

# 盐城市、南京市 2022 届高三年级第一次模拟考试

## 数 学

2022.01

(总分 150 分, 考试时间 120 分钟)

### 注意事项:

1. 本试卷考试时间为 120 分钟, 试卷满分 150 分, 考试形式闭卷.
2. 本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置, 否则不给分.
3. 答题前, 务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水签字笔填写在试卷及答题卡上.

### 第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、单项选择题(本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合  $M = \{y | y = \sin x, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $N = \{y | y = 2^x, x \in \mathbf{R}\}$ , 则  $M \cap N =$

- A.  $[-1, +\infty)$     B.  $[-1, 0)$     C.  $[0, 1]$     D.  $(0, 1]$

**【答案】 D**

**【解析】**  $M = \{y | y \in [-1, 1]\} = [-1, 1]$ ,  $N = \{y | y > 0\}$ ,  $M \cap N = \{y | 0 < y \leq 1\} = (0, 1]$ , 选

D.

2. 在等比数列  $\{a_n\}$  中, 公比为  $q$ , 已知  $a_1 = 1$ , 则  $0 < q < 1$  是数列  $\{a_n\}$  单调递减的\_\_\_\_\_条件

- A. 充分不必要    B. 必要不充分    C. 充要    D. 既不充分又不必要

**【答案】 C**

**【解析】**  $0 < q < 1$  时,  $a_{n+1} - a_n = a_1 q^n - a_1 q^{n-1} = a_1 q^{n-1} (q - 1) < 0$ ,

$\therefore a_{n+1} < a_n$ , 即  $\{a_n\}$  是单调递减数列, 充分.

若  $\{a_n\}$  是单调递减数列, 则  $a_{n+1} < a_n$ , 即  $a_1 q^n < a_1 q^{n-1}$ ,

$\therefore q^{n-1} (q - 1) < 0$  对  $\forall n \in \mathbf{N}^*$  都成立,  $\therefore 0 < q < 1$ , 必要.

$\therefore$  充分必要条件, 选 C.

3. 某中学高三(1)班有 50 名学生, 在一次高三模拟考试中, 经统计得: 数学成绩  $X \sim N(110, 100)$ ,

则估计该班数学得分大于 120 分的学生人数为

(参考数据:  $P(|X-\mu|<\sigma)\approx 0.68$ ,  $P(|X-\mu|<2\sigma)\approx 0.95$ )

- A. 16                      B. 10                      C. 8                      D. 2

**【答案】 C**

**【解析】**  $P(X > 120) = P(X > \mu + \sigma) = \frac{1 - P(|X - \mu| < \sigma)}{2} = 0.16$

$50 \times 0.16 = 8$ , 选 C.

4. 若  $f(\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha$  ( $i$  为虚数单位), 则  $[f(\alpha)]^2 =$

- A.  $f(\alpha)$                       B.  $f(2\alpha)$                       C.  $2f(\alpha)$                       D.  $f(\alpha^2)$

**【答案】 B**

**【解析】**  $[f(\alpha)]^2 = \cos^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha = f(2\alpha)$ , 选 B.

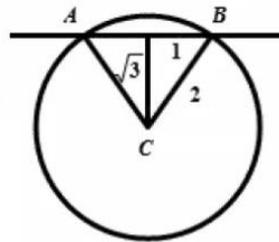
5. 已知直线  $\sqrt{2}x + y + a = 0$  与  $\odot C: x^2 + (y-1)^2 = 4$  相交于  $A, B$  两点, 且  $\triangle ABC$  为等边三角形, 则实数  $a =$

- A.  $-4$  或  $2$                       B.  $-2$  或  $4$                       C.  $-1 \pm \sqrt{3}$                       D.  $-1 \pm \sqrt{6}$

**【答案】 A**

**【解析】**  $\because \triangle ABC$  为正三角形,  $\therefore C$  到  $|AB|$  的距离为  $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$ ,

$\therefore \frac{|1+a|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ ,  $\therefore a = 2$  或  $-4$ , 选 A.



6. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 设  $A(1, 0)$ ,  $B(3, 4)$ , 向量  $\vec{OC} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$ ,  $x + y = 6$ , 则  $|\vec{AC}|$  的最小值为

- A. 1                      B. 2                      C.  $\sqrt{5}$                       D.  $2\sqrt{5}$

**【答案】 D**

**【解析】**  $\vec{OC} = (x + 3y, 4y)$ ,  $\vec{AC} = (x + 3y - 1, 4y) = (5 + 2y, 4y)$

$|\vec{AC}| = \sqrt{(5 + 2y)^2 + 16y^2} = \sqrt{20y^2 + 20y + 25}$

$y = -\frac{1}{2}$  时  $|\vec{AC}|$  取最小值  $2\sqrt{5}$ , 选 D.



**【答案】** CD

**【解析】**  $f(-x) = \cos(-2x) + \sin(-x) = \cos 2x - \sin x \neq f(x)$  ,

$\therefore f(x)$ 不是偶函数, A 错.

$f(x + \pi) = \cos 2(x + \pi) + \sin(x + \pi) = \cos 2x - \sin x \neq f(x)$  ,

$\therefore f(x)$ 的最小正周期不是  $\pi$  , B 错.

选 CD.

10. 若椭圆  $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 则下列  $b$  的值, 能使以  $F_1F_2$  为直径的圆与椭圆  $C$  有公共点的有

A.  $b = \sqrt{2}$

B.  $b = \sqrt{3}$

C.  $b = 2$

D.  $b = \sqrt{5}$

**【答案】** ABC

**【解析】** 以  $F_1F_2$  为直径的圆:  $x^2 + y^2 = c^2$  与椭圆有公共点, 则  $c^2 \geq b^2$  ,

即  $9 - b^2 \geq b^2$  ,  $\therefore b^2 \leq \frac{9}{2}$  , 即  $b \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$  , 选 ABC.

11. 若数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = (-1)^{n-1}$ , 记在数列  $\{a_n\}$  的前  $n+2 (n \in \mathbf{N}^*)$  项中任取两项都是正数的概率为  $P_n$ , 则

A.  $P_1 = \frac{1}{3}$

B.  $P_{2n} < P_{2n+2}$

C.  $P_{2n-1} < P_{2n}$

D.  $P_{2n-1} + P_{2n} < P_{2n+1} + P_{2n+2}$

**【答案】** AB

**【解析】**  $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 1, P_1 = \frac{1}{3}$ , A 对.

前  $2n+2$  项中有  $n+1$  个正数,  $n+1$  个负数.

$$P_{2n} = \frac{C_{n+1}^2}{C_{2n+2}^2} = \frac{(n+1)n}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n}{2(2n+1)} = \frac{n}{4n+2}$$

$$P_{2n+2} - P_{2n} = \frac{n+1}{4n+6} - \frac{n}{4n+2} = \frac{2}{(4n+6)(4n+2)} > 0$$

$\therefore P_{2n+2} > P_{2n}$  , B 对.

前  $2n+1$  项中有  $n+1$  个正数 ,  $n$  个负数.

$$P_{2n-1} = \frac{C_{n+1}^2}{C_{2n+1}^2} = \frac{(n+1)n}{(2n+1) \cdot 2n} = \frac{n+1}{4n+2}$$

$\therefore P_{2n-1} > P_{2n}$  , C 错.

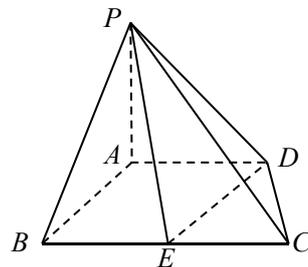
$$\begin{aligned} P_{2n+1} + P_{2n+2} - (P_{2n-1} + P_{2n}) &= P_{2n+2} - P_{2n} + P_{2n+1} - P_{2n-1} \\ &= \frac{2}{(4n+6)(4n+2)} + \frac{n+2}{4n+6} - \frac{n+1}{4n+2} = \frac{2}{(4n+6)(4n+2)} + \frac{-2}{(4n+6)(4n+2)} = 0 \end{aligned}$$

$\therefore P_{2n+1} + P_{2n+2} = P_{2n-1} + P_{2n}$  , D 错.

选 AB.

12. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 已知  $PA \perp$  底面  $ABCD$ , 底面  $ABCD$  为等腰梯形,  $AD \parallel BC$ ,  $AB = AD = CD = 1$ ,  $BC = PA = 2$ , 记四棱锥  $P-ABCD$  的外接球为球  $O$ , 平面  $PAD$  与平面  $PBC$  的角线为  $l$ ,  $BC$  的中点为  $E$ , 则

- A.  $l \parallel BC$
- B.  $AB \perp PC$
- C. 平面  $PDE \perp$  平面  $PAD$
- D.  $l$  被球  $O$  截得的弦长为 1



(第 12 题图)

**【答案】** ABD

**【解析】** 法一:  $BC \parallel AD$ ,  $AD \subset$  平面  $PAD$ ,  $BC \not\subset$  平面  $PAD$ ,  $\therefore BC \parallel$  平面  $PAD$ ,

$BC \subset$  平面  $PBC$ , 平面  $PBC \cap$  平面  $PAD = l$ ,  $\therefore BC \parallel l$ , A 对.

过  $A, D$  分别作  $BC$  的垂线, 垂足分别为  $M, N$

$$BM = CN = \frac{1}{2}, AM = DN = \frac{\sqrt{3}}{2}, \angle B = 60^\circ,$$

$$\triangle ABC \text{ 中, } AC^2 = 1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3, \therefore AC \perp AB$$

又 $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$  ,  $AB \subset$ 平面 $ABCD$  ,  $\therefore PA \perp AB$

$\therefore AB \perp$ 平面 $PAC$  ,  $PC \subset$ 平面 $PAC$  ,  $\therefore AB \perp PC$  , B对.

取 $AD$ 中点 $F$  , 则 $EF \perp AD$  ,  $PA \perp$ 平面 $ABCD$  ,  $EF \subset$ 平面 $ABCD$  ,

$\therefore PA \perp EF$  ,  $\therefore EF \perp$ 平面 $PAD$  ,  $EF \not\subset$ 平面 $PDE$  ,

$\therefore$ 平面 $PDE$ 与平面 $PAD$ 不垂直 , C错.

法二 : AB选项判断如法一 ;

以 $A$ 为坐标原点 , 以 $AM, AD, AP$ 分别为 $x, y, z$ 轴建系 ,

则平面 $PAD$ 的一个法向量 $\vec{n}_1 = (1, 0, 0)$

设平面 $PDE$ 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x, y, z)$  ,  $P(0, 0, 2)$  ,  $D(0, 1, 0)$  ,  $E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{PD} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{PE} = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} y - 2z = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$$

不妨设 $y = 1$  , 则 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$  ,  $z = \frac{1}{2}$  ,  $\vec{n}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \frac{1}{2}\right)$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \neq 0$  ,  $\therefore$ 两平面不垂直 , C错.

设 $l$ 与球两个交点为 $P, Q$  , 即 $Q$ 在球上 ,

四边形 $PADQ$ 是一个平面 , 外接圆是以 $PD$ 为直径的圆 ,  $\therefore PG \perp QD$

$\therefore PADQ$ 为矩形 ,  $\therefore PQ = 1$  , D对.

选 ABD.

法三 : 对于 A ,  $\because BC \parallel AD$  ,  $\therefore BC \parallel$ 平面 $PAD$  ,

$\because BC \subset$ 平面 $PBC$  , 平面 $PBC \cap$ 平面 $PAD = l$  ,  $\therefore BC \parallel l$  , A正确.

对于 B ,  $\because AB \subset$ 平面 $ABCD$  ,  $PC$ 是平面 $ABCD$ 的一条斜线 ,

$\therefore PC$  在平面  $ABCD$  内的射影  $AC \perp AB$  ,  
 $\therefore$  由三垂线定理知  $AB \perp PC$  , B 正确.

对于 C , 过  $A$  作  $AF \perp PD$  , 若平面  $PDE \perp$  平面  $PAD$  ,

则  $AF \perp$  平面  $PDE \Rightarrow AF \perp DE$  , 又  $\because DE \perp PA$  ,

$\therefore DE \perp$  平面  $PAD \Rightarrow DE \perp AD$  , 而  $\angle ADE = 60^\circ$  , 矛盾, 故 C 错.

对于 D , 底面四边形  $E$  , 过  $E$  作  $EQ \perp$  平面  $ABCD$  ,

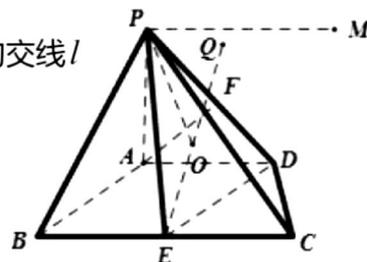
$\therefore$  四棱锥  $P-ABCD$  外接球球心  $O$  一定在  $EQ$  上 ,

设  $EO = x$  , 由  $OP = OB \Rightarrow (2-x)^2 + 1 = x^2 + 1 \Rightarrow x = 1$

过  $P$  作  $PM \parallel AD$  , 则易知  $PM$  为平面  $PAD$  与平面  $PBC$  的交线  $l$

$O$  到  $PM$  的距离  $d = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{7}}{2}$  ,  $R = \sqrt{2}$  ,

$\therefore l$  被  $O$  截得的弦长为  $2\sqrt{R^2 - d^2} = 1$  , D 正确, 选 ABD.



## 第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

### 三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 若  $f(x) = (x+3)^5 + (x+m)^5$  是奇函数, 则  $m =$  \_\_\_\_\_.

**【答案】** -3

**【解析】**  $f(x)$  为奇函数,  $f(0) = 3^5 + m^5 = 0$  ,  $m = -3$

$m = -3$  时,  $f(x) = 2(x^5 + 90x^3 + 5 \times 3^4 x)$  是奇函数,  $\therefore m = -3$ .

14. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$  , 若  $a = 3b$  , 则  $\cos B$  的最小值是 \_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

**【解析】**  $a = 3b$  ,  $\sin A = 3\sin B$  ,  $\sin(B+C) = 3\sin B$

$$\sin B \cos C + \sin C \cos B = 3 \sin B, \quad \tan B \cos C + \sin C = 3 \tan B$$

$$\therefore \tan B = \frac{\sin C}{3 - \cos C} = x, \quad \sin C = 3x - x \cos C$$

$$x \cos C + \sin C = 3x \leq \sqrt{x^2 + 1}, \quad \text{即 } x^2 \leq \frac{1}{8}$$

$$\therefore \tan B \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \therefore \cos B \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

15. 计算机是二十世纪最伟大的发明之一，被广泛地应用于人们的工作于生活之中，计算机在进行数的计算处理时，使用的是二进制。一个十进制数  $n(n \in \mathbf{N}^*)$  可以表示成二进制数  $(a_0 a_1 a_2 \cdots a_k)_2$ ,  $k \in \mathbf{N}$ , 则  $n = a_0 \cdot 2^k + a_1 \cdot 2^{k-1} + a_2 \cdot 2^{k-2} + \cdots + a_k \cdot 2^0$ , 其中  $a_0 = 1$ , 当  $i \geq 1$  时,  $a_i \in \{0, 1\}$ . 若记  $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_k$  中 1 的个数为  $f(n)$ , 则满足  $k=6, f(n)=3$  的  $n$  的个数为\_\_\_\_\_.

**【答案】** 15

**【解析】** 法一：  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  中 1 的个数为 3，

则  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  中 1 的个数为 2，  $C_6^2 = 15$ ，  $\therefore n$  有 15 个.

法二：只需  $a_1, a_2, \cdots, a_6$  中有两个 1 即可，  $\therefore n$  的个数为  $C_6^2 = 15$ .

16. 已知：若函数  $f(x), g(x)$  在  $\mathbf{R}$  上可导，  $f(x) = g(x)$ ， 则  $f'(x) = g'(x)$ . 又英国数学家泰勒发现了一个

恒等式  $e^{2x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ ， 则  $a_0 =$  \_\_\_\_\_，  $\sum_{n=1}^{10} \frac{a_{n+1}}{n a_n} =$  \_\_\_\_\_ . (第一

空 2 分， 第二空 3 分)

**【答案】**  $1; \frac{20}{11}$

**【解析】** 法一：  $x = 0$  时，  $e^0 = a_0$ ， 即  $a_0 = 1$ ，

$$2e^{2x} = (e^{2x})' = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

$x = 0$  时，  $2 = a_1$ ， 即  $a_1 = 2$

$$4e^{2x} = (2e^{2x})' = 2a_2 + 6a_3x + \cdots + (n-1)na_nx^{n-2} + \cdots$$

$$\therefore x=0 \text{ 时, } 4 = 2a_2, \text{ 即 } a_2 = 2$$

$$8e^{2x} = (4e^{2x})' = 6a_3 + 24a_4x + \cdots + (n-1)na_n(n-2)x^{n-3} + \cdots$$

$$\therefore x=0 \text{ 时, } 8 = 6a_3, \text{ 即 } a_3 = \frac{4}{3}$$

$$\therefore 16 = 24a_4, \text{ 即 } a_4 = \frac{2}{3}$$

$$2^5 = 32 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 a_5, \therefore a_n = \frac{2^n}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{na_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} = \frac{2}{(n+1)n} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{a_{n+1}}{na_n} = 2 - \frac{2}{11} = \frac{20}{11}$$

**法二：**  $x=0 \Rightarrow a_0=1$

$$e^{2x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

$$\therefore 2e^{2x} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots$$

$$\therefore 2a_n = (n+1)a_{n+1} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} \frac{a_{n+1}}{na_n} = \sum_{i=1}^{10} \frac{2}{n(n+1)} = \sum_{i=1}^{10} 2 \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 2 \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) = \frac{20}{11},$$

故应填：1； $\frac{20}{11}$ 。

四、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

从① $\sin D = \sin A$ ; ② $S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle BCD}$ ; ③ $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = -4$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 并完成解答.

已知点  $D$  在  $\triangle ABC$  内,  $\cos A > \cos D$ ,  $AB = 6$ ,  $AC = BD = 4$ ,  $CD = 2$ , 若 \_\_\_\_\_, 求  $\triangle ABC$  的面积.

注: 选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

【解析】

选①.

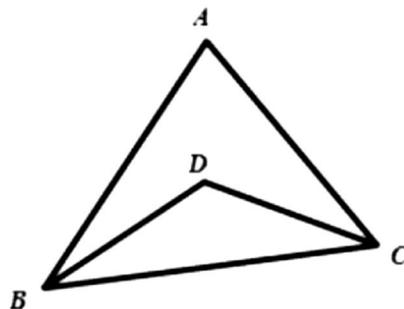
$\because \sin D = \sin A$ , 而  $D$  在  $\triangle ABC$  内,  $\therefore D > A$ , 而  $\cos A > \cos D$ ,  $D = \pi - A$

$\therefore A$  为锐角,  $D$  为钝角, 在  $\triangle ABC$  和  $\triangle BCD$  中分别由余弦定理

$$\Rightarrow BC^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \cos A = 16 + 4 - 2 \times 4 \times 2 \cos(\pi - A)$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{2}, \therefore A = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$



若选②,

$$\text{由 } S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle BCD} \Rightarrow \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \sin A = 3 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \sin D$$

$\Rightarrow \sin A = \sin D$ , 以下同①.

$$\text{若选③, } \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = -4 \Rightarrow 4 \times 2 \cos D = -4 \Rightarrow \cos D = -\frac{1}{2}, D = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore BC = \sqrt{16 + 4 - 2 \times 4 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{7}$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理} \Rightarrow \cos A = \frac{36 + 16 - 28}{2 \times 6 \times 4} = \frac{1}{2}, A = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

18. (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n=2n+4$ ，数列  $\{b_n\}$  的首项为  $b_1=2$ 。

(1)若  $\{b_n\}$  是公差为 3 的等差数列，求证： $\{a_n\}$  也是等差数列；

(2)若  $\{a_{b_n}\}$  是公比为 2 的等比数列，求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和。

【解析】

$$(1) b_n = 2 + 3(n-1) = 3n-1, \therefore a_{b_n} = 2b_n + 4 = 2(3n-1) + 4 = 6n + 2$$

$\therefore a_{b_{n+1}} - a_{b_n} = 6(n+1) + 2 - (6n + 2) = 6$  为常数，故  $\{a_{b_n}\}$  也是等差数列。

$$(2) \text{由题意知 } a_{b_n} = a_{b_1} \cdot 2^{n-1} = 8 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+2}$$

$$\therefore 2b_n + 4 = 2^{n+2}, \therefore b_n = 2^{n+1} - 2,$$

$$\therefore \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为 } \frac{4(1-2^n)}{1-2} - 2n = 2^{n+2} - 2n - 4.$$

19. (本小题满分 12 分)

佩戴头盔是一项对家庭与社会负责的表现，某市对此不断进行安全教育。下表是该市某主干路口连续 4 年监控设备抓拍到的驾驶员不戴头盔的统计数据：

|            |      |      |      |      |
|------------|------|------|------|------|
| 年度         | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 |
| 年度序号 $x$   | 1    | 2    | 3    | 4    |
| 不戴头盔人数 $y$ | 1250 | 1050 | 1000 | 900  |

(1)请利用所给数据求不戴头盔人数  $y$  与年度序号  $x$  之间的回归直线方程  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ，并估算该路口 2022 年不戴头盔的人数；

(2)交警统计 2018~2021 年通过该路口的开电瓶车出事故的 50 人，分析不戴头盔行为与事故是否伤亡的关系，得到右表，能否有 95% 的把握认为不戴头盔行为与事故伤亡有关？

|     |      |     |
|-----|------|-----|
|     | 不戴头盔 | 戴头盔 |
| 伤亡  | 7    | 3   |
| 不伤亡 | 13   | 27  |

$$\text{参考公式: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

|                 |       |       |       |       |       |        |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $P(K^2 \geq k)$ | 0.10  | 0.05  | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001  |
| $k$             | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n=a+b+c+d.$$

【解析】

$$(1) \bar{x} = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{5}{2}, \bar{y} = \frac{1250+1050+1000+900}{4} = 1050$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i y_i = 1250 + 2 \times 1050 + 3 \times 1000 + 4 \times 900 = 9950$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30,$$

$$\therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i y_i - 4 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^4 x_i^2 - 4 \bar{x}^2} = \frac{9950 - 4 \times \frac{5}{2} \times 1050}{30 - 4 \times \frac{25}{4}} = -110$$

$$\therefore \hat{y} = \hat{b}x + \hat{a} \text{ 必过样本中心 } \left( \frac{5}{2}, 1050 \right)$$

$$\therefore \hat{a} = 1050 + 110 \times \frac{5}{2} = 1325, \therefore \text{回归直线方程为 } \hat{y} = -110x + 1325$$

$$\therefore \text{2022年不带头盔的人数为: } y = -110 \times 5 + 1325 = 775 \text{ 人.}$$

(2)  $2 \times 2$ 列联表如下:

|     | 不戴头盔 | 戴头盔 | 总计 |
|-----|------|-----|----|
| 伤亡  | 7    | 3   | 10 |
| 不伤亡 | 13   | 27  | 40 |
| 总计  | 20   | 30  | 50 |

$$\therefore K^2 = \frac{50 \times (7 \times 27 - 3 \times 13)^2}{10 \times 40 \times 20 \times 30} \approx 4.688 > 3.841$$

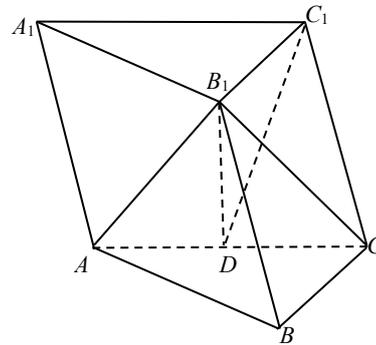
$\therefore$ 有95%的把握认为不带头盔行为与事故伤亡有关

20. (本小题满分 12 分)

在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AA_1=13$ ,  $AB=8$ ,  $BC=6$ ,  $AB \perp BC$ ,  $AB_1=B_1C$ ,  $D$  为  $AC$  中点, 平面  $AB_1C \perp$  平面  $ABC$ .

(1) 求证:  $B_1D \perp$  平面  $ABC$ ;

(2) 求直线  $C_1D$  与平面  $A_1BC$  所成角的正弦值.



(第 20 题图)

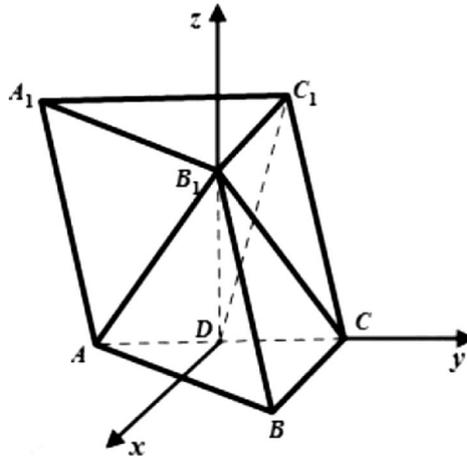
【解析】

(1) 证明:  $\because AB_1 = B_1C$ ,  $D$  为  $AC$  的中点,  $\therefore B_1D \perp AC$ ,

又  $\because$  平面  $AB_1C \perp$  平面  $ABC$ , 平面  $AB_1C \cap$  平面  $ABC = AC$ ,  $B_1D \subset$  平面  $AB_1C$

$B_1D \perp AC$ ,  $\therefore B_1D \perp$  平面  $ABC$ .

(2) 如图建立空间直角坐标系, 由  $AB=8$ ,  $BC=6$ ,  $AB \perp BC \Rightarrow AC=10$



$\therefore AD=5$ ,  $\because AA_1=BB_1=13$ ,  $\therefore B_1D=12$ ,  $\therefore B_1(0,0,12)$

$D(0,0,0)$ ,  $B\left(\frac{24}{5}, \frac{7}{5}, 0\right)$ ,  $C(0,5,0)$ , 由  $\overline{B_1C_1} = \overline{BC} \Rightarrow C_1\left(-\frac{24}{5}, \frac{18}{5}, 12\right)$

$\therefore \overline{C_1D} = \left(\frac{24}{5}, -\frac{18}{5}, -12\right)$ , 设平面  $AB_1C$  的一个法向量为  $\vec{n}$ ,  $\therefore \vec{n} = (1,0,0)$

设  $C_1D$  与平面  $ABC$  所成角为  $\theta$  ,  $\overline{C_1D}$  与  $\vec{n}$  所成角为  $\varphi$  ,

$$\therefore \sin \theta = |\cos \varphi| = \frac{|\overline{C_1D} \cdot \vec{n}|}{\|\overline{C_1D}\| \|\vec{n}\|} = \frac{24}{6\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{25}$$

21. (本小题满分 12 分)

(1) 设双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$  的右顶点为  $A$  , 虚轴长为  $\sqrt{2}$  , 两准线间的距离为  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$  .

(1) 求双曲线  $C$  的方程;

(2) 设动直线  $l$  与双曲线  $C$  交于  $P, Q$  两点, 已知  $AP \perp AQ$  , 设点  $A$  到动直线  $l$  的距离为  $d$  , 求  $d$  的最大值.

**【解析】**

**【解析】法一:**

$$(1) \text{ 由题意知 } \begin{cases} b = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2a^2}{c} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\therefore$  双曲线  $C$  的方程为  $x^2 - 2y^2 = 1$  .

(2) 当直线  $l$  斜率存在时, 设直线  $l$  方程为  $y = kx + m$  ,  $P(x_1, y_1)$  ,  $Q(x_2, y_2)$  ,  $A(1, 0)$

$$\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (1 - 2k^2)x^2 - 4kmx - 2m^2 - 1 = 0, 1 - 2k^2 \neq 0, \Delta > 0,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{4km}{1 - 2k^2} \\ x_1 x_2 = \frac{-2m^2 - 1}{1 - 2k^2} \end{cases}$$

$$\because AP \perp AQ, \therefore \overline{AP} \cdot \overline{AQ} = 0 \Rightarrow (x_1 - 1, y_1) \cdot (x_2 - 1, y_2) = 0$$

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) + y_1 y_2 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = 0$$

$$\therefore (1+k^2)x_1x_2 + (km-1)(x_1+x_2) + m^2 + 1 = 0$$

$$\therefore (1+k^2) \cdot \frac{-2m^2-1}{1-2k^2} + (km-1) \cdot \frac{4km}{1-2k^2} + m^2 + 1 = 0$$

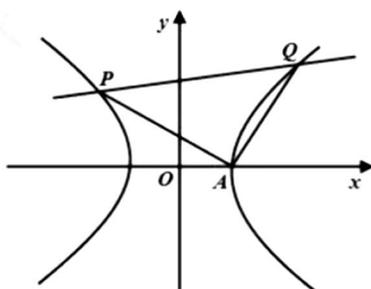
$$-2m^2 - 1 - 2k^2m^2 - k^2 + 4k^2m^2 - 4km + m^2 + 1 - 2k^2m^2 - 2k^2 = 0$$

$$\therefore 3k^2 + m^2 + 4km = 0 \Rightarrow (3k+m)(k+m) = 0$$

$\therefore m = -k$  或  $m = -3k$  , 当  $m = -k$  时, 直线  $PQ$  恒过  $A(1,0)$  , 舍去

$\therefore m = -3k$  , 此时直线  $l$  方程为:  $y = k(x-3)$  恒过  $M(3,0)$

②当  $l$  斜率不存在时, 设  $P(x_0, y_0), Q(x_0, -y_0)$  , 此时  $\overline{AP} = (x_0-1, y_0)$  ,  $\overline{AQ} = (x_0-1, -y_0)$



$$(x_0-1)^2 - y_0^2 = 0 \Rightarrow 2(x_0-1)^2 - x_0^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_0 = 1 \text{ 或 } 3$$

当  $x_0 = 1$  时,  $P, Q$  重合于  $A$  点, 舍去,  $\therefore x_0 = 3$

$\therefore$  直线  $l$  恒过  $M(3,0)$  ,  $\therefore d$  的最大值为  $AM = 2$  .

法二:

$$(1) \text{ 依题意有 } b = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2a^2}{c} = \frac{2\sqrt{6}}{3}, \text{ 解得 } a^2 = 1,$$

所以双曲线  $C$  的方程为  $x^2 - 2y^2 = 1$  ;

(2) 由 (1) 可知  $A(1,0)$  , 依题意可知  $k_{AP} \cdot k_{AQ} = -1$  ,

设  $P(x_1, y_1)$  ,  $Q(x_2, y_2)$  ,

$$\text{则有 } k_{AP} = \frac{y_1}{x_1-1} = \frac{x_1+1}{2y_1}, k_{AQ} = \frac{y_2}{x_2-1} = \frac{x_2+1}{2y_2},$$

$$\text{所以 } \frac{y_1}{x_1-1} \cdot \frac{x_2+1}{2y_2} = -1, \quad \frac{x_1+1}{2y_1} \cdot \frac{y_2}{x_2-1} = -1,$$

$$\text{化简得 } x_2y_1 + 2x_1y_2 = 2y_2 - y_1, \quad x_1y_2 + 2x_2y_1 = 2y_1 - y_2,$$

$$\text{作差得 } x_2y_1 - x_1y_2 = 3(y_1 - y_2),$$

$$\text{又 } PQ \text{ 方程为 } (x_2 - x_1)y = (y_2 - y_1)x + x_2y_1 - x_1y_2,$$

所以可知  $PQ$  过定点  $M(3, 0)$ ,

则有  $d \leq AM = 2$ , 即  $d$  的最大值为 2.

22. (本小题满分 12 分)

设函数  $f(x) = -3\ln x + x^3 + ax^2 - 2ax$ ,  $a \in \mathbf{R}$ .

(1) 求函数  $f(x)$  在  $x=1$  处的切线方程;

(2) 若  $x_1, x_2$  为函数  $f(x)$  的两个不等于 1 的极值点, 设  $P(x_1, f(x_1)), Q(x_2, f(x_2))$ , 记直线  $PQ$  的斜率为  $k$ , 求证:  $k+2 < x_1+x_2$ .

【解析】法一:

$$(1) f'(x) = -\frac{3}{x} + 3x^2 + 2ax - 2a, \text{ 切点 } (1, 1-a),$$

切线斜率  $k = f'(1) = 0$ , 切线方程为  $y = 1 - a$ .

$$(2) f'(x) = \frac{3x^3 - 3 + 2ax(x-1)}{x} = \frac{3(x-1)(x^2 + x + 1) + 2ax(x-1)}{x}$$

$$= \frac{(x-1)[3x^2 + (3+2a)x + 3]}{x}$$

$\therefore x_1, x_2$  为函数  $f(x)$  的两个不等于 1 的极值点,

$\therefore 3x^2 + (3+2a)x + 3 = 0$  在  $(0, +\infty)$  上有两个不等于 1 的正根,

$$\therefore \begin{cases} \Delta = (3+2a)^2 - 36 > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{3+2a}{3} > 0 \Rightarrow a < -\frac{9}{2}, \text{ 不妨设 } x_1 < x_2, \therefore 0 < x_1 < 1 < x_2 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

$$k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-3\ln x_2 + x_2^3 + ax_2^2 - 2ax_2 + 3\ln x_1 - x_1^3 - ax_1^2 + 2ax_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-3\ln \frac{x_2}{x_1} + (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) + a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) - 2a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-3\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} + (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 + a(x_2 + x_1) - 2a$$

$$= \frac{-3\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} + (x_1 + x_2)^2 - 1 - \frac{3}{2}(x_1 + x_2)^2 - \frac{3}{2}(x_1 + x_2) + 3(x_1 + x_2) + 3$$

$$= \frac{-3\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{3}{2}(x_1 + x_2) + 2$$

$$\Leftrightarrow \text{证明: } \frac{-3\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + 4 < 0$$

$$\text{而显然 } \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} > \frac{2}{x_1 + x_2}, \therefore \frac{-3(\ln x_2 - \ln x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{-6}{x_1 + x_2}$$

$$\text{下只需证 } \frac{-6}{x_1 + x_2} - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + 4 < 0$$

$$\text{令 } x_1 + x_2 = t, t > 2, \therefore \Leftrightarrow \text{证 } \frac{-6}{t} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + 4 < 0$$

$$\text{即证: } -t^3 + t^2 + 8t - 12 < 0, \text{ 令 } g(t) = -t^3 + t^2 + 8t - 12,$$

$$g'(t) = -3t^2 + 2t + 8 = -(3t + 4)(t - 2) < 0, \therefore g(t) \text{ 在 } (2, +\infty) \text{ 上 } \searrow, \therefore g(t) < g(2) = 0,$$

证毕!

法二：(1) 由  $f'(x) = -\frac{3}{x} + 3x^2 + 2ax - 2a$ ，有  $f'(1) = 0$ ，

所以  $f(x)$  在  $x=1$  处的切线方程为  $y = 1 - a$ ；

(2) 由  $f'(x) = \frac{(x-1)[3x^2 + (3+2a)x + 3]}{x}$ ，

所以  $x_1, x_2$  为方程  $3x^2 + (3+2a)x + 3 = 0$  的两根，

则有  $x_1x_2 = 1$ ， $x_1 + x_2 = -\frac{3+2a}{3}$ ，

又有  $k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_2 - x_1} + a(x_2 + x_1) - 2a + x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$

$= \frac{3(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_2 - x_1} - \frac{3}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{3}{2}(x_1 + x_2) + x_2^2 + x_1^2 + x_1x_2 + 3$

记  $t = x_1 + x_2$ ，即证  $\frac{3(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_2 - x_1} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 4 < t$ ，

由 ALG 不等式有  $\frac{3(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_2 - x_1} < -\frac{6}{t}$ ，

所以只需证  $\frac{1}{2}t^2 + \frac{6}{t} - \frac{t}{2} - 4 > 0$ ，即证  $\frac{(t-2)^2(t+3)}{2t} > 0$ ，成立，