核心素养导向下数学运算能力的培养

钱桂荣　（江苏省锡山高级中学　214174）

《普通高中数学课程标准(2017 年版)》(下称新课标)指出:数学运算与数学核心素养的其他五个要素构成一个有机整体,它们既相互独立,又相互交融.在数学运算核心素养的形成过程中,要使学生能够理解运算对象,掌握运算法则,探究运算思路,选择运算方法,设计运算程序,求得正确运算结果,以此进一步发展数学运算能力.下面结合本人的教学实践,谈谈寻求提升学生运算能力的途径和方法.

1　明确运算对象,把握运算的指向性

新课标指出,数学运算是在明晰运算对象的基础上进行的.在课堂教学中,通过理解运算对象的内容、运算对象的背景、运算对象所在的知识体系,多角度观察,实现运算对象的多元表征,并广泛联系相关知识,引导学生对已知与未知条件进行合理推断,揭示因果关系(由因导果或执果索因),牢固掌握并灵活运用概念中所表现出的数量化、符号化的内涵,明确运算对象,把握运算的指向性.

问题 1　已知 α 为锐角,且 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}$,求 $\cos\alpha$ 的值.

在解答本题时,如果先将条件中的 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$ 展开,得 $\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{3}$.再与 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 联立方程组,得 $\begin{cases}\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\frac{1}{3},\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\end{cases}$ 消去 $\sin\alpha$,得 $36\cos^2\alpha+12\sqrt{3}\cos\alpha-5=0$.解得 $\cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}\pm2\sqrt{2}}{6}$.又因为 α 为锐角,所以 $\cos\alpha>0$,故 $\cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$.

但如果能明确运算对象 $\cos\alpha$ 中的角 α 和已知角 $\alpha-\frac{\pi}{3}$ 的联系 $\alpha=\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}$,那么本题的运算就是两角和的余弦公式的展开,只要根据已知条件先求出 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,然后由 $\cos\alpha=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{-\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$ 求得结果.这样的运算显然要比上面用解方程(组)的方法简单得多.

明确运算对象要求我们从多个视角审视运算对象:已知条件是什么?已知条件中的对象与所求对象有怎样的联系?从数量或图形角度看,它们有何内在联系?从数量的角度看,对应的数量、代数式、不等式、方程等是什么?从图形的角度看,图形由哪些基本的几何元素组成,这些几何元素之间有怎样的位置和数量关系?这些问题在运算一开始都要考虑清楚,做到运算指向正确、任务明确.

2　准确运用运算法则,把握运算的合理性

数学运算最基本的要求是准确运算,提升运算能力的关键在于整体把握概念的实质、深刻揭示运算的本质,理解算理,遵循运算的基本法则.

问题 2　求函数 $y=\frac{4}{\sin^2x}+\frac{9}{\cos^2x}\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小值.

本题容易采用下面的错误解法:

因为 $0<x<\frac{\pi}{2}$,所以 $\sin x>0$,$\cos x>0$.根据基本不等式,得 $\frac{4}{\sin^2x}+\frac{9}{\cos^2x}\geqslant2\sqrt{\frac{36}{\sin^2x\cos^2x}}=\frac{12}{\sin x\cos x}=\frac{24}{\sin 2x}\geqslant24$,故所求函数的最小值为 24.

造成错解的的原因是上式中的两个“$\geqslant$”中的“$=$”不能同时成立,这是因为第一个“$\geqslant$”中的“$=$”成立条件是当且仅当 $\frac{4}{\sin^2x}=\frac{9}{\cos^2x}$,即 $\tan x=\frac{2}{3}$;而第二个“$\geqslant$”中的“$=$”成立条件是当且仅当 $\sin 2x=1$,即 $\tan x=1$.因此,函数值取不到 24.

正解:$y=\frac{4}{\sin^2x}+\frac{9}{\cos^2x}=\left(\frac{4}{\sin^2x}+\frac{9}{\cos^2x}\right)(\sin^2x+\cos^2x)=13+$

$\frac{4\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{9\sin^2 x}{\cos^2 x}\geqslant 13+2\sqrt{\frac{4\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{9\sin^2 x}{\cos^2 x}}=25$,当且仅当$\frac{4\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{9\sin^2 x}{\cos^2 x}$,即 $\tan x=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时,$y=25$,即函数取得最小值 25.

从上面例子可以看出,学生在运算中出现的错误从本质上说是对一些公式、定理、法则的本质掌握不够清楚,要提高运算的准确性,必须狠抓算法、算理的正确使用,避免盲目套用公式法则而导致解题失误.

3　突出运算思路的寻找,把握运算的准确性

探究运算思路是在理解运算对象、运算法则的基础上,确定运算的具体指向,寻求运算的条理和头绪,是对数学运算的进一步推进.运算思路合理与否,将决定运算的简与繁,甚至成与败,思路一旦确定,后面的工作便迎刃而解.因此,探究运算思路是数学运算中的关键环节,通常也是最为困难的.

问题3　对于函数 $f(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2$,若存在实数 t,m,对任意的 $x\in[1,m]$,都有 $f(x+t)\leqslant x$ 成立,求实数 m 的最大值.

分析1　由对任意 $x\in[1,m]$ 都有 $f(x+t)\leqslant x$ 成立,可得$\frac{1}{4}(x+t+1)^2\leqslant x$ 对任意 $x\in[1,m]$ 都成立,即 $-1-x-2\sqrt{x}\leqslant t\leqslant -1-x+2\sqrt{x}$ 对任意的 $x\in[1,m]$ 都成立.设 $g(x)=-1-x-2\sqrt{x}$,$x\in[1,m]$;$h(x)=-1-x+2\sqrt{x}$,$x\in[1,m]$,则原题转化为 $g(x)\leqslant t\leqslant h(x)$,对任意的 $x\in[1,m]$ 都成立,所以 $g(x)_{\max}\leqslant t\leqslant h(x)_{\min}$,$x\in[1,m]$.由于 $g(x)=-1-x-2\sqrt{x}$,$x\in[1,m]$ 为单调递减函数,所以 $g(x)_{\max}=g(1)=-4$.由于 $h(x)=-1-x+2\sqrt{x}$,$x\in[1,m]$ 也为单调递减函数,所以 $h(x)_{\min}=h(m)=-1-m+2\sqrt{m}$.因此,$-4\leqslant t\leqslant -1-m+2\sqrt{m}$.因为实数 t 存在,所以本题等价于 $-4\leqslant t\leqslant -1-m+2\sqrt{m}$,解得 $1\leqslant m\leqslant 9$,所以 m 的最大值为 9.

分析2　本题若考虑用数形结合的思路方法,则更为简单.由于函数 $f(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2$ 的图象为以直线 $x=-1$ 为对称轴的开口向上的抛物线,对任意的 $x\in[1,m]$,都有 $f(x+t)\leqslant x$ 成立表示 $f(x)$ 的图象向左($t>0$)或向右($t<0$)平移 $|t|$ 个长度单位后在区间$[1,m]$上的图象都在直线 $y=x$ 的下方,要使得 m 最大,显然抛物线必须向右平移,即 $t<0$.由图形可得当抛物线与直线 $y=x$ 的两个交点中左边一个的坐标为$(1,1)$时,右边一个交点对应的横坐标即为 m 的最大值.由 $f(1+t)=1$,得 $t=-4$.又由 $f(x-4)=x$,得 $x=1$ 或 $x=9$,所以 m 的最大值为 9.

寻求运算思路时我们不妨可以借助波利亚的《怎样解题》中提供的各种途径:探寻包含在问题中的所有概念、公式、定理与方法,能不能利用它?联想与现在的问题有关且已解决的问题,考虑能不能利用或模仿它?仔细推敲每个条件或努力挖掘出隐含条件,尝试对问题进行转化与化归,正难则反.如不能解决问题,能否找出一个更易着手的有关问题?一个更特殊的问题?一个类比的问题?一个更普遍的问题?

4　注重运算方法运用,把握运算的简捷性

运算速度是运算能力的重要标志,在数学教学中要强调在准确运算的前提下算得快,而要想算得快,就必须做到基本运算熟练,运算方法合理,运算途径简便.同一个问题往往可用不同的思路和方法去解决,方法选择得越合理,运算速度也就会越快.有些数学问题可根据题目的已知条件,利用有关概念、性质、法则进行简化运算,从而提高运算速度.

问题4　已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F,过 F 作倾斜角为 60° 的直线 l,直线 l 交椭圆于 A,B 两点,若 $BF=2FA$,求椭圆的离心率(图1).

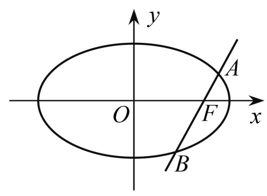

图1

分析1　由 $BF=2FA$,得$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FA}$;利用向量坐标运算,得 $y_2=-2y_1$;再利用直线方程与椭圆方程联立方程组消元后的方程中根与系数的关系,得出 a,b 的关系,从而求出椭圆的离心率.

解　设椭圆的半焦距为 c,直线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-c)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.由 $BF=2FA$,得$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FA}$.而$\overrightarrow{BF}=(c-x_2,-y_2)$,$\overrightarrow{FA}=(x_1-c,y_1)$,所以 $y_2=-2y_1$.联立方程组 $\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-c),\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 消去 x,得方程 $(3a^2+b^2)y^2+2\sqrt{3}b^2cy-3b^4=0$.由方程根与系数的关系,得 $y_1+y_2=-y_1=\frac{2\sqrt{3}b^2c}{3a^2+b^2}$ ①,$y_1y_2=-2y_1^2=$

$\frac{-3b^4}{3a^2+b^2}$ ②.将①代入②,消去 y_1,得 $8c^2=3a^2+b^2$.又 $a^2-c^2=b^2$,所以 $9c^2=4a^2$,得离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$.

分析 2 由于直线 l 过椭圆的右焦点,所以 AF,BF 都是椭圆的焦半径,因此可以考虑用椭圆的第二定义,通过数形结合来求解.

解 作出椭圆的右准线 h,分别过 A,B 作右准线 h 的垂线,交右准线 h 于 C,D 两点,过 A 点作 BD 的垂线交 BD 于 E 点(图 2),则在 Rt△ABE 中,$\angle ABE=60°$.设 $AF=d$,椭圆的离心率为 e.由 $BF=2FA$,得 $BF=2d$.设椭圆离心率为 e,则由椭圆第二义,得 $\frac{AF}{AC}=\frac{BF}{BD}=e$,所以 $AC=\frac{AF}{e}=\frac{d}{e}$,$BD=\frac{BF}{e}=\frac{2d}{e}$,所以 $BE=BD-ED=BD-AC=\frac{d}{e}$.在 Rt△$ABE$ 中,$AB=AF+BF=3d$,$\angle ABE=60°$,所以 $BE=\frac{3d}{2}=\frac{d}{e}$,即离心率 $e=\frac{2}{3}$.

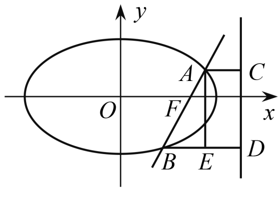

图 2

上面两种解法中,第一种解法(即代数方法)是解决此类问题的通法,推理清晰严密,通过逐步消元求解,体现了解析几何的一般解题方法,但这种方法有一定的运算量.第二种解法(即几何方法),过程比较简单,运算量很小,不易失误.然而当改变条件,直线不经过焦点,此时 AF,BF 不是焦半径了,几何方法就不适合了,只能用通法(代数方法)来求解.

5 讲究运算的程序设计,把握运算的逻辑性

运算程序是对运算思路的具体落实,合理的运算程序设计是建立在对问题本质的思考之上的,它使运算按部就班地展开,易于驾驭,这对繁杂的运算尤为必要.因此,应重视程序的设计,并相对"固化"一些常见且重要的运算程序,便于学生掌握.

问题 5 设数列$\{a_n\}$各项都为正数,其前 n 项和为 S_n,若 $a_1=1$,对于任意正整数 m,n,都有 $S_{m+n}=\sqrt{2a_{2m}(1+S_{2n})}-1$ 成立,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解 对于任意正整数 m,n,都有 $S_{m+n}=\sqrt{2a_{2m}(1+S_{2n})}-1$,即 $1+S_{m+n}=\sqrt{2a_{2m}(1+S_{2n})}$(*).

一般正整数 m,n 可先固定一个,不妨先固定 m.如取 $m=1$,得 $1+S_{n+1}=\sqrt{2a_2(1+S_{2n})}$ ①;再取 $m=2$,得 $1+S_{n+2}=\sqrt{2a_4(1+S_{2n})}$ ②.

② 除以 ①,得 $\frac{1+S_{n+2}}{1+S_{n+1}}=\sqrt{\frac{a_4}{a_2}}$,即$\{1+S_n\}$($n\geqslant 2$)是公比为 $q=\sqrt{\frac{a_4}{a_2}}$ 的等比数列.所以 $1+S_n=(1+S_2)q^{n-2}$($n\geqslant 2$) ③,$1+S_{n-1}=(1+S_2)q^{n-3}$($n\geqslant 3$) ④.

③ - ④,得 $a_n=(1+S_2)q^{n-3}(q-1)$($n\geqslant 3$).接下来只要求出 q,即可得到数列$\{a_n\}$的通项公式,只需要再用赋值法求出前几项即可.

在(*)式中,取 $m=n=1$,得 $1+S_2=\sqrt{2a_2(1+S_2)}$,即 $(1+S_2)^2=2a_2(1+S_2)$.由 $a_1=1$,得 $a_2=2$.

在(*)式中,取 $m=1$,$n=2$,得 $1+S_3=\sqrt{2a_2(1+S_4)}$,即 $(4+a_3)^2=4(4+a_3+a_4)$ ⑤.在(*)式中,取 $m=2$,$n=1$,得 $1+S_3=\sqrt{2a_4(1+S_2)}$,即 $(4+a_3)^2=8a_4$ ⑥.

由 ⑤⑥ 得 $a_3=4$,$a_4=8$,从而 $q=2$.所以 $a_n=(1+S_2)q^{n-3}(q-1)=2^{n-1}$($n\geqslant 3$).由于 $a_1=1$,$a_2=2$ 也满足上式,故 $a_n=2^{n-1}$($n\in\mathbf{N}^*$).

在上述问题的解决过程中,先由条件对正整数 m,n 任意变化时,等式恒成立,可先固定一个量 m,然后得出 S_{n+1} 与 S_{2n} 关系,再由 n 和 $n-1$ 对应的两个等式成立,两边对应相除,得出$\{1+S_n\}$($n\geqslant 2$)成等比数列,得到式子后再由 $a_n=S_{n+1}-S_n$ 求得 a_n($n\geqslant 3$)关于 n 的关系式,最后对条件多次赋值求出数列前四项,这样既求出了公比,也说明 $n=1$,$n=2$ 时也满足求出的当 $n\geqslant 3$ 时的关系式,从而得到数列$\{a_n\}$的通项公式.这些运算步骤都是数列问题的常用运算程序.

6 追求运算结果正确,把握运算的规范性

求得正确的运算结果,是进行数学运算的最终目的,处理不好,会前功尽弃.运算技能必须通过长期的限时限量的训练才能得到提高.由于高中数学教学内容多、任务重,而一些"烦琐"的运算很费时,在教学中教师要精心备课,在关键运算点上要舍得花时间,对求解过程中学生可能忽视的知识与方法、运算的程序与要点、或者可能产生的错误,以及计算时可能会遇到的障碍等,要进行

全面的考察或预估,并在教学时重点加以关注.在运算训练中,应重点强调基本运算、规范运算,这是提高运算准确率的基础.在教学过程中充分让学生参与一些数与式的运算过程,如在学习解不等式、三角恒等变换及圆锥曲线时,要有意识地安排一些运算量较大的问题,以培养学生不怕繁难运算的意志品质,并对典型的运算障碍与错误经常进行剖析,促使学生在经常性的运算过程中提高熟练程度和准确率.

运算能力不能脱离具体的数学知识而孤立存在,也不能离开其他核心素养而独立发展.它与观察能力、记忆能力、表达能力、理解能力以及思维能力等诸多因素互相渗透、协调发展.培养与提高学生的运算能力是一项复杂的系统工程,要贯穿于数学教学的始终,要有计划、有目标、有意识地运用科学的方法进行长期的渗透和培养,使学生逐步领悟运算能力的实质,进而逐步提升思维能力和数学核心素养.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017 年版)[M].北京:人民教育出版社,2018.
[2] 钱桂荣.高三数学讲评课的“三步曲”[J].数学教学通讯,2019(1).

(上接第 2 页)

第三,在当今社会,研究领域越来越细,数学教育研究也是如此.没有哪位学者可以在每一个数学教育领域都成为专家,因此我们建议读者对有些章节要细读,特别是与读者的研究兴趣相同的章节,这样才能更好地帮助读者在该领域继续深入钻研.在阅读的过程中,我们也请读者关注如下问题:本章是如何论述应用于这一研究领域的方法这些年来的演进过程的? 本章所关注的特定研究领域中未来可能有的研究方向有哪些,以及作者们是如何诠释这些未来方向的? 其他章节则可以根据兴趣泛读,部分了解即可.

4 总结

如果把 50 年前《数学教育研究杂志》的出版看作数学教育成为独立的研究领域的标志的话,出版研究手册就是数学教育研究领域逐渐成熟的标志[5,10,11].研究手册以中英文对照的形式出版,在中国是首次.这次翻译的团队规模空前,集中了国内外数学教育专业的大部分力量,先独立翻译,再相互校对,除了主编蔡金法教授亲自校对外,还有李俊、姚一玲、聂必凯、李旭辉、吴颖康等协助三校,也有内地数学教育名家协助通读.可以说,这次的中文翻译的准确性是非常高的,所以希望读者中英对照着看,以帮助自己提升阅读数学教育英文文献的能力,也希望有更多的研究者可以写出高质量的英文文章并在国际期刊上发表.

在本文中,我们概要地介绍了《数学教育研究手册》的整体结构并给读者提出了一些阅读建议,希望对广大读者的科研有帮助.教学即科研,以研究的视角看教学,教学和研究将得到同步提升.

参考文献

[1] 蔡金法.数学教育研究手册(第一册):数学教育研究的理论基础和方法[M].北京:人民教育出版社,2020.
[2] 蔡金法.数学教育研究手册(第二册):数学内容和过程的教与学[M].北京:人民教育出版社,2020.
[3] 蔡金法.数学教育研究手册(第三册):学生、教师和学习环境[M].北京:人民教育出版社,2020.
[4] 蔡金法.数学教育研究手册(第四册):数学教育研究热点初探[M].北京:人民教育出版社,2020.
[5] Cai J.Compendium for research in mathematics education[M].Reston,VA:National Council of Teachers of Mathematics,2017.
[6] 朱雁.《数学教育研究手册》主编蔡金法教授采访记:知识积累与人才培养[J].数学教育学报,2018,27(1):31-35.
[7] Williams S R,Leatham K R.Journal quality in mathematics education[J].Journal for Research in Mathematics Education,2017,48(4):369-396.
[8] 蔡金法,聂必凯,许世红.做探究型教师[M].北京:北京师范大学出版社,2015.
[9] 蔡金法.中文版序言[M]//蔡金法.数学教育研究手册(第一册):数学教育研究的理论基础和方法,北京:人民教育出版社,2020.
[10] Grouws D A.Handbook of research on mathematics teaching and learning[M].New York:Macmillan,1992.
[11] Lester F K Jr.Second handbook of research on mathematics teaching and learning[M].New York:Information Age Publishing,2007.