咬定目标不放松　立根原在模块中*

陆一烽　张岭芝　(江苏省无锡市青山高级中学　214036)

核心素养为纲的理念如何转化为学校教育教学的实际行动，发展学生的核心素养，教学该如何做？[1] 数学运算是重要的数学核心素养，《普通高中数学课程标准(2017 年版)》指出：数学运算是指在明晰运算对象的基础上，依据运算法则解决数学问题的素养．主要包括：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，选择运算方法，设计运算程序，求得运算结果等．[2] 笔者在高三教学实践中发现，高三学生在数学运算方面不同程度地存在着以下问题：有的不会根据题目条件选择合理的运算思路，有的不能在具体的题境中明确合适的运算对象．运算来源于情境，本文以高三解析几何复习中一类题型为例，从模块化设计的角度谈谈在培养学生数学运算这一核心素养上的一些尝试．

问题(2018·全国 1·理第 19 题第二问)设椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F，过 F 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，点 M 的坐标为(2,0)．(1)当 l 与 x 轴垂直时，求直线 AM 的方程；(2)设 O 为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$．

本题考查直线的方程、直线与椭圆的位置关系，考查数学运算等数学核心素养．笔者从学生的解答发现，第一问解答较好，但是第二问情况差了很多，很多学生没有对直线进行分类讨论，也不知道如何在直线 l 与 x 轴不重合不垂直的情况下与椭圆联立来证明 $\angle OMA=\angle OMB$．这个问题在教师眼里看似简单，但是在刚进入高三的学生眼里却可能是陌生的．对于这一点，笔者很快在讲评课中得到了验证．有学生回答：这是一个几何结论，通过角平分线定理来证明两角相等．笔者表扬了学生扎实的平面几何知识，列出了角平分线定理的式子，并引导学生发现后面的计算量不小(运算思路)．还有什么方法？考虑到在 l 与 x 轴不重合不垂直的情境中，两角相等有没有什么等价的代数形式？经过引导，让学生考虑斜率和倾斜角的关系，大部分学生终于发现只要证明 $k_{MA}+k_{MB}=0$(运算对象)．最后留给学生课后思考：如果以后要证明 $\alpha=2\beta$，应该怎么证呢？

问题中，学生的困惑主要体现在如何证明 $\angle OMA=\angle OMB$．怎样在教学中帮助学生选择合理的运算思路，明确合适的运算对象呢？笔者想到了模块化．

生活中，模块化设计已经成为很多产品的设计主流，所谓模块化设计就是将产品分成几个部分，也就是几个模块，通过不同模块的排列组合可以形成不同的产品．模块化设计效率高，执行快．就数学运算而言，那些经常使用，根据题设条件呈现的相应数学知识，都可以归为基础模块．常见的基础模块有：设点或直线的方程、点在线(或曲线)上、韦达定理、三点共线、斜率之和(积)、向量的线性表示等．而根据题目目标建立目标的等价性转化，如将 $\alpha=2\beta$ 转化为证明 $\tan\alpha=\tan 2\beta$，或者根据求解目标的特征建立基础模块之间的新组合来创造性地解决问题，则属于创意模块．

1　基础模块反映了数学运算应该渗透对通性通法的掌握

解析几何的基本思想方法就是把几何问题转化为代数问题，问题的形式有新有旧，但其解决离不开这一基本思想．所以要鼓励学生把显性或者隐性的几何条件转化成代数条件，形成基础模块．像上述问题，如果学生能够有意识地假设出过点 F 的直线方程和点 A，B 的坐标，并能够联立直线与椭圆的方程，形成韦达定理，就会逐步接近设计出 $k_{MA}+k_{MB}=0$ 这一运算对象．下面再举例说明．

例 1(2019·北京理第 18 题第二问)已知抛物线 $C:x^2=-4y$，设 O 为原点，过抛物线 C 的焦点作斜率不为 0 的直线 l 交抛物线 C 于两点 M，N，直线 $y=-1$ 分别交直线 OM，ON 于点 A 和点 B．求证：以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的两个定点．

分析　从逻辑推理的角度，要证明以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的两个定点，就要先求出圆的方程，而要求圆的方程就要求出 A，B 两点的坐标，这就是整个题目的运算程序．所以设 M，N 坐

* 本文系无锡市教育科学“十三五”规划课题“高中数学教学中逻辑推理素养培养与发展的实践研究”(编号：H/D/2016/002)研究成果之一．

标，直线 $l:y=kx-1$，求出 A，B 坐标，这些都是基础模块，在圆心和半径的化简过程中还用到了韦达定理这一常用基础模块．教师在教学实践中应该指导学生不要匆匆做题，而要耐心审题、读题，逐一分析表达，让学生感受运算程序的完整性．

解　直线 l 的斜率不存在时，$x=0$ 不符合题意，焦点坐标为 $(0,-1)$，$M\left(x_1,-\frac{x_1^2}{4}\right)$，$N\left(x_2,-\frac{x_2^2}{4}\right)$，直线方程 $y=kx-1$，与抛物线方程 $x^2=-4y$ 联立得：$x^2+4kx-4=0$，$x_1+x_2=-4k$，$x_1x_2=-4$．则 $k_{OM}=-\frac{x_1}{4}$，$k_{ON}=-\frac{x_2}{4}$，直线 OM 的方程为 $y=-\frac{x_1}{4}x$，与 $y=-1$ 联立可得：$A\left(\frac{4}{x_1},-1\right)$，同理可得 $B\left(\frac{4}{x_2},-1\right)$．以 AB 为直径的圆的圆心坐标为：$\left(\frac{2}{x_1}+\frac{2}{x_2},-1\right)$，$\frac{2}{x_1}+\frac{2}{x_2}=\frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}=2k$，半径：$\left|\frac{2}{x_1}-\frac{2}{x_2}\right|=2\times\frac{\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}{|x_1x_2|}=2\sqrt{k^2+1}$，则圆的方程为：$(x-2k)^2+(y+1)^2=4(k^2+1)$，令 $x=0$ 得 $y^2+2y-3=0$，即以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的两个定点 $(0,-3)$，$(0,1)$．

做题之后的反思优化也很重要．不妨设圆经过的 y 轴上的定点 D 为 $(0,n)$，由 $DA\perp DB$，得到 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\frac{x_1x_2}{y_1y_2}+(n+1)^2=\frac{16}{x_1x_2}+(n+1)^2=-4+(n+1)^2=0$，$n=1$ 或 -3．新的运算思路来源于对垂直的代数化的理解，无需求出圆方程，这属于创意模块．此题运算中两种模块的使用能让学生从数和形的不同角度进行分析，培养学生根据运算条件合理选择运算方法的能力，尝试从“会解”到“优解”．

2　创意模块充分体现了数学运算承担着从已知到未知、化难为易的重任

除了建立目标的等价性转化是创意模块，根据求解目标的代数特征，执果索因，建立基础模块之间的新组合来解决问题，也是创意模块．在一些数学运算中，运算对象并不明显，运算思路并不容易．

例2　如图1，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，A 为椭圆上异于顶点的一点，点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{AO}$，设过点 P 的一条直线交椭圆于 B，C 两点，且 $\overrightarrow{BP}=m\overrightarrow{BC}$，直线 OA，OB 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$，求实数 m 的值．

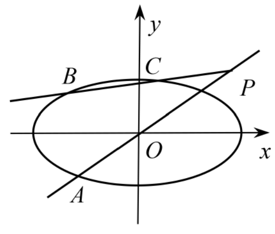

图1

解　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，由 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{AO}$ 得：$P(-2x_1,-2y_1)$，$\overrightarrow{BP}=(-2x_1-x_2,-2y_1-y_2)$，$\overrightarrow{BC}=(x_3-x_2,y_3-y_2)$．由 $\overrightarrow{BP}=m\overrightarrow{BC}$ 得 $x_3=\frac{m-1}{m}x_2-\frac{2}{m}x_1$，$y_3=\frac{m-1}{m}y_2-\frac{2}{m}y_1$．因为点 $C(x_3,y_3)$ 在椭圆上，所以 $\frac{\left(\frac{m-1}{m}x_2-\frac{2}{m}x_1\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{m-1}{m}y_2-\frac{2}{m}y_1\right)^2}{b^2}=1$，即 $\frac{4}{m^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)+\frac{(m-1)^2}{m^2}\left(\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}\right)-\frac{4(m-1)}{m^2}\left(\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}\right)=1$，记为（*）式．因为 A，B 在椭圆 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$ 上，记为(1)式，$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$，记为(2)式，因为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$．

又直线 OA，OB 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$，即 $k_{OA}\cdot k_{OB}=\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-\frac{1}{2}=-\frac{b^2}{a^2}$，所以 $\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}=0$，记为(3)式，将(1)、(2)、(3)代入（*）得 $\frac{4}{m^2}+\frac{(m-1)^2}{m^2}=1$，解得 $m=\frac{5}{2}$．

分析　本题的创意模块体现在(3)式，$\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}=$? 针对这一运算对象，充分展开逻辑推理：$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$ 还未使用，所以用常数代换法，$k_{OA}\cdot k_{OB}=\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-\frac{1}{2}=-\frac{b^2}{a^2}$，得到 $\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}=0$，最后把这三个模块代入（*）式求出 m．在具体的题境中明确合适的运算对象始终是我们在教学中最

应该清晰展示给学生的.值得注意的是,题目中的点比较多,由图发现通过 B,C,P 三点共线可以求出点 C 的坐标,所以对于点 C 在椭圆上这个运算对象的化简非常重要.在实践中,由于这里字母比较多,学生在这里容易混乱,这就要坚决贯彻合并同类项的运算法则,把相同系数的先提出来,形成简洁明了的(*)式,这也体现了数学运算化繁为简的功能.

例3 如图2,已知椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右顶点分别为 A,B,圆 $x^2+y^2=4$ 上有一动点 P,P 在 x 轴上方,$C(1,0)$,直线 PA 交椭圆于点 D,连结 PB,DC,直线 PB 与 DC 的斜率存在且分别为 k_1,k_2,若 $k_1=\lambda k_2$,求 λ 取值范围.

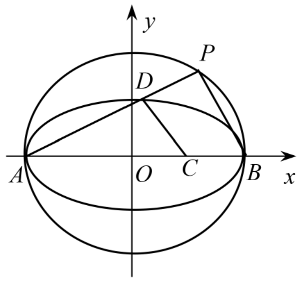

图2

解 设 $P(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)(-2<x_2<2,x_2\neq 1)$,此时由 P,D,A 三点共线可求得 $\frac{y_2}{x_2+2}=\frac{y_1}{x_1+2}$,所以 $\frac{y_1}{y_2}=\frac{x_1+2}{x_2+2}$,记为(1)式;由 $\begin{cases}x_1^2+y_1^2=4,\\ \frac{x_2^2}{4}+y_2^2=1,\end{cases}$ 得 $\frac{y_1^2}{y_2^2}=\frac{4-x_1^2}{1-\frac{x_2^2}{4}}=\frac{4(2+x_1)(2-x_1)}{(2+x_2)(2-x_2)}$,记为(2)式;将(1)代入(2)得 $\frac{y_1}{y_2}=\frac{4(2-x_1)}{2-x_2}$,记为(3)式;则 $\lambda=\frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{y_1}{x_1-2}}{\frac{y_2}{x_2-1}}=\frac{y_1}{y_2}\cdot\frac{x_2-1}{x_1-2}$,记为(4)式.将(3)代入(4)得 $\lambda=\frac{4(2-x_1)}{2-x_2}\cdot\frac{x_2-1}{x_1-2}=4\cdot\frac{x_2-1}{x_2-2}=4\left(1+\frac{1}{x_2-2}\right)$,因为 $-2<x_2<2,x_2\neq 1$,所以 $\lambda\in(-\infty,0)\cup(0,3)$.

分析 本题运算对象 $\lambda=\frac{y_1}{y_2}\cdot\frac{x_2-1}{x_1-2}$,(4)式坐标太多,原本无法求出范围,但紧紧抓住其结构中有纵坐标的比,充分使用已经得到的基础模块(1)(2),用部分替换的方法加工成一个创意模块 $\frac{y_1}{y_2}=\frac{4(2-x_1)}{2-x_2}$,将(3)式代入后,就将 λ 转化为关于 x_2 的函数值域问题,充分体现了模块化设计化难为易的好处.

例4 如图3,椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$,设动点 P 满足:$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}$,其中 M,N 是椭圆上的点,直线 OM 与 ON 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$,问是否存在两个定点 F_1,F_2,使得 PF_1+PF_2 为定值?若存在,求出 F_1,F_2 的坐标;若不存在,请说明理由.

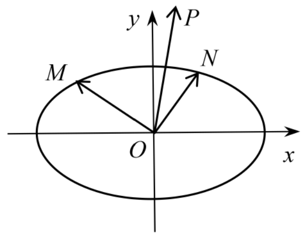

图3

解 设 $P(x,y)$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,此时由 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}$ 得 $(x,y)=(x_1,y_1)+2(x_2,y_2)$,所以 $x=x_1+2x_2$,$y=y_1+2y_2$,由 M,N 在椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 上得 $x_1^2+2y_1^2=4$,记为(1)式,$x_2^2+2y_2^2=4$,记为(2)式.因为直线 OM 与 ON 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$,所以 $k_{OM}\cdot k_{ON}=\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-\frac{1}{2}$,即 $x_1x_2+2y_1y_2=0$,记为(3)式.则 $x_1^2+2y_1^2+4(x_2^2+2y_2^2)+4(x_1x_2+2y_1y_2)=0$,记为(*)式,将(1)(2)(3)代入(*)得 $x^2+2y^2=20$,即 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{10}=1$.所以点 P 的轨迹是以 $F_1(-\sqrt{10},0)$,$F_2(\sqrt{10},0)$ 为焦点的椭圆,由椭圆定义存在两个定点 $F_1(-\sqrt{10},0)$,$F_2(\sqrt{10},0)$ 使得 $PF_1+PF_2=2\sqrt{10}$ 为定值.

分析 本题的创意模块体现在由数到形的关键,设计运算对象 x^2+2y^2.为什么求 x^2+2y^2,而不是求 x^2+3y^2?这是因为经过逻辑推理,有三个基础模块:$x_1^2+2y_1^2=4$,$x_2^2+2y_2^2=4$,$x_1x_2+2y_1y_2=0$,以及 $x=x_1+2x_2$,$y=y_1+2y_2$,综合这些信息,想到把这三个模块配凑成这个运算对象.咬定目标,检索所有信息,创造性地建立新组合是创意模块的必经之路.教学中,要多给学生一些思考的时间,不要轻易给出答案,而要让学生积累运算经验,体会其中的苦与乐.

综上,模块化设计首先要把源头和底层的东西搞清楚.在解析几何这一类问题中,教师要在教学中鼓励学生把几何条件转化为代数语言,形成基础模块,再通过代数式的运算来解决问题.没有

(下转第50页)

设计意图 通过小结回顾本节课的重难点，进一步掌握作图的依据，理解尺规作图步骤的合理性．通过尺规作图梳理知识结构，打通各个知识板块之间的关联，发展逻辑思维能力．

5 教学反思

几何是研究变中不变的科学．就是在变中寻找不变的东西，也就是定量把握定性刻画，一个是在宏观上把握方向性的问题，一个是在微观上研究刻画它的数量关系．尺规作图有五种基本作图，是基于五个基本事实，这五个基本事实就相当于几何教学中的八个公理与定理，作图时可以直接拿来用的．

5.1 预测推理，化解难点

作图题是一个推理题，工具比较少，就相当于几何证明的公理与定理一样，可用的比较少．一个完整的尺规作图的思维过程是已知 — 求证 — 分析 — 作法 — 证明 — 讨论，而一个完整的几何推理只有已知 — 求证 — 分析 — 证明．所以作图题难度很大，对学生的思维要求非常高．那作图题怎么教呢？如本节课作一个角的平分线，假设已经作出来，在这样的图形中可以构成什么样的结构？目前是角平分线，由此想到角平分线的定义、性质、轴对称性．那么如何确定这条线呢？根据公理“两点确定一条直线”，还需要一个点，还可以想到什么？构造全等三角形，也就是构造形结构，围绕这个思路去想．道生一、一生二、二生三、三生万物，这是最基本的数学理念．所以，在尺规作图的作法探究中，教师可以让学生根据已知画出草图，根据草图分析画法，利用尺规规范作图，而后再证明，这就经历了由合情推理到演绎推理的思维过程，也是由几何直观到几何推理的过程．

5.2 运用作图，追根溯源

尺规作图作为一种严谨的作图方式，不仅可以培养学生的操作和思维能力，同时也是几何证明不可或缺的步骤．一方面，作图为几何命题提供了直观的图形条件；另一方面，作图有时也为证明提供了思路．尺规作图有着严谨的逻辑性，教学中要让学生利用几何原理解释作图步骤，在培养学生操作能力的同时，达到训练理性思维的目的．学生思考、作图和证明的过程，正是《课标》所提倡的“经历观察、实验、猜测、计算、推理、验证等活动过程”，这一操作和推理活动，既有利于学生积累数学活动经验，也有利于培养学生合情推理和演绎推理的能力，促进学生形成独立思考、主动探索、反思质疑的良好思维品质．在指向教师如何教的教学示范或建议中，均是以学生的先行独立尝试开路，洞察学情，以学定教．因此，本设计在设计教知识技能的同时更关注启迪学生思维，运用作图，追根溯源．

5.3 通透原理，彰显深意

尺规作图的教学不能仅停留在“作图”这个层面，而要引导学生会作图，还要弄清楚为什么这样作、对应了哪些知识、理由又是什么．笔者认为对于角平分线，学生可以从位置和数量两个方面来理解，数量可以刻画位置，位置因为数量更加的精确．学生先联想，再理解，最后运用已有的经验和方法来解决问题．教师应该尝试着创建一个给学生自由理解的课堂，联想所有的知识点和模型，再运用自己的知识和方法来解决问题这样的套路．这节课启发我们教师的“教”和学生的“学”都应从一个点通过联想打通数学学习的各个板块之间的关联，那么一道题就不仅仅是一道题，而是一节课，甚至是很多节课，这才是尺规作图的教学价值所在．

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部．义务教育数学课程标准（2011 年版）[M]．北京：北京师范大学出版社，2012：46．
[2] 周杨．尺规作图教学的难点分析与突破[J]．教育研究与评论（课堂观察），2016(6)：91-92．

（上接第 26 页）

基础就没有创造．创意模块的设计，需要追根溯源，善于发现几何与代数问题间的等价性转换，运用常数代换、部分替换、配凑等运算技能，分解目标式，巧妙组装基础模块，打通障碍，直至得到结果，这充分体现了数学运算从已知到未知、化繁为简、化难为易的功能．

参考文献

[1] 章建跃．高中必修课程中概率的教材设计和教学思考——兼谈“数学核心素养如何落地”[J]．课程·教材·教法，2017，37(5)：27-33．
[2] 中华人民共和国教育部．普通高中数学课程标准（2017 年版）[M]．北京：人民教育出版社，2018．