

茂名市五校联盟 2022 届高三第二次联考试题

数学参考答案

一、单选题

1. B 【解析】因为 $N = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, 故 $M \cap N = \{-1, 0, 1, 2\}$. 故选 B.

2. D 【解析】 $z = \frac{i+1}{i} = 1 + \frac{1}{i} = 1 - i$ 对应的点 $(1, -1)$ 在第四象限. 故选 D.

3. B 【解析】 $b \cdot a - \frac{1}{2}b^2 = 0$, $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{b^2}{2|a||b|} = \frac{1}{2}$, 所以夹角为 60° . 故选 B.

4. A 【解析】因为 $f(x) = \frac{x \sin x}{\cos x + 2}$, $f(-x) = \frac{-x \cdot \sin(-x)}{\cos(-x) + 2} = \frac{x \cdot \sin x}{\cos x + 2} = f(x)$, 为偶函数, 所以图象关于 y 轴对称, 排除选项 B、D; 当 $x \in (0, \pi)$ 时, $f(x) > 0$, 排除选项 C. 故选 A.

5. D 【解析】由对称性可知 AB 为通径, 所以 $(\frac{p}{2})^2 + p^2 = 1$, 解得 $p = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. 故选 D.

6. C 【解析】由概率公式得 $P = 0.25 \times 0.08 + 0.25 \times 0.1 + 0.25 \times 0.12 + 0.25 \times 0.04 = 0.085$. 故选 C.

7. A 【解析】 $4^4 > 5^3 \Rightarrow 4 \log_5 4 > 3 \Rightarrow \log_5 4 > \frac{3}{4} = 0.75$, $2^4 < 3^3 \Rightarrow 4 \log_3 2 < 3 \Rightarrow \log_3 2 < \frac{3}{4} = 0.75$. 故选 A.

8. B 【解析】设球的半径为 R , 底面三角形的边长为 a , 由相切关系得球与三条侧棱的切点确定的平面截球与三棱柱, 得到的截面是大圆与内接正三角形, 故球 O 的半径 R 等于底面等边三角形中线的 $\frac{2}{3}$, 即 $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, 底面三角形被球截得的小圆半径为 r , 由此小圆

为底面三角形的内切圆得 $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, 所以 $R^2 = r^2 +$

$(\frac{1}{2})^2$, 得 $a = 1, R = \frac{\sqrt{3}}{3}, V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. 故选 B.

二、多选题

9. AD 【解析】解不等式 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 则 $-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, $k = 0$ 时, 得增区间是 $[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$, 所以 A 选项对; $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$, B 选项错; 解 $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 得到 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ 关于 $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 对称, $k = 0$, -1 时, 得 $x = \frac{\pi}{6}, x = -\frac{5\pi}{6}$ 均为对称轴, 故 C 选项错, D 选项对. 故选 AD.

10. ACD 【解析】 $a_1 + a_2 + a_9 = 3a_4 = 3$, 所以 $a_4 = 1, S_7 = 7a_4 = 7, a_2 + a_8 = 2a_4 = 2, S_{10}$ 不确定. 故选 ACD.

11. AB 【解析】 $f'(x) = x + \frac{a}{2} + \frac{1}{x} \geq 2 + \frac{a}{2} (x > 0)$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号. 存在两条相互垂直切线的充要条件是 $f'(x)_{\min} < 0$, 所以 $2 + \frac{a}{2} < 0$, 即 $a < -4$. 故选 AB.

12. ABD 【解析】根据对称性 $AA' = BB'$, 所以 $BB' < AB'$, 所以 A 选项正确; 在 $\triangle ABB'$ 中, $\sin \angle ABB' = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, 而 $\angle AB'B = 120^\circ$, 所以 $\sin \angle BAB' = \sin(60^\circ - \angle ABB') = \frac{3\sqrt{3}}{14}$, 由正弦定理得 $\frac{BB'}{\sin \angle BAB'} =$

$\frac{AB'}{\sin \angle ABB'}$, 解得 $AB' = 5$, 又因为 $AA' = BB' = 3$, 所以 $A'B' = AB' - AA' = 2$, 选项 B 正确; 不妨设 $AB = 2A'B' = 2$, $AA' = x$, 由余弦定理 $AB^2 = BB'^2 + AB'^2 - 2BB' \cdot AB' \cos 120^\circ$, 解得 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 所以 $\frac{AB'}{BB'} =$

$\frac{1+x}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$, 故 C 选项不正确; 若 A' 是 AB' 的中

点, $S_{\triangle ABB'} = \frac{1}{2} BB' \cdot AB' \sin 120^\circ = B'C' \cdot A'B' \sin 60^\circ = 2S_{\triangle A'B'C'}$, 所以 $S_{\triangle ABC} = 7S_{\triangle A'B'C'}$. 故选 ABD.

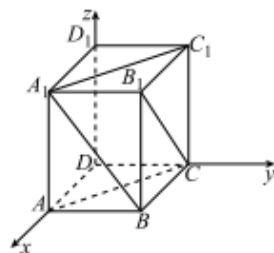
三、填空题

13.2 【解析】因为 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 故正态密度函数关于直线 $x = \mu$ 对称, 又 $P(\xi > 3) = P(\xi < 1)$, 从而 $\mu = \frac{1+3}{2} = 2$.

14. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 【解析】因为 $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < 0$, 所以 $\sin(\alpha - \beta) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos 2\alpha = \cos[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)] = \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

15. $\frac{\sqrt{21}}{3}$ 【解析】由线段 AF_1 的中点 M 在 y 轴上, 得 $A(c, \frac{bc}{a})$, 由已知 $AF_2 \perp F_1F_2$, $\angle AF_1F_2 = 30^\circ$, 所以渐近线的斜率 $\frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

16. $\frac{2}{3}$ 【解析】如图以 D 为原点, DA, DC, DD_1 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,



则 $D(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 1, 0), A_1(1, 0, 2), B_1(1, 1, 2), \vec{AC} = (-1, 1, 0), \vec{AA_1} = (0, 0, 2)$, 设平面 ACC_1A_1 的一个法向量为 $p = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} p \cdot \vec{AC} = -x + y = 0, \\ p \cdot \vec{AA_1} = 2z = 0, \end{cases}$ 取 $x = 1$, 则 $y = 1, z =$

0 , 即 $p = (1, 1, 0)$, 又 $\vec{A_1B} = (0, 1, -2), \vec{CB_1} = (1, 0, 2), \vec{A_1B_1} = (0, 1, 0)$, 由 $\vec{A_1M} = \lambda \vec{A_1B} (0 \leq \lambda \leq 1), \vec{CN} = \mu \vec{CB_1} (0 \leq \mu \leq 1)$, 得 $M(1, \lambda, 2-2\lambda), N(\mu, 1, 2\mu)$, 所以 $\vec{MN} = (-1+\mu, 1-\lambda, 2\lambda-2+2\mu)$, 由 $\vec{MN} \cdot p = 0$ 得 $\lambda = \mu$, $|\vec{MN}|^2 = (-1+\lambda)^2 + (1-\lambda)^2 + (4\lambda-2)^2 = 18\lambda^2 - 20\lambda + 6$, 当 $\lambda = \frac{5}{9}$ 时, $|\vec{MN}|^2$ 取得最小值 $\frac{4}{9}$, 即 MN 的最小值为 $\frac{2}{3}$.

四、解答题

17. 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 因为 a_2, a_4, a_8 成等比数列,

所以 $a_4^2 = a_2 \cdot a_8$, 即 $(a_3 + d)^2 = (a_3 - d) \cdot (a_3 + 5d)$. (1分)

又因为 $a_3 = 3$ 所以 $(3+d)^2 = (3-d) \cdot (3+5d)$, $d^2 - d = 0$, 解得 $d = 0$ (舍去) 或 $d = 1$. (3分)

故 $a_n = a_3 + (n-3)d = n$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = n$. (5分)

(2) 因为 $a_n = n$, 所以 $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+2}} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$, (7分)

$$T_n = \frac{1}{a_1 \cdot a_3} + \frac{1}{a_2 \cdot a_4} + \dots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+2}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4},$$

$$\text{因此 } T_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4}. \quad (10 \text{ 分})$$

18. 解: (1) $\because b \cos C = (2a - c) \cos B$,

$$\text{由正弦定理得 } \sin B \cos C = (2 \sin A - \sin C) \cos B, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\therefore 2 \sin A \cos B = \sin B \cos C + \cos B \sin C,$$

$$\therefore 2 \sin A \cos B = \sin(B+C),$$

$$\therefore 2 \sin A \cos B = \sin A, \quad (5 \text{ 分})$$

$$\because \sin A \neq 0, \therefore \cos B = \frac{1}{2},$$

$$\because 0 < B < \pi, \text{ 故 } B = \frac{\pi}{3}. \quad (6 \text{ 分})$$

(2) $\because B = \frac{\pi}{3}$, 且 $a = b$, $\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形,

$$\text{设 } \angle ADC = \alpha, \text{ 则在 } \triangle ACD \text{ 中, 由余弦定理得 } b^2 = 16 + 4 - 16 \cos \alpha = 20 - 16 \cos \alpha, \quad (7 \text{ 分})$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times b^2 \times \sin \frac{\pi}{3} = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \cos \alpha, S_{\triangle ACD}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \sin \alpha = 4 \sin \alpha, \quad (10 \text{ 分})$$

$$\therefore \text{ 四边形 } ABCD \text{ 的面积 } S = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \cos \alpha + 4 \sin \alpha$$

$$= 5\sqrt{3} + 8 \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \leq 8 + 5\sqrt{3},$$

$$\text{当 } \alpha = \frac{5\pi}{6} \text{ 时 } S = 8 + 5\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{ 四边形 } ABCD \text{ 的面积的最大值是 } 8 + 5\sqrt{3}.$$

(12 分)

19. 解: (1) 由题得 $50 \times (0.000\ 8 + 0.001\ 6 + 0.004\ 0 +$

$$0.005\ 2 + 0.001\ 2 + 0.000\ 8 + 0.000\ 4 + 2m) = 1,$$

(2 分)

$$\text{解得 } m = 0.003\ 0. \quad (3 \text{ 分})$$

(2) 月均用电量小于 250 (千瓦时) 的居民家庭所占百分比为

$$50 \times (0.000\ 8 + 0.001\ 6 + 0.003\ 0 + 0.004\ 0 + 0.005\ 2) = 0.73,$$

即 73% 的居民家庭月均用电量小于 250 (千瓦时), (5 分)

同理, 88% 的居民月均用电量小于 300 (千瓦时), 故 $250 < x < 300$,

$$\text{则 } 0.73 + (x - 250) \times 0.003\ 0 = 0.85,$$

$$\text{解得 } x = 290 \text{ (千瓦时)}. \quad (7 \text{ 分})$$

(3) 在样本中用电量不小于 350 (千瓦时) 的居民共有 $(0.000\ 8 + 0.000\ 4) \times 50 \times 100 = 6$ (户),

用电量不小于 400 (千瓦时) 的居民共有 $0.000\ 4 \times 50 \times 100 = 2$ (户), (8 分)

由题意随机变量 X 可取 0, 1, 2,

$$P(X=0) = \frac{C_4^4}{C_6^4} = \frac{1}{15},$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^3 \times C_2^1}{C_6^4} = \frac{8}{15},$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 \times C_2^2}{C_6^4} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5},$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$

(12 分)

20. 解: (1) 连接 DM , 在正方形 $ABCD$ 中, M 、 N 分别是 BC 、 CD 的中点,

$$\therefore AD:DN=DC:CM,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADN \cong \text{Rt}\triangle DCM,$$

$$\therefore \angle DAN = \angle CDM,$$

$$\therefore AN \perp DM. \quad (2 \text{ 分})$$

$$\because \text{平面 } ABCD \perp \text{平面 } CDEF, ED \perp CD,$$

$$\therefore ED \perp \text{平面 } ABCD,$$

$$\text{又} \because AN \subset \text{平面 } ABCD,$$

$$\therefore AN \perp ED, ED \cap DM = D, \quad (4 \text{ 分})$$

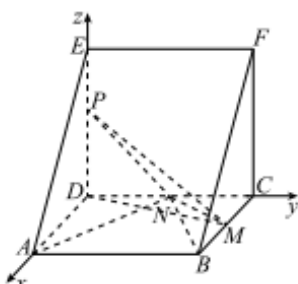
$$\therefore AN \perp \text{平面 } EDM,$$

$$\text{又} \because PM \subset \text{平面 } EDM,$$

$$\therefore AN \perp PM. \quad (6 \text{ 分})$$

(2) 直线 DA, DC, DE 两两垂直, 以 D 为坐标原点,

DA, DC, DE 分别为 x, y, z 轴建立如图所示坐标系,



不妨设 $AB=2, DP=a$, 由已知, $N(0, 1, 0), M(1, 2,$

$0), A(2, 0, 0), P(0, 0, a),$

$$\therefore \overrightarrow{NM} = (1, 1, 0), \overrightarrow{NP} = (0, -1, a), \overrightarrow{AN} = (-2, 1,$$

$0), \quad (7 \text{ 分})$

设平面 MNP 的法向量 $m = (x, y, z),$

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{NM} \cdot m = 0 \\ \overrightarrow{NP} \cdot m = 0 \end{cases}, \text{所以} \begin{cases} x + y = 0 \\ -y + az = 0 \end{cases},$$

令 $x=1$, 解得一个法向量 $m = (1, -1, -\frac{1}{a}),$

(8 分)

取平面 $ABCD$ 的法向量 $n = (0, 0, 1),$

\because 二面角 $P-MN-A$ 的大小为 $45^\circ,$

$$\therefore |\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|m \cdot n|}{|m| |n|} = \frac{|-\frac{1}{a}|}{\sqrt{1+1+\frac{1}{a^2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{解得 } a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (10 \text{ 分})$$

设直线 AN 与平面 PMN 所成角等于 $\theta,$

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AN}, m \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AN} \cdot m|}{|\overrightarrow{AN}| |m|} =$$

$$\frac{3}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{1+1+2}} = \frac{3\sqrt{5}}{10},$$

\therefore 直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{5}}{10}.$

(12 分)

21. 解: (1) 由对称性可知三角形 PF_1F_2 为等腰直角三

角形, $\angle F_1PF_2 = 90^\circ,$

因为三角形 PF_1F_2 面积等于 2, 所以 $F_1F_2 = 2\sqrt{2},$

即 $c^2 = 2,$ (2 分)

而椭圆 C 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{a},$ 解得 $a = \sqrt{3},$ 则

$$b^2 = a^2 - c^2 = 1,$$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1. \quad (4 \text{ 分})$

(2) 依题意, $P(0, \sqrt{2}),$ 设直线 l 的方程为 $y = kx +$

$m (k \neq 0), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$

由点 A 关于 y 轴的对称点在直线 PB 上, 得斜率 k_{AP}

与 k_{BP} 互为相反数,

$$\text{又 } k_{AP} = \frac{y_1 - \sqrt{2}}{x_1}, k_{BP} = \frac{y_2 - \sqrt{2}}{x_2},$$

$$\text{即 } \frac{y_1 - \sqrt{2}}{x_1} + \frac{y_2 - \sqrt{2}}{x_2} = 0, \text{化简整理得 } x_2(y_1 - \sqrt{2}) +$$

$$x_1(y_2 - \sqrt{2}) = 0,$$

又 $y_1 = kx_1 + m, y_2 = kx_2 + m,$ 于是得 $2kx_1x_2 +$

$$(m - \sqrt{2})(x_1 + x_2) = 0, \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{由} \begin{cases} y = kx + m, \\ x^2 + 3y^2 = 3, \end{cases} \text{消去 } y \text{ 得 } (3k^2 + 1)x^2 + 6kmx +$$

$$3m^2 - 3 = 0,$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow m^2 < 3k^2 + 1,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{6km}{3k^2 + 1}, x_1 x_2 = \frac{3m^2 - 3}{3k^2 + 1}, \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{从而有 } 2k \cdot \frac{3m^2 - 3}{3k^2 + 1} + (m - \sqrt{2}) \cdot \left(-\frac{6mk}{3k^2 + 1}\right) = 0,$$

$$\text{即 } 2k \cdot (3m^2 - 3) - 6mk(m - \sqrt{2}) = 0,$$

$$\text{解得 } m = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 此时直线 } l \text{ 的方程为 } y = kx + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 恒过定点 } \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \quad (12 \text{ 分})$$

$$22. \text{ 解: (1) } f'(x) = \frac{1}{x} + 2ax (x > 0), \quad (1 \text{ 分})$$

因为曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = 5x - 5$,

$$\text{所以 } \begin{cases} f'(1) = 5, \\ f(1) = 0, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} 1 + 2a = 5, \\ a + b = 0, \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{解得 } a = 2, b = -2. \quad (4 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 由 (1) } f(x) = \ln x + 2x^2 - 2,$$

$$\text{设 } g(x) = f(x) - x = \ln x + 2x^2 - 2 - x (x > 0),$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{1}{x} + 4x - 1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot 4x} - 1 = 3 > 0,$$

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, (6 分)

由已知 $g(x_1) + g(x_2) \geq 0$, 不妨设 $x_1 \leq x_2$,

① 若 $x_1 > \frac{1}{2}$, 则 $x_1 + x_2 > 1$, 命题得证; (7 分)

② 若 $0 < x_1 \leq \frac{1}{2}$, 令 $F(x) = g(x) + g(1 - x) \left(0 < x \leq \frac{1}{2}\right)$,

$$F'(x) = \frac{1}{x} + 4x - 1 - \frac{1}{1-x} + 4x - 3 = \frac{(1-2x)^3}{x(1-x)},$$

所以当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ 时, $1 - 2x \geq 0$, $1 - x > 0$, 因此

$F'(x) \geq 0$, $F(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ 上是增函数, (9 分)

$\therefore F(x) \leq F\left(\frac{1}{2}\right) = -2\ln 2 - 4 < 0$, 即 $g(x) + g(1 - x) < 0$, 即 $g(x_1) < -g(1 - x_1)$,

又因为 $g(x_1) \geq -g(x_2)$,

所以 $-g(x_2) \leq g(x_1) < -g(1 - x_1)$, 故 $g(1 - x_1) < g(x_2)$, (11 分)

因为 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

所以 $1 - x_1 < x_2$, 因此 $x_1 + x_2 > 1$,

综上所述, $x_1 + x_2 > 1$ 得证. (12 分)

