

南通市市直 2021-2022（上）期中高三调研测试

数学参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | 1 < x < 4\}$ ，集合 $B = \{x | 0 < x < 2\}$ 。则集合 $A \cap (\complement_U B) =$

- A. $(1, 2)$ B. $(1, 2]$ C. $(2, 4)$ D. $[2, 4)$

【答案】D

2. 已知 $z = 1 - 2i$ ，则 $|\bar{z} - z| =$

- A. 2 B. 4 C. $4i$ D. $-4i$

【答案】B

3. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，有下列四个等式：

甲： $a_1 = 1$ ；乙： $a_4 = 4$ ；丙： $S_3 = 9$ ；丁： $S_5 = 25$ 。

如果只有一个等式不成立，则该等式为

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

【答案】B

4. 经研究发现，某昆虫释放信息素 t s 后，在距释放处 x m 的地方测得信息素浓度 y 满足

$\ln y = -\frac{1}{2} \ln t - \frac{K}{t} x^2 + A$ ，其中 A, K 为非零常数。已知释放 1 s 后，在距释放处 2 m 的

地方测得信息素浓度为 a ，则释放信息素 4 s 后，信息素浓度为 $\frac{a}{2}$ 的位置距释放处的距离为

- A. $\frac{1}{4}$ m B. $\frac{1}{2}$ m C. 2 m D. 4 m

【答案】D

5. 已知圆锥 SO 的顶点为 S ，母线 SA, SB, SC 两两垂直，且 $SA = SB = SC = 6$ ，

则圆锥 SO 的体积为

A. $18\sqrt{2}\pi$

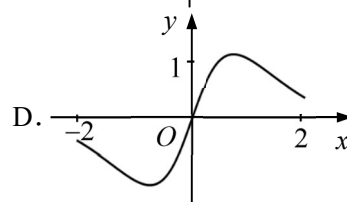
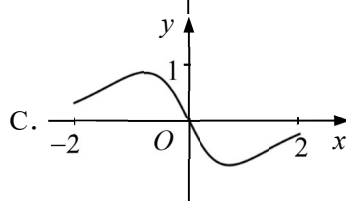
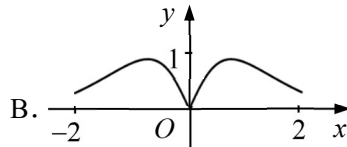
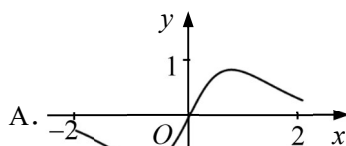
B. $54\sqrt{2}\pi$

C. $16\sqrt{3}\pi$

D. $48\sqrt{3}\pi$

【答案】C

6. 函数 $y = \frac{2\sin x}{x^2 + 1} (x \in [-2, 2])$ 的图象大致为



【答案】A

7. 已知 $a, b, c \in (0, +\infty)$, 且 $e^a - e^{-\frac{1}{2}} = a + \frac{1}{2}$, $e^b - e^{-\frac{1}{3}} = b + \frac{1}{3}$, $e^c - e^{-\frac{1}{5}} = c + \frac{1}{5}$, 则

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $c < b < a$

D. $b < c < a$

【答案】C

8. 由倍角公式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, 可知 $\cos 2x$ 可以表示为 $\cos x$ 的二次多项式.

一般地, 存在一个 n 次多项式 $P_n(t)$, 使得 $\cos nx = P_n(\cos x)$, 这些多项式 $P_n(t)$ 称为切比

雪夫 (P. L. Tschebyscheff) 多项式.

例如: $\cos 2x = P_2(\cos x) = 2\cos^2 x - 1$, 记作 $P_2(t) = 2t^2 - 1$. 利用 $P_3(t)$ 求得 $\sin 18^\circ =$

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

B. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{5}+1}{8}$

【答案】A

- 二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知 $a > b$, 则

A. $\ln(a^2 + 1) > \ln(b^2 + 1)$

B. $a^{\frac{1}{3}} > b^{\frac{1}{3}}$

C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

D. $\left(\frac{1}{3}\right)^a < \left(\frac{1}{3}\right)^b$

【答案】BD

10. 已知把函数 $y = \sin 2x$ 的图象上所有点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 可得到函数 $y = f(x)$ 的图象, 则

$$A. f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$B. f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$C. f(x) = \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$D. f(x) = \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

【答案】AC

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = -2, a_2 = 2, a_{n+2} - 2a_n = 1 - (-1)^n$, 则

A. $\{a_{2n-1}\}$ 是等比数列

$$B. \sum_{i=1}^5 (a_{2i-1} + 2) = -10$$

C. $\{a_{2n}\}$ 是等比数列

$$D. \sum_{i=1}^{10} a_i = 52$$

【答案】ACD

12. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 M 在线段 AD_1 上, 点 N 在线段 BD 上, 则

A. 当 M 为 AD_1 的中点时, $AC_1 \perp MN$

B. 当 $MN \parallel$ 平面 CC_1D_1D 时, $AM = BN$

C. 当 N 为 BD 的中点时, 三棱锥 $C_1 - BMN$ 的体积为 $\frac{1}{6}$

D. 当 M 为 AD_1 的中点时, 以 M 为球心, MN 为半径的球被平面 BB_1D_1D 截得圆的面积的最小值为 $\frac{\pi}{4}$

【答案】ABD

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知中心为 O 的正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 2, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} =$ _____.

【答案】-2

14. 已知函数 $f(x) = (x-a)(x-3)^2$ ($a \in \mathbf{R}$), 当 $x=3$ 时, $f(x)$ 有极大值.

写出符合上述要求的一个 a 的值为_____.

【答案】4 (答案不唯一, 满足 $a > 3$ 即可)

15. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x)$ 为偶函数, $f(x+1)$ 为奇函数, 当 $x \in [1, 2]$ 时,

$f(x) = a \cdot 2^x + b$, 若 $f(0) + f(1) = -4$, 则 $f\left(\frac{7}{2}\right) =$ _____.

【答案】 $4 - 4\sqrt{2}$

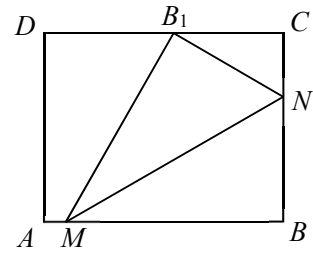
16. 如图, 将矩形纸片 $ABCD$ 的右下角折起, 使得点 B 落在

CD 边上点 B_1 处, 得到折痕 MN . 已知 $AB = 5 \text{ cm}$,

$BC = 4 \text{ cm}$, 则当 $\tan \angle BMN =$ _____ 时,

折痕 MN 最短, 其长度的最小值为 _____ cm .

(本题第一空2分, 第二空3分)



(第 16 题)

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}, 3\sqrt{3}$

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为正数的等比数列, 且 $a_1 = 2, a_3 = a_2 + 4$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \log_2 a_n$, 求数列 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

解: (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$,

由 $a_1 = 2, a_3 = a_2 + 4$, 得 $2q^2 = 2q + 4 (q > 0)$.

所以 $q = 2 (q = -1, \text{舍})$ 3 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2 \times 2^{n-1}$ 即 $a_n = 2^n$ 5 分

(2) 由 (1) 及 $b_n = \log_2 a_n$, 得 $b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^n = n$.

所以数列 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \end{aligned} \quad \text{..... 7 分}$$

$$= \frac{2(1-2^n)}{1-2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 2^{n+1} - 2. \quad \text{..... 10 分}$$

18. (12 分)

已知函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + \cos 2x$.

(1) 求 $f(0), f(-\frac{\pi}{12})$;

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值与最小值.

解：(1) $f(0) = \sin \frac{\pi}{6} + \cos 0 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, $f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \sin 0 + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 4 分

$$\begin{aligned} (2) \quad f(x) &= \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos 2x = \sin 2x \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{6} + \cos 2x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{3}{2} \cos 2x \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \right) = \sqrt{3} \left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right). \dots 8 \text{ 分} \end{aligned}$$

因为 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, 所以 $-\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}$.

又因为函数 $y = \sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上单调递减,

所以当 $2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$, 即 $x = -\frac{\pi}{4}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

当 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $\sqrt{3}$ 12 分

19. (12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $PA \perp CD$, $AB = BC = PA = PC = 1$, $AD = 2$.

(1) 证明: $CD \perp$ 平面 PAC ;

(2) 若 $AC = 1$, 求二面角 $A-PD-C$ 的正弦值.

解: (1) 设 AD 的中点为 E , 连接 AC , BE , CE .

因为 $AD = 2$, 所以 $AE = ED = 1$,

因为 $BC = AE = 1$, $AD \parallel BC$,

所以四边形 $ABCE$ 为平行四边形.

又因为 $AB = BC$,

所以四边形 $ABCE$ 为菱形,

所以 $AC \perp BE$,

..... 2 分

同理, 由 $ED \parallel BC$, $ED = BC = 1$ 得四边形 $BCDE$ 为平行四边形,

所以 $CD \parallel BE$, 所以 $CD \perp AC$,

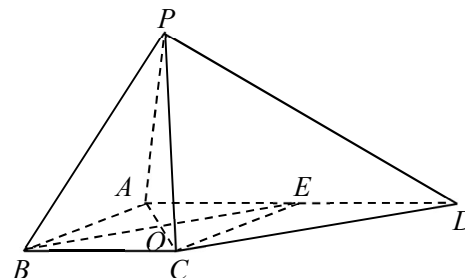
..... 4 分

又 $CD \perp PA$, $PA \cap AC = A$, $PA, AC \subset$ 平面 PAC ,

所以 $CD \perp$ 平面 PAC .

..... 6 分

(2) 方法一: 设 $AC \cap BE = O$, 由 (1) 得 O 为 AC 的中点.

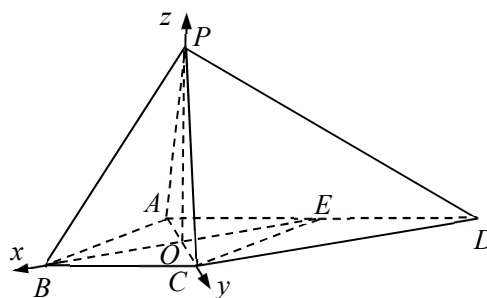


(第 19 题)

连接 PO ，因为 $PA = PC = 1$ ，
 所以 $PO \perp AC$ ，又因为 $AC = 1$ ，
 所以 $PO = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

由 (1) 得 $CD \perp$ 平面 PAC ，
 又因为 $PO \subset$ 平面 PAC
 所以 $CD \perp PO$ 。

又由 (1) 得， $CD \parallel BE$ ，所以 $PO \perp BE$ ，
 又因为 $AC \perp BE$ ，
 所以 PO, AC, BE 两两垂直。



(第 19 题)

以 O 为坐标原点，分别以 OB, OC, OP 所在直线为 x, y, z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$ 。

所以 $P\left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)$, $C\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$, $D\left(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0\right)$,
 所以 $\overrightarrow{AP} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{AD} = (-\sqrt{3}, 1, 0)$, $\overrightarrow{CP} = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{CD} = (-\sqrt{3}, 0, 0)$ 。

..... 8 分

设平面 APD 的法向量 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ，平面 CPD 的法向量 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ，

$$\text{由 } \begin{cases} \overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \\ \overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} \frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_1 = 0, \\ -\sqrt{3}x_1 + y_1 = 0. \end{cases}$$

令 $x_1 = 1$ ，得 $y_1 = \sqrt{3}$, $z_1 = -1$ ，所以平面 APD 的一个法向量 $\mathbf{n}_1 = (1, \sqrt{3}, -1)$ ，

同理，由 $\begin{cases} \overrightarrow{CP} \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \\ \overrightarrow{CD} \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \end{cases}$ 得平面 CPD 的一个法向量 $\mathbf{n}_2 = (0, \sqrt{3}, 1)$ 。..... 10 分

设二面角 $A-PD-C$ 的大小为 θ ，

$$\text{所以 } |\cos \theta| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

所以二面角 $A-PD-C$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。..... 12 分

方法二：取 PC 的中点 H ，连接 AH ，过点 A 作 $AF \perp PD$ ，垂足为 F ，连接 HF 。

因为 $PA = PC = AC = 1$ ， H 为 PC 的中点，

所以 $AH \perp PC$ 。

函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ 5 分

(2) 方法一: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq 1$, 即 $ax^2 \leq e^x + x - 1$.

当 $x = 0$ 时, $a \in \mathbf{R}$ 6 分

当 $x > 0$ 时, $a \leq \frac{e^x + x - 1}{x^2}$, 记 $g(x) = \frac{e^x + x - 1}{x^2} (x > 0)$, 8 分

$$\text{则 } g'(x) = \frac{(x-2)(e^x - 1)}{x^3},$$

令 $g'(x) > 0$, 解得 $x > 2$; 令 $g'(x) < 0$, 解得 $0 < x < 2$,

所以函数 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

所以当 $x = 2$ 时, $g(x)$ 取最小值 $\frac{e^2 + 1}{4}$, 11 分

所以 $a \leq \frac{e^2 + 1}{4}$.

综上, 实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{e^2 + 1}{4}\right]$ 12 分

$$\text{方法二: } f'(x) = \frac{-ax^2 + (2a+1)x - 2}{e^x} = \frac{-(x-2)(ax-1)}{e^x},$$

$$\text{当 } a = 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{x-2}{e^x},$$

令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 2$, 所以 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增;

令 $f'(x) < 0$, 得 $x < 2$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上单调递减.

所以 $f(x)$ 在 $[0, 2)$ 上单调递减.

所以当 $x \in [0, 2)$ 时, $f(x) \leq f(0) = 1$,

又当 $x \in [2, +\infty)$ 时, $f(x) = \frac{-x+1}{e^x} < 0 \leq 1$.

所以 $a = 0$ 符合题意. 7 分

$$\text{当 } a = \frac{1}{2} \text{ 时, } f'(x) = -\frac{(x-2)^2}{2e^x} \leq 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 因为 $f(0) = 1$, 所以 $f(x) \leq 1$,

所以 $a = \frac{1}{2}$ 符合题意. 8 分

当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x < \frac{1}{a}$ 或 $x > 2$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{1}{a}\right)$ 和 $(2, +\infty)$ 上单

调递增; 令 $f'(x) < 0$, 得 $\frac{1}{a} < x < 2$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a}, 2\right)$ 上单调递减.

所以 $f(x)$ 在 $[0, 2)$ 上单调递减,

所以当 $x \in [0, 2)$ 时, $f(x) \leq f(0) = 1$,

又当 $x \in [2, +\infty)$ 时, $f(x) = \frac{ax^2 - x + 1}{e^x} < 0 \leq 1$,

所以 $a < 0$ 符合题意. 9 分

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $2 < x < \frac{1}{a}$, 所以 $f(x)$ 在 $(2, \frac{1}{a})$ 上单调递增;

令 $f'(x) < 0$, 得 $x < 2$ 或 $x > \frac{1}{a}$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 和 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减.

所以 $f(x)$ 在 $[0, 2)$ 上单调递减,

所以当 $x \in [0, 2)$ 时, $f(x) \leq f(0) = 1$,

又因为 $f(x)$ 在 $(2, \frac{1}{a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减.

所以由 $f(x) \leq 1$, 得 $f(\frac{1}{a}) \leq 1$, 即 $\frac{a \cdot (\frac{1}{a})^2 - \frac{1}{a} + 1}{e^{\frac{1}{a}}} \leq 1$, 即 $e^{\frac{1}{a}} \geq 1$.

所以 $0 < a < \frac{1}{2}$ 符合题意. 10 分

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $\frac{1}{a} < x < 2$, 所以 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, 2)$ 上单调递增;

令 $f'(x) < 0$, 得 $x < \frac{1}{a}$ 或 $x > 2$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{a})$ 和 $(2, +\infty)$ 上单调递减.

所以 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{a})$ 和 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a}, 2)$ 单调递增.

因为 $f(0) = 1$, 所以由 $f(x) \leq 1$ 得 $f(2) \leq 1$, 即 $\frac{4a-1}{e^2} \leq 1$, 解得 $a \leq \frac{e^2+1}{4}$.

所以 $\frac{1}{2} < a \leq \frac{e^2+1}{4}$ 11 分

综上, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{e^2+1}{4}]$ 12 分

21. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是 BC 上的点, AD 平分 $\angle BAC$, 且 $AC - CD = \frac{3}{2}$.

(1) 若 $AB = 2BD = 5$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $AB + BD = 6$, 求 AD .

解: (1) 方法一: 设 $CD = x$, 由 $AC - CD = \frac{3}{2}$, 得 $AC = x + \frac{3}{2}$,

又 $AB = 2BD = 5$,

在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理，得 $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}$ ①

在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理，得 $\frac{AC}{\sin \angle ADC} = \frac{CD}{\sin \angle CAD}$ ②

因为 AD 平分 $\angle BAC$ ，所以 $\angle BAD = \angle CAD$ ，

由 $\angle ADB + \angle ADC = \pi$ ，得 $\sin \angle ADB = \sin \angle ADC$ ，

由 ① 得， $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ ，所以 $\frac{5}{x + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{x}$ ，解得 $x = \frac{3}{2}$ 4 分

所以 $AC = 3$ ， $BC = BD + CD = 4$ 。

所以 $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ，所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形。

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 6$ 6 分

方法二：因为在 $\triangle ABC$ 中， AD 平分 $\angle BAC$ ，

所以 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD}{\frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin \angle CAD} = \frac{AB}{AC}$ 。

设 $\triangle ABC$ 边 BC 上的高为 h ，

所以 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} BD \cdot h}{\frac{1}{2} CD \cdot h} = \frac{BD}{CD}$ ，所以 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ 。

又因为 $AB = 2BD = 5$ ，且 $AC - CD = \frac{3}{2}$ ，设 $CD = x$ ，

由 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ ，得 $\frac{5}{\frac{3}{2} + x} = \frac{\frac{5}{2}}{x}$ ，

解得 $x = \frac{3}{2}$ ，所以 $AC = 3$ ， $BC = BD + CD = 4$ 4 分

所以 $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ， $\triangle ABC$ 为直角三角形。

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 6$ 6 分

(2) 方法一：设 $BD = m$ ， $DC = n$ ，则 $AB = 6 - m$ ， $AC = n + \frac{3}{2}$ ，

由 (1) 知， $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ ，所以 $\frac{6-m}{n+\frac{3}{2}} = \frac{m}{n}$ ，即 $2mn = 6n - \frac{3}{2}m$ ， 8 分

在 $\triangle ADB$ 中, $\cos \angle ADB = \frac{AD^2 + DB^2 - AB^2}{2AD \cdot DB}$,

在 $\triangle ADC$ 中, $\cos \angle ADC = \frac{AD^2 + DC^2 - AC^2}{2AD \cdot DC}$ 10 分

因为 $\angle ADB + \angle ADC = \pi$, 所以 $\cos \angle ADB = -\cos \angle ADC$,

所以 $\frac{AD^2 + DB^2 - AB^2}{2AD \cdot DB} = -\frac{AD^2 + DC^2 - AC^2}{2AD \cdot DC}$,

所以 $AD^2 = \frac{AB^2 \cdot CD - BD^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD - CD^2 \cdot BD}{CD + BD} = \frac{\frac{9}{4}m + 36n - 9mn}{m + n}$,

将 $mn = 3n - \frac{3}{4}m$ 代入上式, 得 $AD^2 = \frac{9(m+n)}{m+n} = 9$.

所以 $AD = 3$ 12 分

方法二: 由 (1) 可设 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = k (k > 0)$, 则 $AB = kAC$, $BD = kCD$.

又 $AB + BD = 6$, 且 $AC - CD = \frac{3}{2}$,

所以 $\begin{cases} AC + CD = \frac{6}{k}, \\ AC - CD = \frac{3}{2}. \end{cases}$

所以 $AB = \frac{12+3k}{4}$, $AC = \frac{12+3k}{4k}$, $BD = \frac{12-3k}{4}$, $CD = \frac{12-3k}{4k}$ 8 分

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理, 得 $\left(\frac{12-3k}{4}\right)^2 = AD^2 + \left(\frac{12+3k}{4}\right)^2 - 2AD \cdot \frac{12+3k}{4} \cos \angle BAD$

即 $\frac{12+3k}{2} \cdot AD \cdot \cos \angle BAD = AD^2 + 9k$ ①

在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理, 得 $\left(\frac{12-3k}{4k}\right)^2 = AD^2 + \left(\frac{12+3k}{4k}\right)^2 - 2AD \cdot \frac{12+3k}{4k} \cos \angle CAD$

即 $\frac{12+3k}{2} \cdot AD \cdot \cos \angle CAD = kAD^2 + 9$ ②

由①②, 得 $kAD^2 + 9 = AD^2 + 9k$,

所以 $(k-1)(AD^2-9)=0$, 所以 $k=1$ 或 $AD=3$ 11 分

当 $k=1$ 时, $AB = AC = \frac{15}{4}$, $BD = CD = \frac{9}{4}$, 此时 $AD=3$.

综上可得 $AD=3$ 12 分

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = x \ln x$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 设 x_1, x_2 为两个不相等的正数, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明: $\frac{2}{e} < x_1 + x_2 < 1$.

解: (1) $f(x) = x \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f(1) = 0$.

$$f'(x) = \ln x + 1, f'(1) = 1,$$

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x - 1$, 即 $x - y - 1 = 0$ 4 分

(2) 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{e}$.

列表如下

x	$\left(0, \frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow	极小值	\nearrow

所以, 由 $f(x_1) = f(x_2)$ ($x_1 \neq x_2$), 不妨设 $0 < x_1 < \frac{1}{e} < x_2 < 1$.

当 $x_2 \geq \frac{2}{e}$ 时, $x_1 + x_2 > \frac{2}{e}$ 成立,

当 $x_2 < \frac{2}{e}$ 时, 要证 $x_1 + x_2 > \frac{2}{e}$, 即证 $x_2 > \frac{2}{e} - x_1$.

因为 $0 < x_1 < \frac{1}{e}$, 所以 $\frac{1}{e} < \frac{2}{e} - x_1 < \frac{2}{e}$, 又因为 $\frac{1}{e} < x_2 < \frac{2}{e}$,

且函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上单调递增,

所以要证 $x_2 > \frac{2}{e} - x_1$, 即证 $f(x_2) > f\left(\frac{2}{e} - x_1\right)$.

因为 $f(x_1) = f(x_2)$, 所以只要证 $f(x_1) > f\left(\frac{2}{e} - x_1\right)$, 即证 $f(x_1) - f\left(\frac{2}{e} - x_1\right) > 0$.

设 $g(x) = f(x) - f\left(\frac{2}{e} - x\right)$ ($0 < x < \frac{1}{e}$), 则 $g\left(\frac{1}{e}\right) = 0$.

$$g'(x) = f'(x) + f'\left(\frac{2}{e} - x\right) = \ln\left(x\left(\frac{2}{e} - x\right)\right) + 2,$$

因为 $0 < x < \frac{1}{e}$, 所以 $0 < x\left(\frac{2}{e} - x\right) < \left(\frac{1}{e}\right)^2$,

所以 $\ln\left(x\left(\frac{2}{e} - x\right)\right) < -2$, 即 $\ln\left(x\left(\frac{2}{e} - x\right)\right) + 2 < 0$, 即 $g'(x) < 0$, 6 分

所以函数 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上单调递减.

又 $g\left(\frac{1}{e}\right)=0$ ，所以当 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时， $g(x) > 0$ ，即 $f(x_1) - f\left(\frac{2}{e} - x_1\right) > 0$ ，

所以 $x_1 + x_2 > \frac{2}{e}$ 。

综上， $x_1 + x_2 > \frac{2}{e}$ 。

..... 8 分

方法一：令 $\frac{x_2}{x_1} = t (t > 1)$ ，由 $f(x_1) = f(x_2)$ ，得 $x_1 \ln x_1 = x_2 \ln x_2$ ，

化为 $\ln x_1 = t \ln(tx_1)$ ，得 $\ln x_1 = \frac{t}{1-t} \ln t$ ，

要证 $x_1 + x_2 < 1$ ，只要证 $\ln(x_1 + x_2) < 0$ ，即证 $\ln(x_1(1+t)) < 0$ ，

即 $\ln x_1 + \ln(1+t) < 0$ ，即 $\frac{t}{1-t} \ln t + \ln(1+t) < 0$ ，

即证 $t \ln t + (1-t) \ln(1+t) > 0$ ，

..... 10 分

设 $g(t) = t \ln t + (1-t) \ln(1+t) (t > 1)$ ，则 $g(1) = 0$ ， $g'(t) = \ln \frac{t}{1+t} + \frac{2}{1+t}$ ，

令 $u = \frac{t}{1+t}$ ，则 $\frac{1}{2} < u < 1$ ，得 $\ln \frac{t}{1+t} + \frac{2}{1+t} = \ln u - 2u + 2$ ，

设 $h(u) = \ln u - 2u + 2 \left(\frac{1}{2} < u < 1\right)$ ，

则 $h'(u) = \frac{1}{u} - 2 < 0$ ，所以函数 $h(u) = \ln u - 2u + 2$ 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上单调递减，

所以 $h(u) = \ln u - 2u + 2 > h(1) = 0$ ，即 $g'(t) > 0$ ，

所以函数 $g(t)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(t) > g(1) = 0$ ，即得 $t \ln t + (1-t) \ln(1+t) > 0$ 成立。

所以 $x_1 + x_2 < 1$ 成立。

..... 12 分

方法二：先证 $x \ln x \geq x - 1$ ，即证 $\ln x + \frac{1}{x} - 1 \geq 0$ 。设 $h(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1 (x > 0)$ ，

则 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ ，令 $h'(x) = 0$ ，得 $x = 1$ 。

列表如下

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	\searrow	极小值	\nearrow

从上表可知，函数 $h(x)$ 的最小值为 0，

所以 $h(x) \geq 0$ ，即 $\ln x + \frac{1}{x} - 1 \geq 0$ ，所以 $x \ln x \geq x - 1$ ，

所以 $x_2 \ln x_2 \geq x_2 - 1$ 10 分

又因为 $0 < x_1 < \frac{1}{e}$ ，所以 $\ln x_1 < -1$ ，所以 $x_1 \ln x_1 < -x_1$.

因为 $x_1 \ln x_1 = x_2 \ln x_2$ ，所以 $-x_1 > x_2 - 1$ ，即 $x_1 + x_2 < 1$.

综上， $\frac{2}{e} < x_1 + x_2 < 1$ 12 分