

2021—2022 学年第一学期 12 月六校联合调研试题

高三数学参考答案

2021.12

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题意的。

1. A 2. B 3. A 4. C 5. D 6. B 7. A 8. D

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分。每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题意。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. AC 10. BC 11. ABD 12. AD

三、填空题：（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）。

13. 2 14. 4 15. $2n+1$ 或 $3n-1$ (形如 $kn-(k-2)$ (k 为不小于 3 的正整数) 答案不唯一)

16. 3, $4\sqrt{6}$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤。

17. （本题满分 10 分）

解：(1) 由图象知， $A=2$ 。

又 $T = \frac{5\pi - \pi}{\omega} = \frac{4\pi}{\omega}$ ， $\omega > 0$ ，所以 $T = 2\pi = \frac{2\pi}{\omega}$ ，得 $\omega = 1$ 。2 分

所以 $f(x) = 2\sin(x + \varphi)$ ，将点 $(\frac{\pi}{3}, 2)$ 代入，得 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，

即 $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 。又 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 。4 分

所以 $f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$ 。5 分

(2) $g(x) = 2\sin(\frac{1}{t}x + \frac{\pi}{6})$ ，7 分

所以 $\frac{1}{t} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 。

所以 $t = \frac{3}{12k-2}, k \in \mathbb{Z}$ 9 分

故当 $k=1$ 时， t 的最大值为 $\frac{3}{10}$ 10 分

18. （本题满分 12 分）

解：(1) 由题意知：

$\therefore X$ 的所有可能取值为：27000, 36000, 48000,1 分

设 A 表示事件“作物亩产量为 900kg”，则 $P(A) = 0.5$ ，

B 表示事件“作物市场价格为 30 元/kg”，则 $P(B) = 0.4$ ，

则 $P(X=27000) = 0.5 \times 0.4 = 0.2$ ，

$P(X=36000) = 0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.6 = 0.5$ ，

$P(X=48000) = 0.5 \times 0.6 = 0.3$ ，5 分

$\therefore X$ 的分布列为：

X	27000	36000	48000
P	0.2	0.5	0.3

.....6 分

(2) 设 C 表示事件“种植该农作物一亩一年的收入不少于 30000 元”，

则 $P(C)=P(X \geq 30000)=P(X=36000)+P(X=48000)=0.8$,8 分

设这三年中有 Y 年有收入不少于 30000 元，则有 $Y \sim B(3, 0.8)$,10 分

\therefore 这三年中该农户种植该农作物一亩至少两年收入超过 30000 元的概率为：

$P(Y \geq 2) = 0.896$12 分

19. (本题满分 12 分)

解解(1) 选①, 令 $n=1$, 则 $6S_1=a_1^2+3a_1-4$,

所以 $a_1=4$ (负值舍去) 1 分

令 $n=2$, 则 $6S_2=a_2^2+3a_2-4$,

则 $a_2=7$ (负值舍去) 2 分

所以 $a_n=3n+1$ 3 分

又 $a_2=2b_2-1$. $a_3=b_3+2$, 所以 $b_2=4$, $b_3=8$

所以 $b_n=2^n$ 6 分

选②, 令 $n=2$, 则 $a_2=2a_1-1$; 设数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列

所以 $a_1=d+1$ 1 分

令 $n=2$, 则 $a_3=2a_2-4$;

则 $d=3$, $a_1=4$ 2 分

所以 $a_n=3n+1$ 3 分

又 $a_2=2b_2-1$. $a_3=b_3+2$, 所以 $b_2=4$, $b_3=8$

所以 $b_n=2^n$ 6 分

(2) 当 $\{c_n\}$ 的前 70 项中含有 $\{b_n\}$ 的前 6 项时, 令 $3n+1 < 2^7 = 128 \Rightarrow n < \frac{127}{3}$,

此时至多有 $41+7=48$ 项 (不符).

当 $\{c_n\}$ 的前 70 项中含有 $\{b_n\}$ 的前 7 项时, 令 $3n+1 < 2^8 = 256 \Rightarrow n < 85$, 9 分

且 2^2 , 2^4 , 2^6 是 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的公共项, 则 $\{c_n\}$ 的前 70 项中含有 $\{b_n\}$ 的前 7 项且含有 $\{a_n\}$ 的前 66 项, 再减去公共的三项.

$\therefore S_{70} = (66 \times 4 + \frac{66 \times 65}{2} \times 3) + 2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 = 6869$ 12 分

(注其他方法正确, 酌情给分)

20. (本题满分 12 分)

解: (1) 证明: \because 四边形 $ABCD$ 是直角梯形, $AD=CD=2$, $BC=4$,

$$\therefore AC=2\sqrt{2}, AB=\sqrt{(BC-AD)^2+CD^2}=2\sqrt{2},$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 即 $AB \perp AC$,2 分

$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore PA \perp AB$,

又 $PA \cap AC=A$, $\therefore AB \perp$ 平面 PAC ,4 分

又 $PC \subset$ 平面 PAC , $\therefore AB \perp PC$6 分

(2) 过点 M 作 $MN \perp AD$ 于 N , 则 $MN \parallel PA$,

$\therefore MN \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore MN \perp AC$.

过点 M 作 $MG \perp AC$ 于 G , 连接 NG , 则 $AC \perp NG$,

$\therefore \angle MGN$ 是二面角 $M-AC-D$ 的平面角.8 分

若 $\cos \angle MGN = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\sqrt{2}NG = MN$, 又 $AN = \sqrt{2}NG = MN$,

设 $MN=x$, 则 $AN=x$, $ND=2-x$,

$\because \triangle MND$ 是等腰直角三角形, 解得 $x=2-x$,

$\therefore MN=1$ 10 分

在三棱锥 $M-ABC$ 中, $V_{M-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot MN = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times 1 = \frac{4}{3}$ 12 分

(2) 另解: 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于 E , 以 A 点为原点, AE , AD , AP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立平面直角坐标系

取平面 DAC 的法向量 $\vec{AP} = (0, 0, 2)$8 分

设 $M(0, a, 2-a) (0 < a \leq 2)$, $\vec{AM} = (0, a, 2-a)$, $\vec{AC} = (2, 2, 0)$,

设平面 CAM 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$.

由 $\vec{AC} \cdot \mathbf{n} = 0$, $\vec{AM} \cdot \mathbf{n} = 0$ 得 $\begin{cases} 2x+2y=0 \\ ay+(2-a)z=0 \end{cases}$, 可取 $\mathbf{n} = (a-2, 2-a, -a)$,

所以 $\cos \theta < \vec{AP}, \mathbf{n} > = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 得 $a=1$ 10 分

故 $V_{M-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot a = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times 1 = \frac{4}{3}$ 12 分

21. (本小题满分 12 分)

解: (1) 直线 $l: y=2x-4$

由 $\begin{cases} y=2x-4 \\ y^2=4x \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$2 分

所以 $A(4, 4)$, $B(1, -2)$, 故 $AB=3\sqrt{5}$4 分

(2) 存在 x 轴上的点 $N(-a, 0)$ 满足题意, 证明如下:5 分

设直线 $l: x=my+a$

$$\text{由} \begin{cases} x=my+a \\ y^2=4x \end{cases} \text{得 } y^2-4my-4a=0.$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1+y_2=4m, y_1y_2=-4a$ 7 分

$$\begin{aligned} k_{AN}+k_{BN} &= \frac{y_1}{x_1+a} + \frac{y_2}{x_2+a} = \frac{y_1(x_2+a)+y_2(x_1+a)}{(x_1+a)(x_2+a)} \\ &= \frac{y_1(my_2+2a)+y_2(my_1+2a)}{(x_1+a)(x_2+a)} = \frac{2my_1y_2+2a(y_1+y_2)}{(x_1+a)(x_2+a)} \\ &= \frac{2m \cdot (-4a)+2a \cdot 4m}{(x_1+a)(x_2+a)} = 0 \end{aligned} \quad \text{.....10 分}$$

所以 $k_{AN}+k_{BN}=0$, 可知 AN, BN 的倾斜角互补, 所以 $\angle ANM = \angle AMN$.

所以 NM 为 $\triangle ABN$ 的角平分线,

由正弦定理:

$$\frac{BM}{\sin \angle BNM} = \frac{BN}{\sin \angle BMN}, \quad \frac{AM}{\sin \angle ANM} = \frac{AN}{\sin \angle AMN}$$

两式相除得 $\frac{AN}{BN} = \frac{AM}{BM}$

综上, 存在 x 轴上的点 $N(-a, 0)$ 满足题意12 分

22. (本小题满分 12 分)

解: (1) 已知函数 $f(x)=e^{x+a}+b\sin x-1$ 的图象在点 $(0, 2)$ 处的切线方程为 $y=2x$

则 $f'(0)=2, f(0)=0$ 2 分

解得 $a=0, b=1$, 则 $f(x)=e^x+\sin x-1$ 4 分

(2) 证 $f(x) \geq 2x$, 即证 $e^x+\sin x-2x-1 \geq 0$, 令 $g(x)=e^x+\sin x-2x-1$, 则 $g(0)=0$, ...5 分

$g'(x)=e^x+\cos x-2$. 则 $g'(0)=0$, 令 $h(x)=e^x+\cos x-2$, 则 $h(0)=0, h'(x)=e^x-\sin x$.

当 $x > 0$ 时, $h'(x)=e^x-\sin x > 0$, 则 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, $h(x) > h(0)=0$, 即 $g'(x) > 0$.

则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 则 $g(x) > g(0)=0$ 7 分

当 $-\pi < x < 0$ 时, $e^x > 0, -\sin x > 0$, 所以 $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(-\pi, 0)$ 上是增函数, $h(x) < h(0) = 0$. 即 $g'(x) < 0$, 函数 $g(x)$ 在区间 $(-\pi, 0)$ 单调递减, 在区间 $(-\pi, 0)$ 上, $g(x) > g(0)=0$10 分

又当 $x \leq -\pi$ 时, $g(x)=e^x+\sin x-2x-1 > 2\pi-2 > 0$.

综上所述 $g(x) \geq 0$, 即 $f(x) \geq 2x$ 12 分