湖北省部分重点中学2022届高三第一次联考

数学试题参考答案与评分细则

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	B	B	C	C	D	A

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

题号	9	10	11	12
答案	AD	CD	ABC	ACD

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 答案:$x-y+1-\frac{\pi}{2}=0$.

14. 答案:$\lambda=4$

15. 答案:4042

16. 答案:2;$\frac{\sqrt{6}}{9}$

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。

17. 解:(1)当 $n=1$ 时,$a_1=4$; …………(1分)

由已知得:$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n-1}=4(n-1)(n\geqslant 2)$

于是$\frac{a_n}{n}=4n-4(n-1)=4$,即 $a_n=4n$,$(n\geqslant 2)$ …………(4分)

又 $a_1=4$ 也满足上式,所以 $a_n=4n$,$(n\in\mathbf{N}^*)$ …………(5分)

(2)由(1)知 $b_n=\frac{(-1)^n\cdot 4n}{4n^2-1}$

而 $b_n=\frac{4n}{4n^2-1}\cdot(-1)^n=(-1)^n\frac{(2n+1)+(2n-1)}{(2n+1)(2n-1)}=(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)$ …………(7分)

当 n 为奇数时:

$S_n=-\left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\cdots-\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{2n+2}{2n+1}$ ························ (8 分)

当 n 为偶数时：

$S_n=-\left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)=-1+\frac{1}{2n+1}=\frac{-2n}{2n+1}$ ········ (9 分)

综上：$S_n=\begin{cases}-\frac{2n+2}{2n+1}, n \text{ 为奇数} \\ \frac{-2n}{2n+1}, n \text{ 为偶数}\end{cases}$ ·· (10 分)

18. 解：(1)由题意知：

$900\times30-2000=25000$，$1200\times30-2000=34000$，

$900\times40-2000=34000$，$1200\times40-2000=46000$，

$\therefore X$ 的所有可能取值为：25000，34000，46000，·· (1 分)

设 A 表示事件"作物亩产量为 900kg"，则 $P(A)=0.5$，

B 表示事件"作物市场价格为 30 元/kg"，则 $P(B)=0.4$，

则 $P(X=25000)=P(AB)=0.5\times0.4=0.2$，

$P(X=34000)=P(\bar{A}B)+P(A\bar{B})=(1-0.5)\times0.4+0.5\times(1-0.4)=0.5$，

$P(X=46000)=P(\bar{A}\bar{B})=(1-0.4)(1-0.5)=0.5$， ·· (5 分)

$\therefore X$ 的分布列为：

X	25000	34000	46000
P	0.2	0.5	0.3

··· (6 分)

(2)设 C 表示事件"种植该农作物一亩一年的纯收入不少于 30000 元"，

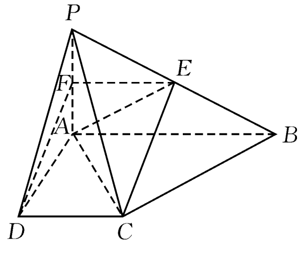
则 $P(C)=P(X\geqslant30000)=P(X=34000)+P(X=46000)=0.5+0.3=0.8$，····················· (8 分)

设这三年中有 Y 年有纯收入不少于 30000 元，则有 $Y\sim B(3,0.8)$，

$\therefore$这三年中该农户种植该农作物一亩至多一年纯收入不少于 3000 元的概率为：

$P(Y\leqslant1)=C_3^0 0.2^3+C_3^1 0.8\times0.2^2=0.104$. ··· (12 分)

19. 解：(1)证明：取 PA 的中点 F，连 EF，DF，



$\because E$ 为 PB 的中点　$\therefore EF /\!/ \frac{1}{2}AB$，又 $CD /\!/ AB$，且 $CD=\frac{1}{2}AB$，

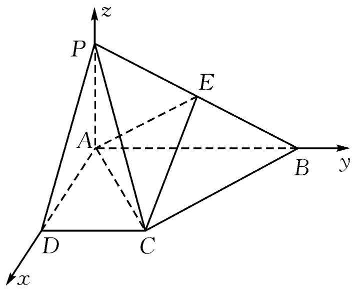
$\therefore EF /\!/ CD$，所以四边形 $CDFE$ 为平行四边形，

$\therefore CE /\!/ DF$

又 $CE\not\subset$平面 PAD，$DF\subset$平面 PAD，

故直线 $CE /\!/$平面 PAD ··· (4 分)

(2)以 A 为坐标原点，以 AD,AB,AP 所在射线，分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系 $A—xyz$，如图所示，



则 $A(0,0,0)$，$P(0,0,1)$，$B(0,2,0)$，$C(1,1,0)$.

设 $E(x,y,z)$，则$\overrightarrow{PE}=(x,y,z-1)$，$\overrightarrow{PB}=(0,2,-1)$.

∵E 在棱 PB 上，∴可设$\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PB}(0<\lambda<1)$.

故$(x,y,z-1)=\lambda(0,2,-1)$，解得$\begin{cases}x=0\\y=2\lambda\\z=1-\lambda\end{cases}$，即 $E(0,2\lambda,1-\lambda)$，

易知平面 ACB 的法向量为$\vec{u}=(0,0,1)$，

设平面 ACB 的法向量$\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{AE}=(0,2\lambda,1-\lambda)$，$\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$

∴$\begin{cases}\vec{v}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\\vec{v}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}(x_2,y_2,z_2)\cdot(0,2\lambda,1-\lambda)=0\\(x_2,y_2,z_2)\cdot(1,1,0)=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2\lambda y_2+(1-\lambda)z_2=0\\x_2+y_2=0\end{cases}$.

取 $x_2=1$，则 $y_2=-1$，$z_2=\frac{2\lambda}{1-\lambda}\left(\frac{2\lambda}{1-\lambda}>0\right)$，故$\vec{v}=\left(1,-1,\frac{2\lambda}{1-\lambda}\right)$.

因为二面角 $E—AC—B$ 的平面角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以$|\cos\langle\vec{u},\vec{v}\rangle|=\frac{\sqrt{6}}{3}$，即：$\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，即：$\left(\frac{2\lambda}{1-\lambda}\right)^2=\frac{2}{3}\left[1+1+\left(\frac{2\lambda}{1-\lambda}\right)^2\right]$

$\frac{1}{3}\left(\frac{2\lambda}{1-\lambda}\right)^2=\frac{4}{3}\Rightarrow\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^2=1\Rightarrow\lambda^2=1-2\lambda+\lambda^2$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$. …………………………………… (9 分)

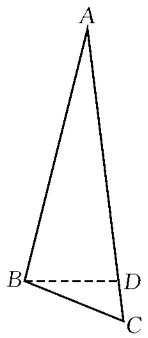
∴$E\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{AE}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$

因为 z 轴⊥平面 $ABCD$，所以平面 $ABCD$ 的一个法向量为$\vec{m}=(0,0,1)$.

设 AE 与平面 $ABCD$ 所成角为 α，则 $\sin\alpha=\frac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}|}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{AE}|}=\frac{\frac{1}{2}}{1\times\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故 AE 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$. …………………………………………………… (12 分)

20. 解：(1)由 $\cos A=\frac{31}{32}$，得 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-(\frac{31}{32})^2}=\frac{3\sqrt{7}}{32}$ ………………… (2 分)



由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{1}{2}\times8\times AC\times\frac{3\sqrt{7}}{32}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$得：$AC=10$ ………… (4 分)

于是 $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A=8^2+10^2-2\times8\times10\times\frac{31}{32}=9$

所以 $BC=3$； ………………………………………………………………… (6 分)

(2)在 AC 上取点 D,使得 $\angle DBC=\angle C$,于是 $\cos\angle ABD=\frac{1}{8}$

则 $\sin\angle ABD=\sqrt{1-\cos^2\angle ABD}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$ ………………………………………………………… (7 分)

$\sin\angle ADB=\sin(\angle A+\angle ABD)=\sin A\cdot\cos\angle ABD+\cos A\cdot\sin\angle ABD$

$=\frac{3\sqrt{7}}{32}\times\frac{1}{8}+\frac{31}{32}\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$ …………………………………………………………………… (8 分)

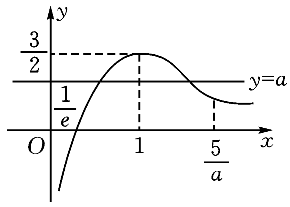
由 $\sin\angle ABD=\sin\angle ADB$,结合正弦定理知 $AD=AB=8$ ………………………………………………… (9 分)

于是 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos A=8^2+8^2-2\times8\times8\times\frac{31}{32}=4$,所以 $BD=2$ ……… (10 分)

由 $\angle DBC=\angle C$ 知 $CD=BD=2$,所以 $AC=AD+CD=8+2=10$ ……………………………… (11 分)

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{1}{2}\times8\times10\times\frac{3\sqrt{7}}{32}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$ …………………………………… (12 分)

21.解:(1)$f'(x)=2ax-(2a+4)x+\frac{4}{x}$



$=\frac{2ax^2-(2a+4)x+4}{x}=\frac{2(x-1)(ax-2)}{x}$ ………………………… (2 分)

①若 $a\leqslant0$ 时,

当 $x\in(0,1)$,$f'(x)>0$,$f(x)$递增;$x\in(1,+\infty)$,$f'(x)<0$,$f(x)$递减;……………………… (3 分)

②若 $0<a<2$ 时,则$\frac{2}{a}>1$,

当 $x\in(0,1)$,$f'(x)>0$,$f(x)$递增;当 $x\in(1,\frac{2}{a})$,$f'(x)<0$,$f(x)$递减;

当 $x\in(\frac{2}{a},+\infty)$,$f'(x)>0$,$f(x)$递增 ……………………………………………………………… (4 分)

③若 $a=2$ 时,则$\frac{2}{a}=1$,$x\in(0,+\infty)$时 $f'(x)\geqslant0$,$f(x)$递增;……………………………………… (5 分)

④若 $a>2$ 时,$0<\frac{2}{a}<1$,

当 $x\in(0,\frac{2}{a})$,$f'(x)>0$,$f(x)$递增;当 $x\in(\frac{2}{a},1)$,$f'(x)<0$,$f(x)$递减;

当 $x\in(1,+\infty)$,$f'(x)>0$,$f(x)$递增; …………………………………………………………………… (6 分)

(2)由 $f(x)=g(x)$得 $ax^2-(2a+4)x+4\ln x=-(3a+1)x+\frac{11}{2}\ln x$,

即 $ax^2+(a-3)x-\frac{3}{2}\ln x=0$,即 $a(x^2+x)=3x+\frac{3}{2}\ln x$,所以 $a=\frac{3x+\frac{3}{2}\ln x}{x^2+x}$,……………… (8 分)

令 $h(x)=\frac{3x+\frac{3}{2}\ln x}{x^2+x}$,问题等价为直线 $y=a$ 与函数$h(x)$的图像有两个交点

$h'(x)=\dfrac{-3(x+\frac{1}{2})(\ln x+x-1)}{(x^2+x)^2}$，

令 $m(x)=\ln x+x-1$，显然 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，$m(1)=0$，

即 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 递增；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 递减，

故 $h(x)_{极大}=h(1)=\dfrac{3}{2}$

当 $x>1$ 时，$h(x)=\dfrac{3x+\frac{3}{2}\ln x}{x^2+x}>\dfrac{3x}{x^2+x}>0$，

当 $0<x<1$ 时，取 $x=\dfrac{1}{e}$，$h(\dfrac{1}{e})=\dfrac{3\cdot\frac{1}{e}+\frac{3}{2}\ln\frac{1}{e}}{(\frac{1}{e})^2+\frac{1}{e}}=\dfrac{\frac{3}{e}-\frac{3}{2}}{\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e}}<0$

故符合题意的必要条件是：$0<a<\dfrac{3}{2}$ ……………………………………………………………（10 分）

又当 $0<a<\dfrac{3}{2}$，由 $\dfrac{5}{a}>1$，而 $h\left(\dfrac{5}{a}\right)=\dfrac{3\cdot\frac{5}{a}+\frac{3}{2}\ln\frac{5}{a}}{\left(\frac{5}{a}\right)^2+\frac{5}{a}}<\dfrac{3\cdot\frac{5}{a}+\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{a}}{\left(\frac{5}{a}\right)^2+\frac{5}{a}}=\dfrac{\frac{9}{2}}{\frac{5}{a}+1}<\dfrac{9}{10}a<a$

这说明，在两个交点的横坐标位于区间 $\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ 和 $\left(1,\dfrac{5}{a}\right)$ 内，所以 $0<a<\dfrac{3}{2}$ 是充分的.

故符合题意的必要条件是：$0<a<\dfrac{3}{2}$. ……………………………………………………………（12 分）

22. 解：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_C,y_C)$.

（1）由题意知，点 F 坐标为 $(0,1)$，直线 AB 方程为 $y=x+1$，

联立 $\begin{cases}x=y-1\\x^2=4y\end{cases}$，得 $y^2-6y+1=0$，$\therefore y_1+y_2=6$，$\therefore |AB|=y_1+y_2+2=8$ ……………………（4 分）

（2）解：设 $A\left(x_1,\dfrac{x_1^2}{4}\right)$，$B\left(x_2,\dfrac{x_2^2}{4}\right)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，其中 $x_2>x_1$，显然 $x_1<0<x_2$，由 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}$

知 $AB\parallel CD$，且 $\dfrac{AB}{CD}=\lambda$，于是 $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{PA}{PC}$，即 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PC}$，$\therefore \dfrac{x_1^2}{4}=\lambda\dfrac{x_3^2}{4}$，$\therefore x_3=\pm\dfrac{x_1}{\sqrt{\lambda}}$，同理 $x_4=\pm\dfrac{x_2}{\sqrt{\lambda}}$，显然

$x_4=\dfrac{x_2}{\sqrt{\lambda}}$，则 $D\left(\dfrac{x_2}{\sqrt{\lambda}},\dfrac{x_2^2}{4\lambda}\right)$；

设 l_{AB}：$y=kx+1$，代入 $x^2=4y$ 得 $x^2-4kx-4=0$，则 $\begin{cases}x_1+x_2=4k\\x_1\cdot x_2=-4\end{cases}$. ……………………（6 分）

①若 $x_3=\dfrac{x_1}{\sqrt{\lambda}}$，则 $C\left(\dfrac{x_1}{\sqrt{\lambda}},\dfrac{x_1^2}{4\lambda}\right)$，此时 $k_{CD}=\dfrac{\frac{1}{4\lambda}(x_2^2-x_1^2)}{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(x_2-x_1)}=\dfrac{1}{4\lambda}(x_2+x_1)$

于是 $k=\dfrac{1}{4\sqrt{\lambda}}\times 4k$，$\therefore\lambda=1$，舍去. ……………………………………………………………（8 分）

②若 $x_3=-\frac{x_1}{\sqrt{\lambda}}$，则 $C\left(-\frac{x_1}{\sqrt{\lambda}},\frac{x_1{}^2}{4\lambda}\right)$，此时 $k_{CD}=\dfrac{\frac{1}{4\lambda}(x_2{}^2-x_1{}^2)}{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(x_2+x_1)}=\frac{1}{4\sqrt{\lambda}}(x_2-x_1)$

$\therefore k=\frac{1}{4\sqrt{\lambda}}\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_2\cdot x_1}$，即 $k=\frac{1}{4\sqrt{\lambda}}\cdot\sqrt{16k^2+16}$，$\therefore\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{k^2+1}=k$，$\therefore\lambda=\frac{k^2+1}{k^2}$.

……（10 分）

由 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PC}$ 得：$x_1-1=\lambda\left(-\frac{x_1}{\sqrt{\lambda}}-1\right)$，即：$x_1=1-\sqrt{\lambda}$，$\therefore x_1=1-\frac{\sqrt{k^2+1}}{k}$

由 $x^2-4kx-4=0$ 得 $x_1=2k-2\sqrt{k^2+1}$，$\therefore 1-\frac{\sqrt{k^2+1}}{k}=2k-2\sqrt{k^2+1}$

$\therefore\left(\frac{\sqrt{k^2+1}}{k}-1\right)(2k-1)=0$，由 $\frac{\sqrt{k^2+1}}{k}>1$ 知 $2k-1=0$，$\therefore k=\frac{1}{2}$.

故 $\lambda=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=5$. ……………………………………………………………………（12 分）