常州市教育学会学业水平监测

高三数学

2020年11月

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
2. 做答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将答题卡交回.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四伐项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{y|y=x^2\}$，则 $A\cap(C_RB)=$ (　　)

A. $\{-2,-1\}$　　B. $\{-2,-1,0\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{1,2\}$

【答案】A

2. i是虚数单位，复数 $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{-i}=$ (　　)

A. $-\sqrt{3}-i$　　B. $-\sqrt{3}+i$　　C. $\sqrt{3}-i$　　D. $\sqrt{3}+i$

【答案】B

3. $\tan 15°=$ (　　)

A. $-\sqrt{3}-1$　　B. $2-\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{3}+1$　　D. $2+\sqrt{3}$

【答案】B

4. 函数 $y=\sin 2x$ 的图象可由函数 $y=\cos(2x+\dfrac{\pi}{6})$ 的图像 (　　)

A. 向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位得到　　B. 向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位得到

C. 向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位得到 ------------------------------------ D. 向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位得到

【答案】D

5. 已知函数 $f(x)=x^2+a\ln x, a>0$. 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线是曲线 $y=f(x)$ 的所有切线中斜率最小的，则 $a=$ (　　)

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

【答案】D

6. 某校全体学生参加物理实验、化学实验两项操作比赛，所有学生都成功完成了至少一项实验，其中成功完成物理实验的学生占62%，成功完成化学实验的学生占56%，则既成功完成物理实验又成功完成化学实验的学生占该校学生的比例是 (　　)

A. 44%　　B. 38%　　C. 18%　　D. 6%

【答案】C

7. 声强是表示声波强度的物理量，记作 I．由于声强 I 的变化范围非常大，为方便起见，引入声强级的概念，规定声强级 $L=\lg\frac{I}{I_0}$，其中 $I_0=10^{-20}W/m^2$，声强级的单位是贝尔，$\frac{1}{10}$ 贝尔又称为1分贝．生活在30分贝左右的安静环境有利于人的睡眠，而长期生活在90分贝以上的噪音环境中会严重影响人的健康．根据所给信息，可得90分贝声强级的声强是30分贝声强级的声强的（　　）

A．3倍　　B．10^3倍　　C．10^6倍　　D．10^9倍

【答案】C

8. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，且 $f(1)=-1$．则"$x>-1$"是"$|xf(x)|<1$"的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】B

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得3分．

9. 已知 $a>b>0,c\in\mathbf{R}$，则下列不等式中正确的有（　　）

A．$a^2>b^2$　　B．$ac^2\geqslant bc^2$

C．$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　D．$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a+b}$

【答案】ABD

10. i是虚数单位，下列说法中正确的有（　　）

A．若复数 z 满足 $z\cdot\bar{z}=0$，则 $z=0$

B．若复数 z_1,z_2 满足 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，则 $z_1z_2=0$

C．若复数 $z=a+ai(a\in R)$，则 z 可能是纯虚数

D．若复数 z 满足 $z^2=3+4i$，则 z 对应的点在第一象限或第三象限

【答案】AD

11. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d\neq0$，前 n 项和为 S_n，若 $S_6=S_{12}$，则下列结论中正确的有（　　）

A．$a_1:d=-17:2$　　B．$S_{18}=0$

C．当 $d>0$ 时，$a_6+a_{14}>0$　　D．当 $d<0$ 时，$|a_6|>|a_{14}|$

【答案】ABC

12. 对于定义域为 D 的函数 $f(x)$，若存在区间 $[m,n]\subseteq D$ 满足：① $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上是单调函数，②当 $x\in[m,n]$ 时，函数 $f(x)$ 的值域也是 $[m,n]$，则称 $[m,n]$ 为函数 $f(x)$ 的"不动区间"．则下列函数中存在"不动区间"的有（　　）

A．$f(x)=-2x$　　B．$f(x)=\frac{2}{x}+1$

C. $f(x)=x^2+2x$　　　　　　D. $f(x)=3^x-2$

【答案】CD

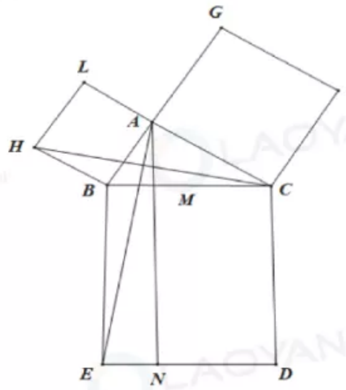
三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 平面内，不共线的向量a,b满足$|a+b|=|2a-b|$，且$|a|=|a-2b|$，则a,b的夹角的余弦值为______.

【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

14. 函数$y=x+b$的图象与函数$y=2x^{\frac{1}{2}}$的图象有且仅有一个公共点，则实数b的取值范围为______.

【答案】$(-\infty,0)\cup\{1\}$



15. 欧几里得在《几何原本》中，以基本定义、公设和公理作为全书推理的出发点．其中第I卷命题47是著名的毕达哥拉斯定理(勾股定理)，书中给出了一种证明思路：如图，$RT\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，四边形$ABHL$、$ACFG$、$BCDE$都是正方形，$AN\perp DE$于点N，交BC于点M．先证$\triangle ABE$与$\triangle HBC$全等，继而得到矩形$BENM$与正方形$ABHL$面积相等；同理可得到矩形$CDNM$与正方形$ACFG$面积相等；进一步定理可得证．在该图中，若$\tan\angle BAE=\frac{1}{3}$，则$\sin\angle BAE=$______.

【答案】$\frac{\sqrt{2}}{10}$

16. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{2}$，且对任意正整数$m,n,m>n$都有等式$2a_ma_n=a_{m+n}+a_{m-n}$成立，那么$a_{2020}=$______.

【答案】$-\frac{1}{2}$

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)

在①$bc=4$，②$a\cos B=1$，③$\sin A=2\sin B$这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求C的值；若问题中的三角形不存在，说明理由.

问题：是否存在$\triangle ABC$，它的内角A,B,C的对边分别a,b,c，且$b\cos C=1$，$c\sin A=2\sin C$，______.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

解：③；$c\sin A=2\sin C$，由正弦定理得：$ac=2c$，又$c>0$，故$a=2$

$\sin A=2\sin B$,由正弦定理得:$a=2b$,故$b=1$

又$b\cos C=1$,则$\cos C=1$,又C为$\triangle ABC$内角,不存在这样的角C

故该三角形不存在.

18. (12 分)

已知平面向量a是单位向量,向量$b=(1,\sqrt{3})$.

(1)若$a\,/\!/\,b$,求a的坐标;

(2)若$(a-b)\perp a$,求a的坐标.

解:(1) 因为$\vec{a}/\!/\vec{b}$,故可设$\vec{a}=\lambda\vec{b}=(\lambda,\sqrt{3}\lambda)$

又$\vec{a}$为单位向量,故:$\lambda^2+3\lambda^2=1$,得:$\lambda=\pm\dfrac{1}{2}$,故$\vec{a}=(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$或$\vec{a}=(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$;

(2) 设$\vec{a}=(x,y)$,则:$\vec{a}-\vec{b}=(x-1,y-\sqrt{3})$,由题意知:

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\x^2-x+y^2-\sqrt{3}y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\vec{a}=(1,0)\text{或}\vec{a}=(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}).$$

19. (12 分)

已知公差为整数的等差数列$\{a_n\}$满足$a_2a_3=15$,且$a_4=7$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n;

(2)求数列$\{a_n\cdot 3^n\}$的前n项和S_n.

解:(1) 设公差为d,$d\in Z$,由题意知:

$$\begin{cases}(a_1+d)(a_1+2d)=15\\a_1+3d=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}\Rightarrow a_n=a_1+(n-1)d=2n-1;$$

(2)$a_n\cdot 3^n=(n-1)\cdot 3^{n+1}-(n-2)\cdot 3^n$

故$S_n=0\cdot 3^2-(-1)\cdot 3^1+1\cdot 3^3-0\cdot 3^2+\cdots+(n-1)\cdot 3^{n+1}-(n-2)\cdot 3^n=(n-1)\cdot 3^{n+1}+3.$

20. (12 分)

已知函数$f(x)=x+\dfrac{a}{e^x}$,其中$a\in\mathbf{R}$,e是自然对数的底数.

(1)当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 的零点个数；

(2)若 $f(x)<\frac{e^{x}}{2}$ 对任意 $x\in[-1,+\infty)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

解：(1) $f(x)=x-e^{-x}$，$x\geqslant 0$，$f'(x)=1+e^{-x}>0$

故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 递增，又 $f(0)=-1$，$f(1)=1-e^{-1}>0$

$f(0)f(1)<0$，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上存在唯一零点

因此 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 的零点个数是1个；

(2) $\forall x\geqslant -1$，$x+ae^{-x}<\frac{e^{x}}{2}$ 恒成立，即 $\forall x\geqslant -1$，$a<\frac{e^{2x}}{2}-xe^{x}$ 恒成立

令 $g(x)=\frac{e^{2x}}{2}-xe^{x}$，$x\geqslant -1$，则 $a<g(x)_{\min}$

$g'(x)=(e^{x}-x-1)e^{x}$，令 $h(x)=e^{x}-x-1$，$x\geqslant -1$

$h'(x)=e^{x}-1$，$x\in[-1,0)$ 时，$h'(x)<0$，$x>0$ 时，$h'(x)>0$

故 $h(x)$ 在 $[-1,0)$ 递减，$(0,+\infty)$ 递增，因此 $h(x)\geqslant h(0)=0$

所以，$g'(x)\geqslant 0$，故 $g(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 递增

故 $g(x)_{\min}=g(-1)=\frac{e^{-2}+2e^{-1}}{2}$，因此 $a<\frac{e^{-2}+2e^{-1}}{2}$.

21．(12 分)

已知集合 $A=\{x|x=2n-1,n\in\mathbf{N}^{*}\}$，$B=\{x|x=2^{n},n\in\mathbf{N}^{*}\}$，将 $A\cup B$ 中的所有元素按从小到大的顺序排列构成数列 $\{a_n\}$，设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

(1)求 S_7 的值；

(2)若 $a_m=2^{k}$(其中 $k\in\mathbf{N}^{*}$)，试用 k 表示 m 和 S_m；

(3)求使得 $S_n\leqslant 2020$ 成立的最大的 n 的值，并求此时的 S_n 的值.

由条件可知：$S_7=1+2+3+4+5+7+8=30$；

由 $S_n=\{1,2^{1},3,2^{2},5,7,2^{3},9,11,13,15,2^{4}\cdots\}\Rightarrow 2^{k}$ 为此数列的第 $2^{k-1}+k$ 项，

故 $m=2^{k-1}+k$

设 $a_n=2^{m}$，则 $S_n=[(2\times1-1)+(2\times2-1)+\cdots+(2\cdot 2^{k-1}-1)]+[2+2^{2}+\cdots+2^{k}]$

$=\frac{2^{m-1}(1+2\times 2^{m-1}-1)}{2}+\frac{2(1-2^{m})}{1-2}=2^{2m-2}+2^{m+1}-2$

(3) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项依次为：$1, 2, 3, 2^2, 5, 7, 2^3$，…….

利用列举法可得：当 $n=49$ 时，$A\cup B$ 中的所有元素从小到大依次排列，构成一个数列 $\{a_n\}$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的前 49 项分别 1，3，5，7，9，11，13，15，17，19，21，23，25，

…，69，2，4，8，16，32，64…

$$S_n=\frac{43(43-1)}{2}\times 2+\frac{2(2^6-1)}{2-1}=1849+2^7-2=1975<2020$$

当 $n=50$ 时，$P\cup Q$ 中的所有元素从小到大依次排列，构成一个数列 $\{a_n\}$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的前 36 项分别 1，3，5，7，9，11，13，15，17，19，21，23，25，

…，71，2，4，8，16，32，64…

$$S_n=\frac{44(44-1)}{2}\times 2+\frac{2(2^6-1)}{2-1}>2020$$

所以 n 的最大值 49，故 $S_{49}=1975$.

22．(12 分)

已知函数 $f(x)=ax^2-(4a+1)x+9a+2\ln x$,其中 $a>0$.

(1)若 $a=\frac{1}{2}$,求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) e 是自然对数的底数，若对任意的 $b>4$，当 $x\in(\frac{1}{\mathrm{e}},b]$ 时，$f(x)\leqslant f(b)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

(1)解：$a=\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{9}{2}+2\ln x\Rightarrow f'(x)=x-3+\frac{2}{x}=\frac{x^2-3x+2}{x}=\frac{(x-1)(x-2)}{x}$

令 $f'(x)>0\Rightarrow 0<x<1$ 或 $x>2\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(2,+\infty)$ 上递增；

$f'(x)<0\Rightarrow 1<x<2\Rightarrow f(x)$ 在 $(1,2)$ 上递减.

综上：若 $a=\frac{1}{2}$，$f(x)$ 的增区间为 $(0,1)$ 和 $(2,+\infty)$；减区间为 $(1,2)$.

$f(x)=ax^2-(4a+1)x+9a+2\ln x\Rightarrow f'(x)=2ax-(4a+1)+\frac{2}{x}=\frac{2ax^2-(4a+1)x+2}{x}\Rightarrow$

$f'(x)=\frac{(2ax-1)(x-2)}{x}$

①当 $a=\frac{1}{4}$ 时，此时 $f'(x)\geqslant 0\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，此时满足条件；

②当 $0<a<\frac{1}{4}$ 时，此时 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},2\right)$，$\left(\frac{1}{2a},+\infty\right)$ 上递增；$\left(2,\frac{1}{2a}\right)$ 上递减，若对于任意的 $b>4$，当 $x\in\left(\frac{1}{e},b\right]$ 时，$f(x)\leqslant f(b)$ 恒成立，则有：$\begin{cases}\frac{1}{2a}<4\\ f(4)\geqslant f(2)\end{cases}\Rightarrow\frac{1-\ln2}{2}\leqslant a<\frac{1}{4}$

③当 $a>\frac{1}{4}$ 时，此时 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2a}\right)$ 和 $(2,+\infty)$ 上递增；$\left(\frac{1}{2a},2\right)$ 上递减；

1°当 $\frac{1}{2a}\geqslant\frac{1}{e}\Rightarrow\frac{1}{4}<a\leqslant\frac{e}{2}$ 时，此时需满足：$f\left(\frac{1}{2a}\right)\leqslant f(4)$

2°当 $\frac{1}{2a}<\frac{1}{e}\Rightarrow a>\frac{e}{2}$ 时，此时需满足：$f\left(\frac{1}{e}\right)\leqslant f(b)$

且 $f\left(\frac{1}{2a}\right)\geqslant f\left(\frac{1}{e}\right)$

综合1°、2°此时只需满足 $a>\frac{1}{4}$，$f\left(\frac{1}{2a}\right)\leqslant f(4)$ 即可

$f\left(\frac{1}{2a}\right)\leqslant f(4)\Rightarrow\frac{9a}{4}+2\ln4-4-2\ln\frac{1}{2a}\geqslant 0$，令 $g(a)=\frac{9a}{4}+2\ln4-4-2\ln\frac{1}{2a}$

$\Rightarrow g'(a)=\frac{9a}{4}+2\ln4-4-2\ln\frac{1}{2a}=\frac{9}{4}+\frac{2}{a}>0$

$\Rightarrow g(a)$ 在 $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$ 上递增 $\Rightarrow g(a)>g\left(\frac{1}{4}\right)>0$

$\Rightarrow a\in\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$，$f\left(\frac{1}{2a}\right)\leqslant f(4)$ 恒成立

综上：$a\geqslant\frac{1-\ln2}{2}$