, $e^x > 0, -\sin x > 0$, 所以 $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(-\pi, 0)$ 上的增函数, $h(x) < h(0) = 0$. 即 $g'(x) < 0$, 函数 $g(x)$ 在区间 $(-\pi, 0)$ 单调递减, 在区间 $(-\pi, 0)$ 上, $g(x) > g(0) = 0$10 分

又当 $x \leq -\pi$ 时, $g(x) = e^x + \sin x - 2x - 1 > 2\pi - 2 > 0$.

综上所述 $g(x) \geq 0$, 即 $f(x) \geq 2x$ 12 分