

数学试题

本试卷共4页,22题,全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 已知复数 $z = \frac{2i}{1+i}$ (其中 i 为虚数单位),则 z 在复平面内所对应的点在
A.第一象限 B.第二象限 C.第三象限 D.第四象限
- $(x + \frac{1}{x})^6$ 的展开式中,含 x^4 项的系数为
A.4 B.6 C.10 D.15
- $\triangle ABC$ 中,“ $\sin A = \frac{1}{2}$ ”是“ $A = \frac{\pi}{6}$ ”的
A.充要条件 B.充分不必要条件 C.必要不充分条件 D.既不充分也不必要条件
- 第24届冬季奥林匹克运动会将于2022年在北京举办。为了解某城市居民对冰雪运动的关注情况,随机抽取了该市100人进行调查统计,得到如下 2×2 列联表。

	男	女	合计
关注冰雪运动	35	25	60
不关注冰雪运动	15	25	40
合计	50	50	100

根据列联表可知

- 该市女性居民中大约有5%的人关注冰雪运动
- 该市男性居民中大约有95%的人关注冰雪运动
- 有95%的把握认为该市居民是否关注冰雪运动与性别有关
- 有99%的把握认为该市居民是否关注冰雪运动与性别有关

参考公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$ 。

附表:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

- 将函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后,得到函数 $g(x)$ 的图象,则下列

关于 $g(x)$ 的说法正确的是

- 最小正周期为 π
- 最小值为 -1
- 图象关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ 中心对称
- 图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称

- 已知抛物线 $x^2 = 2py$ ($p > 0$),过焦点 F 的直线与抛物线交于 A, B 两点(点 A 在第一象限)。若直线 AB 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,点 A 的纵坐标为 $\frac{3}{2}$,则 p 的值为

- $\frac{1}{4}$
- $\frac{1}{2}$
- 1
- 2

- 苏格兰数学家纳皮尔发明了对数表,这一发明为当时天文学家处理“大数运算”提供了巨大的便利。已知正整数 N 的31次方是一个35位数,则由下面的对数表,可得 N 的值为

M	2	3	6	7	8	9	11	12	13	14	15	16	17
$\lg M$	0.30	0.48	0.78	0.85	0.90	0.95	1.04	1.08	1.11	1.15	1.18	1.20	1.23

- 12
- 13
- 14
- 15

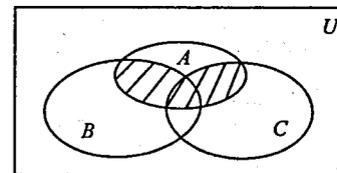
- 已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为2,平面 α 与棱 AB, CD 均平行,则 α 截此正四面体所得截面面积的最大值为

- 1
- $\sqrt{2}$
- $\sqrt{3}$
- 2

二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分。在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分。

- 图中阴影部分用集合符号可以表示为

- $A \cap (B \cup C)$
- $A \cup (B \cap C)$
- $A \cap \complement_U(B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup (A \cap C)$



- 已知函数 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$,则下列说法正确的是

- $f(x)$ 为奇函数
- $f(x)$ 为减函数
- $f(x)$ 有且只有一个零点
- $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1)$

- 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_n \cdot a_{n+1} = 2^n, n \in \mathbb{N}_+$,则下列说法正确的是

- $a_4 = 4$
- $\{a_{2n}\}$ 是等比数列
- $a_{2n} - a_{2n-1} = 2^{n-1}$
- $a_{2n-1} + a_{2n} = 2^{n+1}$

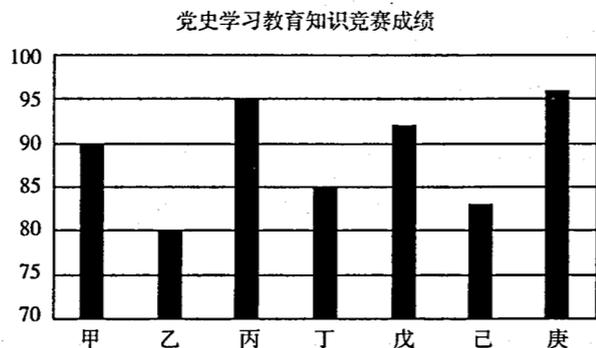
- 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点,过 F_2 且倾斜角为 θ 的直线与双曲线的右支交于 A, B 两点,记 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆 O_1 的半径为 $r_1, \triangle BF_1F_2$ 的内切圆 O_2 的半径为 r_2 ,圆 O_1 的面积为 S_1 ,圆 O_2 的面积为 S_2 ,则

- θ 的取值范围是 $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$
- 直线 O_1O_2 与 x 轴垂直
- 若 $r_1 + r_2 = 2$,则 $|AB| = 6$
- $S_1 + S_2$ 的取值范围是 $[2\pi, \frac{10\pi}{3})$

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13.已知平面向量 a, b , 满足 $|b| = \sqrt{2}$, $(a-b) \perp b$, 则 $a \cdot b$ 的值为_____。

14.习近平总书记在党史学习教育动员大会上强调:“回望过往的奋斗路,眺望前方的奋进路,必须把党的历史学习好、总结好,把党的成功经验传承好、发扬好。”某小组为响应习总书记号召,重温百年奋斗的恢弘史诗,以信仰之光照亮前行之路,组织开展党史学习教育知识竞赛活动,其中7名党员在这次活动中的成绩统计如图所示。则这7个成绩的中位数所对应的党员是_____。



15.已知一个圆锥的侧面积是底面面积的2倍,则该圆锥的母线与其底面所成的角的大小为_____。

16.已知函数 $f(x) = e^x - a - \ln(ex+a)$, 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立,则实数 a 的取值范围为_____。

四、解答题:本题共6小题,共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(10分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\triangle ABC$ 恰好满足下列四个条件中的三个:① $\cos A = \frac{1}{2}$; ② $\cos B = -\frac{1}{2}$; ③ $a = \sqrt{3}$; ④ $b = 1$ 。

- 请指出这三个条件(不必说明理由);
- 求边 c 。

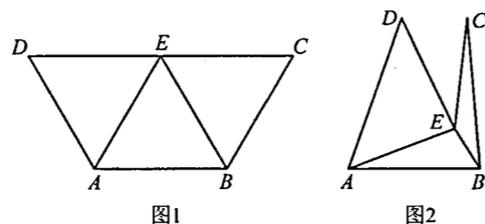
18.(12分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_2 = 4, S_5 = 30$ 。

- 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- 若 $b_n = \frac{2}{a_n^2 - 1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

19.(12分)

如图1,在等腰梯形 $ABCD$ 中, E 为 CD 的中点, $AB = BC = CE$, 将 $\triangle ADE, \triangle BCE$ 分别沿 AE, BE 折起,使平面 $ADE \perp$ 平面 ABE , 平面 $BCE \perp$ 平面 ABE , 得到图2。



- 证明: $AB \parallel CD$;
- 记平面 ADE 与平面 BCE 的交线为 l , 求二面角 $D-l-C$ 的大小。

20.(12分)

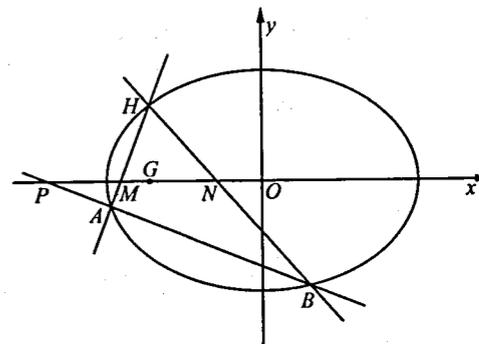
已知函数 $f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} (n \in \mathbb{N}_+)$ 。

- 证明: $f_3(x)$ 单调递增且有唯一零点;
- 已知 $f_{2n-1}(x)$ 单调递增且有唯一零点, 判断 $f_{2n}(x)$ 的零点个数。

21.(12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且经过点 $H(-2, 1)$ 。

- 求椭圆 C 的方程;
- 过点 $P(-3, 0)$ 的直线与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 直线 HA, HB 分别交 x 轴于 M, N 两点, 点 $G(-2, 0)$, 若 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PG}, \overrightarrow{PN} = \mu \overrightarrow{PG}$, 求证: $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ 为定值。



22.(12分)

某企业对生产设备进行优化升级,升级后的设备控制系统由 $2k-1 (k \in \mathbb{N}_+)$ 个相同的元件组成,每个元件正常工作的概率均为 $p (0 < p < 1)$, 各元件之间相互独立.当控制系统有不少于 k 个元件正常工作时,设备正常运行,否则设备停止运行,记设备正常运行的概率为 p_k (例如: p_2 表示控制系统由3个元件组成时设备正常运行的概率; p_5 表示控制系统由5个元件组成时设备正常运行的概率)。

- 若每个元件正常工作的概率 $p = \frac{2}{3}$.
 - 当 $k=2$ 时,求控制系统中正常工作的元件个数 X 的分布列和期望;
 - 计算 p_3 。
- 已知设备升级前,单位时间的产量为 a 件,每件产品的利润为1元,设备升级后,在正常运行状态下,单位时间的产量是原来的4倍,且出现了高端产品,每件产品成为高端产品的概率为 $\frac{1}{4}$, 每件高端产品的利润是2元.请用 p_k 表示出设备升级后单位时间内的利润 y (单位:元),在确保控制系统中元件总数为奇数的前提下,分析该设备能否通过增加控制系统中元件的个数来提高利润。