

2022 届高三第一次联考

数学参考答案

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案	A	B	D	C	C	D	A	B	AC	ABD	BC	ACD

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. A **【解析】**由正弦函数的单调性可知,当 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ 时, $0 < \sin \theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$. 反之,当 $0 < \sin \theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,可能有 $\theta = \frac{5\pi}{6} > \frac{\pi}{3}$, 所以“ $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ ”是“ $0 < \sin \theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ”的充分不必要条件,选 A.
2. B **【解析】**因为 $z = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} - 1 + 2i = i - 1 - 1 + 2i = -2 + 3i$, 则复数 z 在复平面内对应的点 $Z(-2, 3)$ 位于第二象限,选 B.
3. D **【解析】**对于 A, $a \cdot (a-b) = 0 \Leftrightarrow a \perp (a-b)$, 结论不成立,命题为假;对于 B, 当 a 与 b 方向相反时, 结论不成立,命题为假;对于 C, 当 a 与 b 共线时, 结论不成立,命题为假;对于 D, 若 $|a| > |b|$, 则 $|a|^2 > |b|^2$, 即 $a^2 > b^2$, 则 $a^2 - b^2 > 0$, 所以 $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 > 0$, 命题为真. 选 D.
4. C **【解析】**由已知, 函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = 2^x$ 互为反函数, 则 $f(x) = \log_2 x$. 由题设, 当 $x > 0$ 时, $g(x) = \log_2 x - x$, 则 $g(8) = \log_2 8 - 8 = 3 - 8 = -5$. 因为 $g(x)$ 为奇函数, 所以 $g(-8) = -g(8) = 5$, 选 C.
5. C **【解析】**抛物线 C 的准线方程为 $x = -1$, 分别过点 A, B 作 y 轴的垂线, 垂足为 A_1, B_1 , 则 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|AA_1|}{|BB_1|} = \frac{|AF| - 1}{|BF| - 1} = 3$, 所以 $S_1 = 3S_2$, 选 C.
6. D **【解析】**由已知, $\frac{\sqrt{3} \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \lambda \sin 20^\circ = 3$, 则 $\sqrt{3} \sin 20^\circ + \lambda \sin 20^\circ \cos 20^\circ = 3 \cos 20^\circ$, 从而 $\frac{\lambda}{2} \sin 40^\circ = 3 \cos 20^\circ - \sqrt{3} \sin 20^\circ = 2\sqrt{3} \sin(60^\circ - 20^\circ) = 2\sqrt{3} \sin 40^\circ$, 所以 $\lambda = 4\sqrt{3}$, 选 D.
7. A **【解析】**取 AB 的中点 H , 则 $BH \parallel C_1G$, 从而四边形 BC_1GH 为平行四边形, 所以 $BC_1 \parallel HG$. 易知 $EH \parallel GF$, 则四边形 $EGFH$ 为平行四边形, 从而 $GH \subset$ 平面 EFG . 又 $BC_1 \not\subset$ 平面 EFG , 所以 $BC_1 \parallel$ 平面 EFG . 易知 $BF \parallel ED_1$, 则四边形 BFD_1E 为平行四边形, 从而 BD_1 与 EF 相交, 所以直线 BD_1 与平面 EFG 相交, 选 A.
8. B **【解析】**由已知, $ae^{a+1} < b(\ln b - 1) = b \ln \frac{b}{e}$, 则 $e^a \ln e^a < \frac{b}{e} \ln \frac{b}{e}$. 设 $f(x) = x \ln x$, 则 $f(e^a) < f(\frac{b}{e})$. 因为 $a > 0$, 则 $e^a > 1$. 又 $b(\ln b - 1) > 0, b > 0$, 则 $\ln b > 1$, 即 $b > e$, 从而 $\frac{b}{e} > 1$. 当 $x > 1$ 时, $f'(x) = \ln x + 1 > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调递增, 所以 $e^a < \frac{b}{e}$, 即 $b > e^{a+1}$, 选 B.

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. AC **【解析】**由图知, $f(x)$ 的最小正周期为 $T = 4 \times (\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}) = \pi$, 结论 A 正确; 因为 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2, A = 2$, 则 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$. 因为 $x = \frac{\pi}{3}$ 为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的最小零点, 则 $2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \pi$, 得 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x) =$

$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$, 从而 $f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$ 不是偶函数, 结论 B 错误; 因为

$f(0)=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}=1$, 则 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 内的最小值为 1, 结论 C

正确; 因为 $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(-\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin(-\pi)=0$, 则 $x=-\frac{2\pi}{3}$ 为 $f(x)$ 的零点, 结论 D 错误, 选 AC.

10. ABD 【解析】去掉 9 个原始评分中的一个最高分和一个最低分, 不会改变该组数据的中位数, A 正确; 因为学生网络评分在区间 $[8, 9)$ 内的频率为 0.3, 学生总人数为 4000, 则网络评分在区间 $[8, 9)$ 内的学生估计有 $4000 \times 0.3 = 1200$ 人, B 正确; 若去掉的一个最高分为 9.6, 去掉的一个最低分为 8.9, 则 9 名教师原始评分的极差等于 0.7, C 错误; 学生网络评分在区间 $[9, 10]$ 内的频率为 0.5, 则 $X \sim B(10, 0.5)$, 所以 $E(X) = 10 \times 0.5 = 5$, D 正确; 选 ABD.

11. BC 【解析】当 $a=3, b=2$ 时, 双曲线的渐近线的斜率 $k = \pm \frac{b}{a} = \pm \frac{2}{3}$, A 错误; 因为点 $P(2, 4\sqrt{2})$ 在 C 上,

则 $\frac{4}{a^2} - \frac{32}{b^2} = 1$, 得 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{4} + 8 > 8$, 所以 $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 3$, B 正确; 因为 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$, 若 $PF_1 \perp PF_2$, 则

$|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2 = 4c^2$, 即 $(|PF_1| - |PF_2|)^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 4c^2$, 即 $4a^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 4c^2$, 得 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 2(c^2 - a^2) = 2b^2$, 所以 $S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2}|PF_1| \cdot |PF_2| = b^2$, C 正确; 若 C 为等轴双曲线, 则 $a=b$, 从而 $|F_1F_2| = 2c = 2\sqrt{2}a$. 若 $|PF_1| = 2|PF_2|$, 则 $|PF_2| = 2a, |PF_1| = 4a$. 在 $\triangle F_1PF_2$ 中, 由余

弦定理, 得 $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} = \frac{16a^2 + 4a^2 - 8a^2}{2 \times 4a \times 2a} = \frac{3}{4}$, D 错误, 选 BC.

12. ACD 【解析】如图, 因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 都是以 AC 为斜边的直角三角形, 则 AC 为

四面体 ABCD 外接球的直径. 因为 $AB=2, BC=2\sqrt{3}$, 则 $2R=AC=4$, 所以四面体

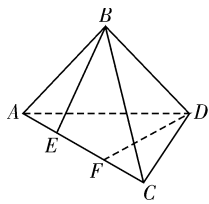
ABCD 外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=16\pi$, A 正确; 分别作 $BE \perp AC, DF \perp AC$, 垂足为 E, F, 则 $\theta = \langle \vec{EB}, \vec{FD} \rangle$. 由已知可得, $EB=FD=\sqrt{3}, AE=CF=1, EF=2$. 因为 $\vec{BD} = \vec{BE} + \vec{EF} + \vec{FD}$, 则 $|\vec{BD}|^2 = \vec{BD}^2 = (\vec{BE} + \vec{EF} + \vec{FD})^2 = \vec{BE}^2 + \vec{EF}^2 + \vec{FD}^2 + 2\vec{BE} \cdot \vec{FD}$

$= 3 + 4 + 3 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cos(\pi - \theta) = 8$, 所以 $|\vec{BD}| = 2\sqrt{2}$, B 错误; 因为 $CD^2 + BD^2 = 12 = BC^2$, 则 $CD \perp BD$. 同

理, $AB \perp BD$. 又 $CD \perp AD$, 则 $CD \perp$ 平面 ABD, 所以 $V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABD} \times CD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} \times 2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, C 正

确; 由已知可得, $\angle CAD = 30^\circ, \angle CAB = 60^\circ$, 则 $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \vec{AC} \cdot (\vec{AD} - \vec{AB}) = \vec{AC} \cdot \vec{AD} - \vec{AC} \cdot \vec{AB} = 4 \times 2\sqrt{3} \cos 30^\circ - 4 \times 2 \cos 60^\circ = 8$, 则 $\cos \langle \vec{AC}, \vec{BD} \rangle = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{BD}}{|\vec{AC}| |\vec{BD}|} = \frac{8}{4 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 得 $\langle \vec{AC}, \vec{BD} \rangle = 45^\circ$, 所以异面直

线 AC 与 BD 所成的角为 45° , D 正确, 选 ACD.



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. -2 【解析】因为 $f'(x) = e^{x-1} + 3x^2$, 则 $f'(1) = 4$. 又 $f(1) = 2$, 则切线方程为 $y - 2 = 4(x - 1)$, 即 $y = 4x - 2$, 所以该切线在 y 轴上的截距为 -2.

14. 729 【解析】因为 $T_3 = C_n^2(\sqrt{x})^{n-2}\left(-\frac{2}{x}\right)^2 = 4C_n^2x^{\frac{n-6}{2}}$, 由已知 $\frac{n-6}{2} = 0$, 则 $n = 6$. 因为 $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中各项系数的绝对值之和与 $\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中各项系数之和相等, 取 $x = 1$, 得 $\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中各项系数之和为 $3^6 = 729$.

15. $m-1$ 【解析】由 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, 得 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, 即 $a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). 所以 $S_{2021} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2021} = (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + (a_5 - a_4) + \cdots + (a_{2023} - a_{2022}) = a_{2023} - a_2 = m - 1$.

16. $\frac{16}{17}$ 或 $\frac{36}{5}$ 或 $\frac{196}{53}$ (三个结果只要求填写两个, 不考虑数据排序, 填对 1 个得 3 分, 填对 2 个得 5 分)

【解析】不妨设正方形的四条边所在的直线分别为 l_1, l_2, l_3, l_4 , 它们分别经过点 A, B, C, D , 直线 l_1 的倾斜角为 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$), 正方形的边长为 a .

①若 $l_1 \parallel l_2$, 则 $l_3 \parallel l_4$, 且 $l_3 \perp l_1$, 从而 l_3 的倾斜角为 $\theta + \frac{\pi}{2}$.

因为 $|AB| = 1$, 则 l_1 与 l_2 之间的距离为 $\sin \theta$, 所以 $a = \sin \theta$.

因为 $|CD| = 4$, 则 l_3 与 l_4 之间的距离为 $4 \sin \left[\pi - \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right] = 4 \cos \theta$,

所以 $a = 4 \cos \theta$.

令 $\sin \theta = 4 \cos \theta$, 则 $\sin^2 \theta = 16 \cos^2 \theta = 16(1 - \sin^2 \theta)$, 得 $\sin^2 \theta = \frac{16}{17}$, 则正方形面积 $S = \sin^2 \theta = \frac{16}{17}$.

②若 $l_1 \parallel l_3$, 则 $l_2 \parallel l_4$, 且 $l_2 \perp l_1$, 从而 l_2 的倾斜角为 $\theta + \frac{\pi}{2}$.

因为 $|AC| = 3$, 则 l_1 与 l_3 之间的距离为 $3 \sin \theta$, 所以 $a = 3 \sin \theta$.

因为 $|BD| = 6$, 则 l_2 与 l_4 之间的距离为 $6 \sin \left[\pi - \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right] = 6 \cos \theta$,

所以 $a = 6 \cos \theta$. 令 $3 \sin \theta = 6 \cos \theta$, 则 $\sin^2 \theta = 4 \cos^2 \theta = 4(1 - \sin^2 \theta)$, 得 $\sin^2 \theta = \frac{4}{5}$,

则正方形面积 $S = 9 \sin^2 \theta = \frac{36}{5}$.

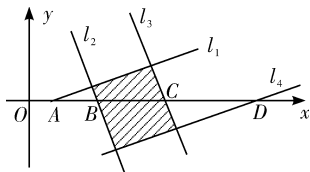
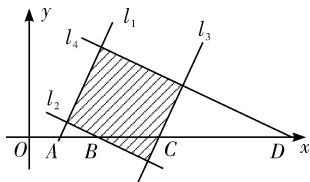
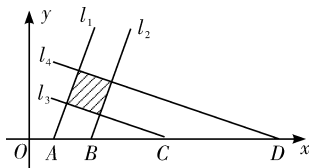
③若 $l_1 \parallel l_4$, 则 $l_2 \parallel l_3$, 且 $l_2 \perp l_1$, 从而 l_2 的倾斜角为 $\theta + \frac{\pi}{2}$.

因为 $|AD| = 7$, 则 l_1 与 l_4 之间的距离为 $7 \sin \theta$, 所以 $a = 7 \sin \theta$.

因为 $|BC| = 2$, 则 l_2 与 l_3 之间的距离为 $2 \sin \left[\pi - \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right] = 2 \cos \theta$,

所以 $a = 2 \cos \theta$.

令 $7 \sin \theta = 2 \cos \theta$, 则 $49 \sin^2 \theta = 4 \cos^2 \theta = 4(1 - \sin^2 \theta)$, 得 $\sin^2 \theta = \frac{4}{53}$, 则正方形面积 $S = 49 \sin^2 \theta = \frac{196}{53}$.



四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 【解析】(1) 由已知, $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} (2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$ (2 分)

则 $g(x) = f(-x) = \sin \left(-x - \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$,

所以当 $g(x)$ 单调递减时, 函数 $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$ 单调递增. (3 分)

令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 得 $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

所以函数 $g(x)$ 的单调递减区间是 $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right], k \in \mathbb{Z}$ (5 分)

(2) 因为 $f(A) = \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $A \in (0, \pi)$, 则 $A = \frac{\pi}{3}$ (6 分)

又 $a = \sqrt{3}$, 由余弦定理, 得 $3 = b^2 + c^2 - bc$, 即 $b^2 + c^2 = bc + 3$ (7 分)

因为 D 为 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + bc) = \frac{1}{4}(2bc + 3)$ (8 分)

因为 $b^2 + c^2 \geq 2bc$, 则 $bc + 3 \geq 2bc$, 即 $0 < bc \leq 3$, 所以 $\frac{3}{4} < |\overrightarrow{AD}|^2 \leq \frac{9}{4}$, 即 $\frac{\sqrt{3}}{2} < |\overrightarrow{AD}| \leq \frac{3}{2}$.

所以线段 AD 的长的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right]$ (10 分)

18. 【解析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 因为 $a_1 = 3$, 则 $S_3 = 3a_1 + 3d = 9 + 3d$ (2 分)

因为 $S_3 = 5a_1 = 15$, 则 $9 + 3d = 15$, 得 $d = 2$ (3 分)

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$ (4 分)

(2) 因为 $S_n = 3n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 + 2n$, 则 $b_n = 1 + \frac{2}{S_n} = 1 + \frac{2}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$ (6 分)

所以 $T_n = n + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$
 $= n + 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ (8 分)

当 $n \leq 2$ 时, 因为 $-\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} < 0$, 则 $[T_n] = n$ (9 分)

当 $n \geq 3$ 时, 因为 $0 < \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} < \frac{1}{2}$, 则 $[T_n] = n + 1$ (10 分)

因为 $[T_1] + [T_2] + \cdots + [T_n] = 63$, 则 $1 + 2 + 4 + 5 + \cdots + (n+1) = 63$, 即 $3 + \frac{(n-2)(4+n+1)}{2} = 63$,

即 $n^2 + 3n - 130 = 0$, 即 $(n-10)(n+13) = 0$. 因为 $n \in \mathbb{N}^*$, 所以 $n = 10$ (12 分)

19. 【解析】(1) 解法一: 取 AB 的中点 F , 连接 PF, DF .

因为 $PB = AB$, $\angle PBA = 60^\circ$, 则 $\triangle PAB$ 为正三角形, 所以 $PF \perp AB$.

因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 则 $PF \perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $AE \subset$ 平面 $ABCD$, 则 $PF \perp AE$. ① (2 分)

因为四边形 $ABCD$ 为正方形, E 为 BC 的中点, 则

$\text{Rt} \triangle DAF \cong \text{Rt} \triangle ABE$, 所以 $\angle ADF = \angle BAE$,

从而 $\angle ADF + \angle EAD = \angle BAE + \angle EAD = \angle BAD = 90^\circ$,

所以 $DF \perp AE$. ② (4 分)

结合①②知, $AE \perp$ 平面 PDF , 所以 $AE \perp PD$ (5 分)

解法二: 因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp AB$, 则

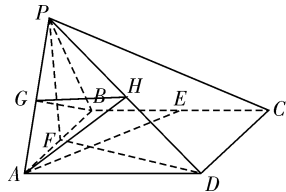
$AD \perp$ 平面 PAB , 所以 $AD \perp AP$, 从而 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ (2 分)

因为 $PB = AB$, $\angle PBA = 60^\circ$, 则 $\triangle PAB$ 为正三角形.

设 $AB = 2$, 则 $AD = AP = 2$ (3 分)

所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{PD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AP}) = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AP}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 2 - 4\cos 60^\circ = 0$,

则 $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{PD}$, 所以 $AE \perp PD$ (5 分)



(2)解法一:分别取 PA, PD 的中点 G, H , 则 $GH \underline{\underline{}} \frac{1}{2}AD$.

又 $BE \underline{\underline{}} \frac{1}{2}AD$, 则 $GH \underline{\underline{}} BE$, 所以四边形 $BGHE$ 为平行四边形, 从而 $EH \parallel BG$ (6 分)

因为 $PB=AB$, 则 $BG \perp PA$. 因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD, AD \perp AB$, 则 $AD \perp$ 平面 PAB ,
从而 $AD \perp BG$, 所以 $BG \perp$ 平面 PAD , 从而 $EH \perp$ 平面 PAD .

连接 AH , 则 $\angle EAH$ 为直线 AE 与平面 PAD 所成的角. (8 分)

设正方形 $ABCD$ 的边长为 1, $PA=x(0 < x < 2)$, 则 $BE=GH=\frac{1}{2}, AG=\frac{x}{2}$.

从而 $AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}, AH=\sqrt{AG^2+GH^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}$ (10 分)

在 $Rt\triangle AHE$ 中, $\cos \angle EAH = \frac{AH}{AE} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{5}}$.

因为当 $0 < x < 2$ 时, $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{5}}$ 单调递增, 则 $\cos \angle EAH \in \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 1\right)$,

所以直线 AE 与平面 PAD 所成角的余弦值的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 1\right)$ (12 分)

解法二:以直线 AD 为 x 轴, AB 为 y 轴, 过点 A 且垂直于平面 $ABCD$ 的直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系. (6 分)

设正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 则 $\vec{AD}=(1,0,0), \vec{AE}=\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ (7 分)

在平面 PAB 内过点 P 作 AB 的垂线, 垂足为 M .

因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 则 $PM \perp$ 平面 $ABCD$.

设 $AM=a(0 < a < 2)$, 则 $BM=|1-a|$.

因为 $PB=1$, 则 $PM=\sqrt{PB^2-BM^2}=\sqrt{1-(1-a)^2}=\sqrt{2a-a^2}$, 所以 $\vec{AP}=(0, a, \sqrt{2a-a^2})$ (8 分)

设 $m=(x, y, z)$ 为平面 PAD 的一个法向量, 则 $\begin{cases} m \cdot \vec{AD}=0, \\ m \cdot \vec{AP}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=0, \\ ay + \sqrt{2a-a^2}z=0. \end{cases}$

取 $z=-a$, 则 $y=\sqrt{2a-a^2}$, 所以 $m=(0, \sqrt{2a-a^2}, -a)$ (9 分)

于是 $m \cdot \vec{AE} = \sqrt{2a-a^2}, |m| = \sqrt{2a}$.

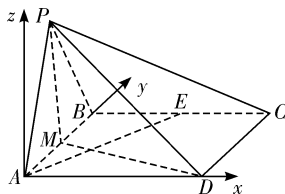
又 $|\vec{AE}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$, 则 $\cos \langle m, \vec{AE} \rangle = \frac{m \cdot \vec{AE}}{|m| \cdot |\vec{AE}|} = \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{a}{2}}$ (10 分)

设直线 AE 与平面 PAD 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{a}{2}}$.

从而 $\cos \theta = \sqrt{1-\sin^2 \theta} = \sqrt{\frac{2a+1}{5}}$ (11 分)

因为函数 $f(a) = \sqrt{\frac{2a+1}{5}}$ 单调递增, 则当 $0 < a < 2$ 时, 则 $\cos \theta \in \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 1\right)$,

所以直线 AE 与平面 PAD 所成角的余弦值的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 1\right)$ (12 分)



20.【解析】(1)由已知, $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 则 $a = 2c$ (1分)

设点 F_1, F_2 关于直线 l 的对称点分别为 M, N , 因为点 O, C 关于直线 l 对称, O 为线段 F_1F_2 的中点, 则 C 为线段 MN 的中点, 从而线段 MN 为圆 C 的一条直径, 所以 $|F_1F_2| = |MN| = 2$, 即 $2c = 2$, 即 $c = 1$.
..... (3分)

于是 $a = 2, b^2 = a^2 - c^2 = 3$, 所以椭圆 E 的方程是 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (4分)

(2)因为原点 O 为线段 F_1F_2 的中点, 圆心 C 为线段 MN 的中点, 直线 l 为线段 OC 的垂直平分线, 所以点 O 与 C 也关于直线 l 对称,

因为点 $C(2m, 4m)$, 则线段 OC 的中点为 $(m, 2m)$, 直线 OC 的斜率为 2 , 又直线 l 为线段 OC 的垂直平分线,

所以直线 l 的方程为 $y - 2m = -\frac{1}{2}(x - m)$, 即 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5m}{2}$ (6分)

将 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5m}{2}$ 代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 得 $3x^2 + 4\left(-\frac{x}{2} + \frac{5m}{2}\right)^2 = 12$, 即 $4x^2 - 10mx + 25m^2 - 12 = 0$.

设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{5m}{2}, x_1x_2 = \frac{25m^2 - 12}{4}$ (7分)

所以 $k_{AC} + k_{BC} = \frac{y_1 - 4m}{x_1 - 2m} + \frac{y_2 - 4m}{x_2 - 2m} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + 3m}{x_1 - 2m} + \frac{x_2 + 3m}{x_2 - 2m}\right)$
 $= -\frac{(x_1 + 3m)(x_2 - 2m) + (x_2 + 3m)(x_1 - 2m)}{2(x_1 - 2m)(x_2 - 2m)}$
 $= -\frac{2x_1x_2 + m(x_1 + x_2) - 12m^2}{2x_1x_2 - 4m(x_1 + x_2) + 8m^2}$ (8分)

由已知, $k_{AC} + k_{BC} = \frac{2}{3}$, 则 $\frac{2x_1x_2 + m(x_1 + x_2) - 12m^2}{2x_1x_2 - 4m(x_1 + x_2) + 8m^2} + \frac{2}{3} = 0$, 得 $2x_1x_2 - m(x_1 + x_2) - 4m^2 = 0$.

所以 $\frac{25m^2 - 12}{2} - \frac{5m^2}{2} - 4m^2 = 0$, 即 $m^2 = 1$, 即 $m = \pm 1$ (10分)

因为直线 l 与椭圆 E 相交, 则 $\Delta = 100m^2 - 16(25m^2 - 12) > 0$, 解得 $m^2 < \frac{16}{25}$, 即 $|m| < \frac{4}{5}$.

因为 $\frac{4}{5} < 1$, 所以不存在实数 m , 使直线 AC 与 BC 的斜率之和为 $\frac{2}{3}$ (12分)

21.【解析】(1)设甲同学正确配对 3 对为事件 A , 正确配对 5 对为事件 B , 甲同学能晋级为事件 C ,

则 $C = A + B$, 且 A, B 互斥. (1分)

因为甲同学只有一组能正确配对, 其余四组都随机配对, 则 $P(A) = \frac{C_4^2}{A_4^4} = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{A_4^4} = \frac{1}{24}$ (3分)

从而 $P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = \frac{7}{24}$, 所以甲同学能晋级的概率为 $\frac{7}{24}$ (4分)

(2)设选择方式一、二的班级团队挑战成功的概率分别为 P_1, P_2 .

当选择方式一时, 因为两人都回答错误的概率为 $(1-p)^2$, 则两人中至少有一人回答正确的概率为 $1 - (1-p)^2$, 所以 $P_1 = [1 - (1-p)^2]^n = p^n(2-p)^n$ (6分)

当选择方式二时, 因为一个小组闯关成功的概率为 p^n , 则一个小组闯关不成功的概率为 $1 - p^n$,

所以 $P_2 = 1 - (1 - p^n)^2 = p^n(2 - p^n)$ (7分)

所以 $P_1 - P_2 = p^n(2 - p)^n - p^n(2 - p^n) = p^n[(2 - p)^n + p^n - 2]$ (8分)

设 $f(n)=(2-p)^n+p^n-2$, 则 $f(n+1)-f(n)=(2-p)^{n+1}+p^{n+1}-(2-p)^n-p^n$
 $= (2-p)^n(1-p)+p^n(p-1)=(1-p)[(2-p)^n-p^n]$ (10 分)
 因为 $0 < p < 1$, 则 $1-p > 0, 2-p > 1$, 从而 $(2-p)^n > 1, p^n < 1$, 所以 $f(n+1)-f(n) > 0$,
 即 $f(n+1) > f(n)$, 所以 $f(n)$ 单调递增. (11 分)
 因为 $f(2)=(2-p)^2+p^2-2=2p^2-4p+2=2(p-1)^2 > 0$, 则当 $n \geq 15$ 时, $f(n) > 0$, 从而 $P_1-P_2 > 0$,
 即 $P_1 > P_2$. 所以为使本班挑战成功的可能性更大, 应选择方式一参赛. (12 分)

22. 【解析】(1) $f'(x) = \frac{a}{x} - \cos x + 1 (x > 0)$ (1 分)

若 $a > 0$, 因为 $x > 0, 1 - \cos x \geq 0$, 则 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 符合要求. (2 分)

若 $a < 0$, 则当 $x \in (0, -\frac{a}{2})$ 时, $\frac{a}{x} < -2$, 从而 $f'(x) < -2 - \cos x + 1 = -(1 + \cos x) \leq 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, -\frac{a}{2})$ 上单调递减, 不合要求.

综上分析, a 的取值范围是 $(0, +\infty)$ (4 分)

(2) 令 $f'(x) = 0$, 则 $\frac{a}{x} - \cos x + 1 = 0$, 即 $a = x \cos x - x$.

设 $g(x) = x \cos x - x$, 则 $g'(x) = \cos x - x \sin x - 1$ (5 分)

① 当 $x \in (0, \pi)$ 时, $\cos x < 1, \sin x > 0$, 则 $\cos x - 1 < 0, -x \sin x < 0$, 从而 $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 单调递减.
 (6 分)

② 当 $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ 时, $g''(x) = -\sin x - (\sin x + x \cos x) = -(2 \sin x + x \cos x)$.

因为 $\sin x < 0, \cos x < 0$, 则 $g''(x) > 0$, 从而 $g'(x)$ 单调递增. 因为 $g'(\pi) = -2 < 0, g'(\frac{3\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} - 1 > 0$,

则 $g'(x)$ 在 $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ 上有唯一零点, 记为 x_0 , 且当 $x \in (\pi, x_0)$ 时, $g'(x) < 0$, 则 $g(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, \frac{3\pi}{2})$ 时, $g'(x) > 0$, 则 $g(x)$ 单调递增. (8 分)

③ 当 $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ 时, $g'''(x) = -(2 \cos x + \cos x - x \sin x) = x \sin x - 3 \cos x$.

因为 $\sin x < 0, \cos x > 0$, 则 $g'''(x) < 0$, 从而 $g''(x)$ 单调递减.

因为 $g''(\frac{3\pi}{2}) = 2 > 0, g''(2\pi) = -2\pi < 0$, 则 $g''(x)$ 在 $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ 内有唯一零点, 记为 x_1 , 且当 $x \in (\frac{3\pi}{2}, x_1)$ 时,
 $g''(x) > 0, g'(x)$ 单调递增; 当 $x \in (x_1, 2\pi)$ 时, $g''(x) < 0, g'(x)$ 单调递减.

因为 $g'(\frac{3\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} - 1 > 0, g'(2\pi) = 0$, 则当 $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 单调递增. (10 分)

综上分析, $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, 2\pi)$ 上单调递增.

因为 $g(0) = g(2\pi) = 0$, 则当 $g(x_0) < a < 0$ 时, 直线 $y = a$ 与函数 $g(x)$ 的图象在 $(0, 2\pi)$ 上有两个交点,
 从而 $f'(x)$ 有两个变号零点, 即 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上恰有两个极值点.

因为 $g'(x_0) = 0$, 则 $\cos x_0 - x_0 \sin x_0 - 1 = 0$, 即 $\cos x_0 = 1 + x_0 \sin x_0$.

从而 $g(x_0) = x_0 \cos x_0 - x_0 = x_0(1 + x_0 \sin x_0) - x_0 = x_0^2 \sin x_0$. 取 $\theta = x_0$, 则 $\cos \theta = 1 + \theta \sin \theta$,

且当 $\theta^2 \sin \theta < a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上恰有两个极值点. (12 分)