解题教学与教师发展

陕西师范大学数学系　罗增儒

邮编：710062　电话：13609297766

E-mail：zrluo@snnu.edu.cn

对于数学教师来说，再也没有比“数学题”（详称数学问题、简称题）更熟悉的专业词汇了，再也没有比“数学解题”更频繁、更平常的教学活动了，但是，“什么叫题？什么叫解题？怎样进行解题教学？”我们都能说清楚、讲明白并给学生做到位吗？说来见笑，我确实曾经想了好多年没有想清楚，确实曾经担忧会面临这样的尴尬：解了一辈子题说不清“什么叫解题”，教了一辈子书说不清“什么叫解题教学”．于是，笔者思考、实践、并最终写出了“数学解题学”的书，但是，个人的解题思考（包括今天的发言）“与其说是记录了一些研究的成果，不如说是提出了一些思考的课题”，我告诫自己：“叙述是商讨性的、名词是描述性的，画一个问号作为丑陋的开头，把完善、完整、完美的句号留给读者”（《数学解题学引论》前言）．下面将从实践与理论的结合上、探讨数学解题的两个基本问题：

●数学解题的基本认识：什么叫题？什么叫解题？

●数学解题的基本过程：理解题意，思路探求，书写表达，回顾反思（涉及怎样学会解题）．

1　数学解题的初步理解

1-1　什么叫数学题

给数学题作出严格定义是一件困难的事情，我们就把数学上回答起来有困难、需要解决的事情作为数学题的宽松界定．

（1）界定．数学题（简称题）是指数学上要求回答或解释的事情，需要研究或解决的矛盾．

（2）解释．对数学家而言，仅当命题的真假未被判定时才成为问题，如“哥德巴赫猜想”，而一旦解决了就称为“定理”(公式)，不成为问题了；这更多地体现了“需要研究或解决的矛盾”．在数学教学中，则把结论已知的事情也称为题，因为它对学生而言，与数学家所面临的问题，情景是相似的、性质是相同的，这时候的数学题是指：为了实现教学目标而要求师生们解答的事情，重点在“要求回答或解释的事情”上．

（3）基本要素．数学题的标准形式包括两个最基本的要素：条件（已知，前提），结论（未知、求解，求证，求作等）．条件是问题解决的起点，结论是问题解决的目标，问题的关键在于，达到目标相对于问题解决者来说存在一定的障碍．因此，问题具有目标性，障碍性和相对性，问题的实质是：从初始状态到目标状态之间的障碍，由现有水平到客观需要之间的矛盾．

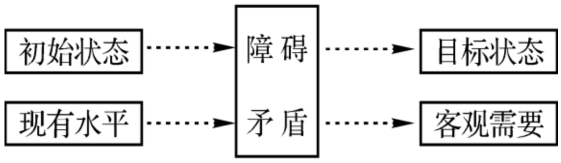


图 1

（4）特别提示．有人认为，概念课、定理课的前半部分是讲概念、证定理，后半部分做的才是题，其实，如何构建概念、如何论证定理也是题！

案例 1　构建概念的例子．比如，如何构造有序实数对与平面上点的对应，从而建立起坐标系的概念，就是一道题，构建出坐标系就是解了一道题，并且构建的方法可以不唯一．更重要的是，通过坐标系“有序实数对”与“平面上点”在数学上“合而为一”了．

又如，怎样描述“直线很直、平面很平”就是一道题，数学家构建出“直线公理”、“平面公理”就是解题．“直线公理”：经过两点有且只有一条直线（两点确定一条直线），正是直线本质特征的一个刻画．试想，如果“直线”不是很直很直的，那经过两点就可以连出很多很多曲线；同样，如果“直线”不是两端可以无穷延伸的，那经过两点的线段就可以延伸出长短不一的很多很多直线．所以，“经过两点有且只有一条直线”表明：直线是由无穷个点组成的一个连续图形，两端可以无穷延伸，很直很直．同样，高中的平面公理是平面本质特征的一个刻画．平面可以无穷延伸，很平很平等不能严格定义，但用公理能刻画出来，试想，如果“平

面”不是无穷延伸的，那么有一个公共点的两个平面就可能只有一个公共点或延伸出有限的公共线、公共区域；如果“平面”不是很平很平的，那么即使无穷延伸也有可能得出公共曲线．同样，如果“平面”不是很平很平的，那么由于直线很直，即使直线有两个点在平面上，也不能保证整条直线都在平面上．所以，平面公理表明：平面可以无穷延伸，很平很平．

案例 2　教材的例子．“三垂线定理”“积与和差互化公式”，“课改”被删去了，有的新教材将其编作习题例题、，在这里，题与定理、定理与题并无严格的界线．同样，二次方程根与系数的关系，原先的教材是作为定理来学习的（韦达定理），“课改”被删去了，修订“课标”时又恢复了定理的“身份”，在这里，题与定理、定理与题并无严格的界线．

案例 3　方法教学的例子．作为连续函数的应用高中介绍了二分法，在教学中常见教师创设“猜价格游戏”的生活情景来引进，但学生没有见到“连续函数 $f(x)$”，没有见到“方程 $f(x)=0$”和它的解，如何由“猜价格游戏”提炼出连续函数和它的应用——二分法？就是一道题．下来，设商品的价格为 c 元，它在 a 元与 b 元之间（$a<c<b$），人猜的价格为 x 元，得函数 $f(x)=x-c$（连续函数可以不唯一），定义域为 $[a,b]$，并且 $f(a)<0, f(b)>0$，“人猜对”时就对应着方程 $f(x)=0$ 的解．下来，取中点 $\frac{a+b}{2}$，若猜得高了，表明 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$，则在区间

$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$上再取中点；若猜得低了，表明$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$，则在区间$\left[\frac{a+b}{2},b\right]$上再取中点．余此类推，区间长度越来越短，也就是猜的价格越来越接近真实价格，每次所猜的“中点价格”其实就是方程$f(x)=0$解的一个近似值，猜对时就是方程$f(x)=0$的准确解．于是，我们可以用不断取中点的方法来求方程$f(x)=0$的近似解——“二分法”水到渠成．学生在这个数学活动中，学到了“二分法”，看到了连续函数的应用，感悟了“函数与方程的数学思想”“近似逼近的数学思想”“数形结合的数学思想”“特殊与一般的数学思想”“程序化地处理问题的算法思想”等，经历了数学化（去情景化）的提炼过程，就是在学习解题，就是解了一道数学题，就是在通过学习数学去学会思维．

在这里，如何由生活化情景提炼数学结论是一道题，提炼出“数学结论”就是解了一道题，并且“情景”及其提炼的途径都可以不唯一．

案例 4　构建学科新结构的例子．在微积分教学中，极限定义的$\varepsilon-$语言是个难点,如何给出一个非$\varepsilon-$语言的极限定义？这就是一道题，张景中院士给出了“极限概念的非$\varepsilon-$语言定义法”就是解了一道题，并且，张院士由此构建出学科的一种新结构：新概念微积分．

案例 5　直观猜想$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots$趋向于多少？（合情

推理也是题）

讲解 这应该是高中甚至大学生思考的问题吧？其实是我对“华罗庚金杯赛”小选手的训练题，大家听完我数形结合的演示之后，一定会对自己充满信心.

（1）（直观、具体的演示）如图 2，取1×3的矩形，将其三等分，每个小矩形的面积为 1，左右各放一等分，留下中间的小矩形（实现求和的第 1 项）；将中间小矩形三等分，左右各放一等分，留下中间的小矩形（实现求和的第 2 项）；……如此类推，则中间留下的部分面积趋于 0，而左右两边小矩形面积之和趋于$\frac{3}{2}$.

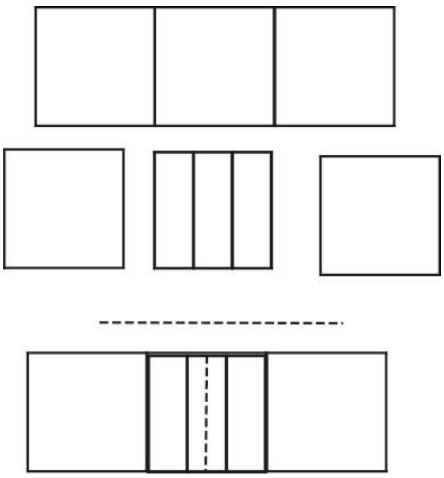


图 2

（2）（半直观、半具体的演示）如图 3， 取一条长度为 3 的线段，将其三等分，左右各放一等分（实现求和的第 1 项）；，留下中间的长度为 1 的小线段；将中间的小线段三等分，左右各放一等分（实现求和的第 2 项），留下中间的小线段；……如此类推，则中间留下的的小线段越来越短、无

限接近于 0，而左右两边的小线段长度之和趋于 3，于是，左边的小线段长度之等于右边的小线段长度之和、都趋于$\frac{3}{2}$.

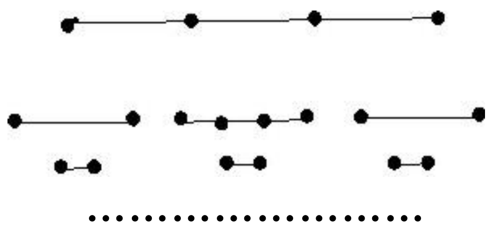
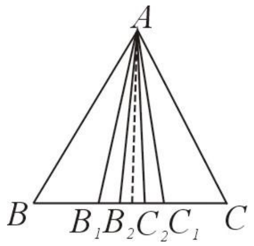


图 3

（3）（应用演示）自己在找.（三角形或梯形）



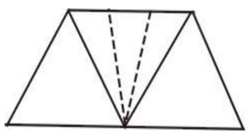


图 4

（4）（推广） 请猜一猜：$1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\cdots$，和会是多少？

讲解　取一条n长线段，将其n等分，把$n-1$等份分别给$n-1$个同学$A_1,A_2,\cdots\cdots A_{n-1}$（实现求和的第 1 项），留下 1 等份；将留下的小线段n等分，把$n-1$等份分别给$n-1$个同学$A_1,A_2,\cdots\cdots A_{n-1}$（实现求和的第 2 项），留下 1 等份；……如此类推，则留下的小线段越来越短、无限接近于 0，而$n-1$个同学$A_1,A_2,\cdots\cdots A_{n-1}$的小线段之和越来越长、无限接近于$n$. 于是，每个同学的小线段之和趋于$\frac{n}{n-1}$.

（5）（演算）设

$$x=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots,$$

则
$$3x=3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots=3+x,$$
得
$$x=\frac{3}{2}.$$

一般地，设
$$x=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\cdots,（n\text{为正整数}，\ n\geq 2）$$
则
$$nx=n+1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\cdots=n+x,$$
得
$$x=\frac{n}{n-1}.$$

可能有人会质疑，低年级考试不可能考微积分，给低年级同学渗透微积分有什么用？我的看法是：

（1）提高数学素养．促进学习、评价学习需要考试，但学习并不只是为了考试；学习数学的一个重要目的是提高数学素养，通过数学学会思维．

（2）有助于直观想象能力的培养．上述演示，借助图形感知事物的形态与变化，有助于理解和解决数学问题，有助于渗透辩证思维（如数与形，特殊与一般，有限与无限，量变与质变等），有助于直观想象能力的培养，有助于核心数学素养的丰富．也许，短时间内数学素养的效果不是很明显，但是，随着学习的深入，数学视野、洞察能力、发现水平等都会表现出差异、区分出高低优劣来．

这样的教学体现创造性.（芝诺悖论低年级也能化解）

（罗增儒．无穷过程$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}=\frac{1}{n-1}\left(n\geq 2,n\in N_+\right)$的直观演示[J]．中学数学研究（南昌）．2012，2）

1-2　什么叫数学解题

（1）界定．解题就是“解决问题”，即求出数学题的答案．这个答案在数学上也叫做“解”，所以，解题就是找出题的解的活动．小至一个学生算出作业的答案，一个教师讲完概念的构建与定理的证明，大至一个数学课题得出肯定或否定的结论，一个数学技术应用于实际、构建出适当的模型等，都叫做解题．“如何给出一个非$\varepsilon-$语言极限的定义”这是一个题，张景中院士给出了“极限概念的非$\varepsilon-$语言定义法”就是解了一个题．（如上所说，我们认为“概念的构建、定理的发现与证明”等都是在解题）

这种界定很好理解，但只是对解题作了形式上的描述，而对数学解题的实际过程或思维实质缺少揭示（背熟了也不会解题）．出于对解题的过程与性质的不同认识，人们还对解题谈了很多更具实质性的看法，如解题推理论、解题化归论、、解题化简论、解题信息论、解题层次论、解题差异论、解题系统论、解题坐标系等．

（2）解释．常规的数学题包括两个要素：条件与结论．解题就是沟通条件与结论之间的联系（论证），又包括解和解题依据（论据），因此解题一共有 4 个要素：①条件，②结论，③解（沟通条件与结论的联系），④解题依据．

1-3　数学解题教学

作为数学教育的解题与数学家的解题是既有联系又有

区别的，为了更好理解这里面的关系，我们首先来说明数学家解题与教学解题的不同，然后，指出解题教学是解题活动的教学.

（1）数学解题教学的初步认识

美国数学家哈尔莫斯认为："数学家存在的主要理由就是解问题""数学的真正的组成部分是问题和解". 对于职业数学工作者来说，"题"是研究的对象，"解"是研究的目标，解题是其数学活动的基本形式和主要内容，解题也是他的存在目的和兴奋中心. 而对数学教学而言，并不是要把所有的学生都培养成职业数学工作者，更多的人是通过数学内容的学习、数学推理的训练、数学精神的陶冶、数学文化的脯育，开发智力、促进发展（通过数学学会思维）. 因而数学教育中的数学解题不仅具有"数学性质"（与职业数学工作者有联系），而且具有"教育性质"（与职业数学工作者有区别）：

①数学家解客观上结论未知的题，解题教学解客观上结论已知、而学生主观上未知的题.

②数学家解题是发现和创造的过程，解题教学是师生再发现与再创造的过程.

③数学家把"题"作为研究的对象，把"解"作为研究的目标，而解题教学不仅要把"题"作为研究的对象，把"解"作为研究的目标，而且要把"解题活动"作为对象，把学会"数学地思维"、促进"人的发展"作为目标.

所以，解题教学的基本含义是，通过典型数学题的学习，去探究数学问题解决的基本规律，学会像数学家那样“数学地思维”.

在数学解题研究中，教师研究的内容和方法（包括一题多解）不应该受到任何人为的限制，但教师研究的成果哪些能用到课堂、如何进入课堂等都要受到课程标准、学生水平等因素的制约．不能“懂什么就教什么”，也不能“教什么就懂什么”，应该是“懂什么远大于教什么”.

（2）解题教学是解题活动的教学

我们认为“解题教学是解题活动的教学”，它至少有三方面的含义：

①解题活动是一种思维活动.

思维活动既有过程又有结果，思路探求主要反映思维活动的过程，解题答案主要反映思维活动的结果（同时，也会是认识深层结构的中间过程），而获得答案的实质是发现与发明的过程.

②解题教学不仅要教解题活动的结果（答案），而且要呈现解题活动的必要过程——暴露数学解题的思维活动.

没有过程的结果是现成事实的外在灌输，没有结果的过程是学习时间的奢侈消费，解题教学不仅要获得答案，而且要从获得答案的过程中学会怎样解题，把过程与结果结合起来.（满足于仅仅获得答案意味着理解的死亡）

③暴露数学解题的思维活动有两个关键过程.

其一是“从没有思路到获得初步思路”的认知过程（我们叫做第一过程的暴露），其二是对初步思路反思的元认知过程（我们叫做第二过程的暴露），解题教学不仅要有第一过程的暴露（已引起重视），而且还要有第二过程的暴露（想知道很多又有很多不知道）.

但是，数学解题的思维过程到底是什么样的呢？目前还没有统一的理论认识，因而也就没有明确的实践指南，这直接导致了三个后果：

●很多愿意暴露数学解题思维过程的老师常常面临“不知暴露什么”或“不知如何暴露”的尴尬.

●更多教师的解题教学停留在“题目这样解”的层面，更多学生的解题学习停留在“记忆模仿、变式练习”的阶段上；我们说，没有理解的练习是傻练、越练越傻，没有练习的理解是空想、越想越空..

●以解题为载体的数学考试常有大量数学不及格的学生（产生差生，或称为慢生、后进生、困难生、潜能生、希望生），数学教师付出最多、收效最低.

可喜的是，人们已经对数学解题的思维过程提出了很多看法（如上面提到的解题推理论、解题化归论、解题化简论、解题信息论、解题层次论、解题差异论、解题系统论、解题坐标系等），百花齐放的解题观点其实就是人们对数学解题

思维过程的努力描述.

2　怎样解题的基本过程

我们把寻找习题解答的活动叫做**解题过程**.解题过程不仅仅是“书写表达”，它应该包括从拿到题目到完全解出的所有环节或每一步骤，通常有四个基本的阶段（看题、想题、写题、回题）：理解题意、思路探求、书写表达、回顾反思. 科学把握好这四个阶段是一种良好的解题习惯.

应该说，大家对这个自然的过程并不陌生，问题在于，能不能够给学生说清楚、讲明白、做到位. 比如：

大家都知道解题的首要前提是审题，但审题“审什么、怎么审”能够给学生说清楚、讲明白、做到位吗？

大家都知道解题的思维核心是思路探求，但探求“探什么、怎么探”能够给学生说清楚、讲明白、做到位吗？

大家都知道解题的最终呈现是书写，但书写“写什么、怎么写”能够给学生说清楚、讲明白、做到位吗？

大家都知道学会解题的好途径是反思，但反思“思什么、怎么思”能够给学生说清楚、讲明白、做到位吗？

2-1　理解题意

（1）理解题意的基本含义.

理解题意也叫做审题，主要是弄清题目已经告诉了你什么，又需要你去做什么，从题目本身获取“怎样解这道题”

的逻辑起点、推理目标、及沟通起点与目标之间联系的更多信息.（好比妈妈叫买东西、或你去买车票）

题目本身是“怎样解这道题”的钥匙．只不过其中的积极提示往往是通过语言文字、公式符号以及它们之间的联系间接地告诉我们．所以，审题一定要逐字逐句看清楚，力求从语法结构、逻辑关系、数学含义、答题形式、数据要求等各方面真正看懂题意．

“成在审题，败在审题”，弄清题意等于解决了问题的一半，考试中“会而不对、对而不全”，究其原因多在于未审清或审不清题意．审题要特别抓好“审什么”的三个要点和“怎么审”的四个步骤.（对学生可只说前两要点前三步）

（2）审题审什么？

抓好审题审什么的三个要点：

①**要点 1**：弄清题目的条件是什么，一共有几个，其数学含义如何.

●首先，条件包括明显写出的和隐蔽地给予的，弄清条件就是要把它们都尽量找出来；

●其次（更重要的），是弄清条件的数学含义，即看清楚条件所表达的到底是哪些数学概念、哪些数学关系.

●有时，还要排除无关信息与干扰信息.

题目的条件告诉我们从何处下手、预示“可知”并启发解题手段，弄清了条件就等于弄清了行动的起点、也准备好

了行进中的加油站.

②**要点 2：**弄清题目的结论是什么，一共有几个，其数学含义如何.

●题目的结论有的是明显给出的，如“求证”题，关键是要弄清结论到底与哪个数学关系、哪个数学概念有关；

●有的题目结论是要我们去寻找的，如“求解”题、探索题等，这时的弄清结论，就是要弄清“求解”（探索）的性质或范围，它们与哪些数学关系、哪些数学概念有关，以明确推理或演算的方向.

题目的结论告诉我们向何方前进、预告“需知”并引导解题方向.弄清了结论就等于弄清了行动的目标、也随身带上了纠正偏差的指南针.

③**要点 3：**弄清题目的条件和结论有哪些数学联系，是一种什么样的结构.

●即在弄清条件的数学含义、结论的数学含义的基础上，继续弄清条件知识与结论知识之间存在哪些数学联系，这些联系就表现为题目的结构（题型）.

●为了更接近问题的深层结构，审题不仅开始于解题工作的第一步，而且贯穿于探求的过程与结果的反思.应该是循环往复、不断深化的过程.

（3）审题怎么审？

抓好审题怎么审的四个步骤.

①**步骤 1**：读题——弄清字面含义.

审题首先要逐字逐句读懂题目说了什么（字读、句读、段读），按每分钟阅读 300 ~ 400 个印刷符号的速度计算，通常读完一道题用不了一分钟，但未必读懂了，因而，还应该

●从语法结构、逻辑关系上作出分析，真正弄清哪些是条件，哪些是结论，各有几个，这是读题最实质性的工作.

●从题型特点、答题形式、数据要求上明确题目的技术性细节，比如在考试中，有的题目要求保留小数点几位等等，如果不按这些要求来，解答就会被认为不完整（存在扣分的危险），虽然有的同学并非不会做（会而对不、对而不全）.

②**步骤 2**：理解——弄清数学含义.

看懂题目的字面含义还不能算真正审清题意，它只是为实质性的数学理解扫清了语言障碍，关键是要能进行文字语言、符号语言、形象语言、表格语言之间的转化，从题目的叙述中获取数学“符号信息”，从题目的图形中获取数学“形象信息”，弄清题目的数学含义．这当中，我们常常要“回到定义”、激活相关的数学知识，常常要辅以图形或记号、使条件和结论都数学化，并被我们所理解．比如

●题目的条件（或结论）说了抛物线，抛物线能加吗？能减吗？能乘吗？能除吗？能运算吗？能推理吗？有困难！所以，立即想抛物线的定义，想抛物线的表达式（符号语言）和图形（形象语言），初中的表达式是 $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$，图

像是一条类似抛体运动路径的曲线（表象）；高中的表达式是 $y^2=\pm 2px$（或 $x^2=\pm 2py$），曲线是到定点与到定直线距离相等的点的轨迹（本质）．初中的抛物线 $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ 一旦写出，等于设出了 5 个字母和它们之间的等量关系，有助于运算或推理的展开（确定抛物线就是确定 3 个字母 a,b,c）．高中的抛物线 $y^2=\pm 2px$（或 $x^2=\pm 2py$）一旦写出，等于设出了 3 个字母和它们之间的等量关系，有助于运算或推理的展开（确定抛物线就是确定 1 个字母 p）．

●题目的条件（或结论）说了“a,b,c 成等差数列”，等差数列能加吗？能减吗？能乘吗？能除吗？能运算吗？能推理吗？有困难！所以，立即想等差数列的定义，等差数列的表达式（符号语言）和相应的一次函数（形象语言）．“a,b,c 成等差数列”可以是：$a-b=b-c$，$2b=a+c$，$a-2b+c=0$（直线 $ax+by+c=0$ 过定点 $\left(1,-2\right)$），$\begin{cases}b=a+d,\\c=a+2d,\end{cases}$ $\begin{cases}a=b+d,\\c=b-d,\end{cases}$ $\left(1,a\right),\left(2,b\right),\left(3,c\right)$ 三点共线等，这就有助于运算或推理的展开了．

●题目的条件（或结论）说了“三角形”，三角形能加吗？能减吗？能乘吗？能除吗？能运算吗？好推理吗？有困难！所以，立即想三角形的代数表达：三角形的向量式 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$，三角形的正弦定理 $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$，三角形的余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$，$b^2=a^2+c^2-2bc\cos\beta$，$c^2=a^2+b^2-2bc\cos\gamma$ 等，这就有助于运算或推理的展开了．

●题目的条件（或结论）说了“二次方程有实根”，它的数学含义是什么？可以是等式，存在x_0使$ax_0{}^2+bx_0+c=0$；也可以是不等式$b^2-4ac\geq 0$；还可以从知识链上展开，是：

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a},\end{cases}$$

$$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$$

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

……

● “$f(x)$是单调函数”的数学含义是什么？

●“点在椭圆上”的数学含义是什么？

③**步骤3**：表征——识别题目类型.

我把信息在大脑的呈现叫做表征．弄清条件、弄清结论的同时，条件与结论之间的关系会在头脑呈现，这种呈现不仅会激活相关的数学知识，而且也会调动相关的解题经验．对于大量的常规题来说，条件与结论之间的关系结构是记忆储存所现成的——每人的头脑里都或多或少、或优或劣储存有基本模式与经典题型，题意弄清楚了，题型就得以识别，提取该题型的相应方法即可解决（叫做模式识别）．即使是新的“陌生情景”，我们也有了解决它的逻辑起点与推理目标，继而可以用差异分析、以退求进、区分情况、层次

解决、正难则逆、以及自始至终的数形结合等措施，进入下一阶段——思路探求．

④**步骤 4：**深化——接近深层结构．

简单题一旦弄清题意，题型就得以识别，思路随之打通，但有时认识是浅层的．对于变通过的、“形似而质异”的、或综合性较强的题目，则还要不停顿地“弄清问题”．因而，“弄清题意”的工作在“识别题目类型”之后还结束不了，主要表现在两个方面：

●其一是在思路探求中，还有一个继续弄清题意的过程，否则会思路受挫、思维走偏；

●其二是在思路业已打通、解法初步得出时，仍有一个回顾反思、再认识的过程，即更本质的“弄清问题”、努力接近问题的深层结构．

经验表明，凡是题目未明显写出的，一定是隐蔽地给予的，只有细致地审题才能从题目本身获得尽可能多的信息，这一步不要怕“慢”．

题目的条件和结论是“怎样解这道题”的两个信息源，审题的实质是从题目本身去获取从何处下手、向何方前进的信息与启示．

注意：这些要点，叙述时是分解动作，真正解题时是连续进行、一气呵成的．（对学生可只说前两要点、前三步）

练习 1：请思考下面各题中条件是什么、结论是什么．

例 1　（2012 年数学高考江苏卷第 10 题，5 分）设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的函数，在区间 $[-1,1]$ 上，$f(x)=\begin{cases} ax+1, & -1\leqslant x<0, \\ \dfrac{bx+2}{x+1}, & 0\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$ 其中 $a,b\in\mathbf{R}$．若 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$，则 $a+3b$ 的值为__．

讲解　条件是什么？是三个条件吗？

条件 1：函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2；

条件 2：在区间 $[-1,1]$ 上，函数分段定义 $f(x)=\begin{cases} ax+1, & -1\leqslant x<0, \\ \dfrac{bx+2}{x+1}, & 0\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$ 其中 $a,b\in\mathbf{R}$；

条件 3：$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$．

是三个条件吗？如果三个条件能得出 $a+3b$ 的倍数，那 $a+3b$ 就得出了；如果不能，就不得不求出 a,b，需再得出关于 a,b 的等式．试做一下，从有 a,b 等等量关系的条件入手：

由 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ 及 $T=2$，得 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，即

$$\frac{\frac{b}{2}+2}{\frac{1}{2}+1}=-\frac{a}{2}+1\Rightarrow 3a+2b=-2.$$

不能求出 $a+3b$ 的值！是题目不对还是方法有问题？

其实，条件 2 中有一个隐含条件 $f(-1)=f(1)$．

条件 4：$f(-1)=f(1)$，可得 $-a+1=\dfrac{b+2}{1+1}\Rightarrow 2a+b=0$．

解　因为 $T=2$，所以

$$f(-1)=f(1)\Rightarrow -a+1=\frac{b+2}{1+1}\Rightarrow 2a+b=0.$$

又由 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)$ 及 $T=2$，得 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$，即

$$\frac{\frac{b}{2}+2}{\frac{1}{2}+1}=-\frac{a}{2}+1\Rightarrow 3a+2b=-2.$$

联立 $\begin{cases}2a+b=0,\\3a+2b=-2,\end{cases}$ 解出 $\begin{cases}a=2,\\b=-4,\end{cases}$

得 $a+3b=2-12=-10$.

说明 也可以 $a+3b=5(3a+2b)-7(2a+b)=-10-0=-10$. 这里有方程观点：两个未知数，需要两个等量关系，从而引导我们去发掘隐含条件 $f(-1)=f(1)$.

例 2 已知 $mn\neq 0$，$n^2+4m>0$，又 $a\neq b$ 且

$$ma^2+na-1=0, \quad ①$$

$$mb^2+nb-1=0, \quad ②$$

试求过点 $A(a,a^2),B(b,b^2)$ 的一次函数解析式（用含 m,n 的式子表示）.

第一、题意的初步理解

“已知两点的坐标，求经过这两点的一次函数解析式”，是一道常规简单题，无非就是解二元一次方程组（初中就会了）. 但本题又给两点的坐标设置了关于 m,n 的条件，并要求一次函数解析式必须“用含 m,n 的式子表示”，这就给常规简单题增加了“综合性”，如何认识和化解新增加的“综合性”（题意），大家先做，然后我们来对照.

题目的条件是什么？结论是什么？

认识 1：题目的条件给出了关于四个字母m,n,a,b的 5 个条件$mn\neq 0$， $n^2+4m>0$， $a\neq b$及两个同形等式$ma^2+na-1=0$，$mb^2+nb-1=0$；

题目的结论是求过两点$A\left(a,a^2\right),B\left(b,b^2\right)$的一次函数解析式．这里，“一次函数解析式”是汉语，转化为数学语言是求等式$y=kx+h$中的两个字母k,h（用含m,n的式子表示）．

认识 2：题目有 3 个条件：

条件 1：给出四个字母m,n,a,b．

条件 2：四个字母m,n,a,b满足五个条件$mn\neq 0$， $n^2+4m>0$，$a\neq b$及并且a,b是二次方程$mx^2+nx-1=0$的两个实根（两个同形等式$ma^2+na-1=0$， $mb^2+nb-1=0$）．

条件 3：字母a,b又组成两个点$A\left(a,a^2\right),B\left(b,b^2\right)$．

题目的结论是求过两点$A\left(a,a^2\right),B\left(b,b^2\right)$的一次函数解析式，或是求等式$y=kx+h$中的两个字母$k,h$（用含$m,n$的式子表示）．

对于题目的多个条件，先用那个后用那个，那个条件与那个条件相配合，两个字母k,h是分别求还是同时求等都需要作通盘考虑．一个比较麻烦的想法是从已知两等式中解出a,b（用m,n表示a,b），再由A,B的坐标去求一次函数解析式$y=kx+h$（解法 1）；另一种较为自然的解法是用待定系数法分别求k,h（解法 2）．

解法 1　由①、②可解二次方程，分别得

$$a_{1,2}=\frac{-n\pm\sqrt{n^2+4m}}{2m}，\quad b_{1,2}=\frac{-n\pm\sqrt{n^2+4m}}{2m}，$$

由于$a\ne b$，所以，A,B的坐标恰好为上式中一个取正（负）号、另一个取负（正）号（这提示了什么信息？）.

$$\left(\frac{-n+\sqrt{n^2+4m}}{2m},\frac{n^2+2m-n\sqrt{n^2+4m}}{2m^2}\right),$$
$$\left(\frac{-n-\sqrt{n^2+4m}}{2m},\frac{n^2+2m+n\sqrt{n^2+4m}}{2m^2}\right).$$

设过A,B的一次函数解析式为$y=kx+h$，则有

$$\begin{cases} k\left(\dfrac{-n+\sqrt{n^2+4m}}{2m}\right)+h=\dfrac{n^2+2m-n\sqrt{n^2+4m}}{2m^2}, \\ k\left(\dfrac{-n-\sqrt{n^2+4m}}{2m}\right)+h=\dfrac{n^2+2m+n\sqrt{n^2+4m}}{2m^2}, \end{cases}$$

相减消去h，得

$$\frac{\sqrt{n^2+4m}}{m}k=\frac{-n\sqrt{n^2+4m}}{m^2},$$

有$k=-\dfrac{n}{m}$，从而

$$h=\frac{n^2+2m-n\sqrt{n^2+4m}}{2m^2}-k\left(\frac{-n+\sqrt{n^2+4m}}{2m}\right)$$
$$=\frac{n^2+2m-n\sqrt{n^2+4m}}{2m^2}+\frac{n}{m}\left(\frac{-n+\sqrt{n^2+4m}}{2m}\right)=\frac{1}{m}.$$

故所求的一次函数解析式为

$$y=-\frac{n}{m}x+\frac{1}{m}.$$

解法 1 的反思：这个解法的运算能力值得敬佩，但其麻烦需要简化．首先，分别求出A,B的坐标$a_{1,2},b_{1,2}$又讨论合并，有思维回路（其实，a,b是二次方程$mx^2+nx-1=0$的两个实根）；其次，求出A,B的坐标又在解方程中消去也是一个思维回路，

应该考虑这些回路是必要的还是多余的？（很少人这样解）

再次，理解上述求k,h的过程，其实是由

$$\begin{cases} ka+h=a^2, \\ kb+h=b^2, \end{cases}$$

相减，得 $$k=\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b,$$

从而 $$h=a^2-ka=a^2-(a+b)a=-ab$$

抓住这个实质步骤，立即可以将k,h表示为a,b之和与之积，然后将a,b之和、之积表示为m,n的代数式．故有

解法 2 设过A,B的一次函数解析式为$y=kx+h$，由于A,B在抛物线$y=x^2$上，消去y得a,b是二次方程

$$x^2-kx-h=0 \quad ③$$

的两个实根，由根与系数的关系，有（正是上面分析的）

$$\begin{cases} k=a+b, \\ h=-ab. \end{cases} \quad ④$$

但由已知两等式知，a,b是二次方程

$$mx^2+nx-1=0 \quad ⑤$$

的两个实根，又有

$$\begin{cases} a+b=-\dfrac{n}{m}, \\ ab=-\dfrac{1}{m}. \end{cases} \quad ⑥$$

所以，$k=-\dfrac{n}{m},h=\dfrac{1}{m}$，故所求的一次函数解析式为

$$y=-\frac{n}{m}x+\frac{1}{m}.$$

也可以先求⑥式后求④式，效果一样．请对照你们的解

法，有什么异同？

第二、解法的反思

在解法 2 中，用$a+b, ab$ 表示为m,n的代数式、代替a,b表示为m,n的代数式，比解法 1 过程简化了，但③式与⑤式都是以a,b为根的一元二次方程，④式与⑥式都有两根之和、两根之积（$a+b, ab$），我们怀疑这里面有重复. 重新理解条件与结论，a,b是二次方程③$x^2-kx-h=0$的根表明

$$a^2-ka-h=0, \qquad ⑦$$

$$b^2-kb-h=0. \qquad ⑧$$

作为目标，我们需要确定k,h. 把条件①，②成立、与⑦，⑧比较（差异分析），从中可以看到，二次项的系数不相同，消除差异，有

$$ma^2+na-1=0 \to a^2+\frac{n}{m}a-\frac{1}{m}=0,$$
$$mb^2+nb-1=0 \to b^2+\frac{n}{m}b-\frac{1}{m}=0,(a \neq b)$$

与⑦，⑧对照，得$k=-\frac{n}{m},h=\frac{1}{m}$. 可见，③式与⑤的重复，④式与⑥式的重复是可以消除的.

同时，还要看到，这时结论也是已知信息

$y=-\frac{n}{m}x+\frac{1}{m}$等价于$my+nx-1=0$.

即只需由已知条件确定$my+nx-1=0$，可以做到吗？不但可以，而且很简单！（只不过是$A(a,a^2),B(b,b^2)$在直线$my+nx-1=0$上）

解法 3　由$a \neq b$且①、②有

$$a^2+\frac{n}{m}a-\frac{1}{m}=0 \Rightarrow a^2=-\frac{n}{m}a+\frac{1}{m},$$

$$b^2+\frac{n}{m}b-\frac{1}{m}=0\Rightarrow b^2=-\frac{n}{m}b+\frac{1}{m},$$

这表明点 $A\left(a,a^2\right),B\left(b,b^2\right)$ 在直线

$$y=-\frac{n}{m}x+\frac{1}{m}$$

上，由两点确定一条直线知，这就是所求的一次函数解析式.

由此可以获得一些收获：

（1）看到了学会解题的两个关键环节——解题思路的探求和解题过程的反思. 解题思路的探求是把“题”作为认识的对象，把“解”作为认识的目标，重点展示由已知条件到未知结论的沟通过程，说清怎样获得题目的答案（这是一个认知过程，如找出解法 1 或解法 2）. 解题过程的反思是继续把解题活动（包括题目与初步解法）作为认识的对象，不仅关注如何获得解，而且寄希望于对“解”的进一步分析而增强数学能力、优化认知结构、提高思维素质，学会“数学地思维”，重点在怎样学会解题（这是一个再认知过程，如找出解法 3）.

（2）自觉运用数学思想方法解题有助于我们洞察问题的深层结构，提高数学素养.

表象： 题目给我们的表象是一大堆字母、符号和运算式：$mn\neq 0$，$n^2+4m>0$，$a\neq b$，$ma^2+na-1=0$，$mb^2+nb-1=0$，$A\left(a,a^2\right),B\left(b,b^2\right)$ 等，对其含义可以有不同的理解.

理解 1： 将 $ma^2+na-1=0$， $mb^2+nb-1=0$ 分别理解、成为两个关于 a,b 的二次方程.

理解 2：将$ma^2+na-1=0$，$mb^2+nb-1=0$结合理解、成为二次方程$mx^2+nx-1=0$有两个实根a,b．

这两个认识都受到二次三项式的强力诱导，都没有把两点$A(a,a^2),B(b,b^2)$的坐标特征结合进已知等式$ma^2+na-1=0$，$mb^2+nb-1=0$里去，并从内容上进行领悟，因而都在二次方程的表象（外围）上兜圈子.

理解 3：把两个已知等式$ma^2+na-1=0$，$mb^2+nb-1=0$与两点$A(a,a^2),B(b,b^2)$的坐标结合起来，得出A,B两点均在直线$my+nx-1=0$（$mn\neq 0$）上，只要明白一次函数的图象是直线，就知道这条直线即为过A,B两点的一次函数解析式．这时有题意的新理解：（**函数与方程的思想**）

条件 1：由两个字母a,b（$a\neq b$）组成两个点$A(a,a^2),B(b,b^2)$．

条件 2：这两个点$A(a,a^2),B(b,b^2)$在直线$my+nx-1=0$上（满足两个同形等式$ma^2+na-1=0$，$mb^2+nb-1=0$）（其中$mn\neq 0$，$n^2+4m>0$成为多余）.

结论是求过两点$A(a,a^2),B(b,b^2)$的一次函数解析式（用含m,n的式子表示）．这几乎是显然的.

（实验假设：条件叙述的顺序影响解题长度？

对比测试：比较两道题的得分，例 1 与：

例 2-1　对$m\neq 0$，$a\neq b$，已知两点$A(a,a^2),B(b,b^2)$的坐标满足

$$ma^2+na-1=0,$$

$$mb^2+nb-1=0,$$

求过A,B两点的一次函数解析式（用含m,n的式子表示）.

例 2-2 对$a\neq b$，已知两点$A\left(a,a^2\right),B\left(b,b^2\right)$的坐标满足

$$ma^2+na-1=0,$$

$$mb^2+nb-1=0,$$

求过A,B两点的一次函数解析式（用含m,n的式子表示）.

（要用反证法证明$m\neq 0$）

（3）解题分析至少能得出三个积极的成果：

●改进当前的解法；

●增进对数学解题和数学本身的理解；

●积累数学才华.

例 3 （2012 数学高考山东卷理科第 20 题，12 分）在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_4+a_5=84$，$a_9=73$，

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）对任意$m\in N_+$，将数列$\{a_n\}$中落入区间$\left(9^m,9^{2m}\right)$内的项的个数记为b_m，求数列$\{b_m\}$的前m项和S_m.

讲解 第（Ⅰ）问比较简单，要害是：第（Ⅱ）问结论是什么？落入区间$\left(9^m,9^{2m}\right)$内的项的个数记为b_m如何理解——$b_m=9^{2m-1}-9^{m-1}$

（Ⅰ）**解法 1** 由$a_3+a_4+a_5=84$，可得$3a_4=84$，$a_4=28$.

又$a_9=73$，则

$$d=\frac{a_9-a_4}{5}=9,\quad a_1=a_4-3d=28-27=1,$$

于是 $a_n=1+(n-1)\times 9=9n-8$.

解法 2 也可以不求a_1,d，由过两点$(4,a_4)$，$(9,a_9)$的直线方程，得

$$a_n=\frac{a_9-a_4}{9-4}(n-4)+a_4=9n-8.$$

（Ⅱ）对任意$m\in N_+$，由$9^m<9n-8<9^{2m}$，有

$$9^m+8<9n<9^{2m}+8,$$

即
$$9^{m-1}+\frac{8}{9}<n<9^{2m-1}+\frac{8}{9},$$

而$n\in N_+$，由题意可知

$$b_m=9^{2m-1}-9^{m-1},$$

于是
$$\begin{aligned}S_m&=b_1+b_2+\cdots+b_m\\&=\left(9^1+9^3+\cdots+9^{2m-1}\right)-\left(9^0+9^1+\cdots+9^{m-1}\right)\\&=\frac{9^{2m+1}-9}{9^2-1}-\frac{9^m-1}{9-1}=\frac{9^{2m+1}-9}{80}-\frac{9^m-1}{8}\\&=\frac{9^{2m+1}-10\times 9^m+1}{80}.\end{aligned}$$

或$S_m=\dfrac{9^{2m+1}+1}{80}-\dfrac{9^m}{8}$.

说明：关键是弄清结论是什么：“落入区间$(9^m,9^{2m})$内的项的个数记为b_m”.

后面的例子会继续呈现“理解题意”.

2-2　思路探求

（1）思路探求的基本含义.

思路探求就是寻找题目条件与题目结论之间的数学联系，它表现为沟通条件与结论的一系列演算或推理．寻找解题思路是探索解题结论的发现过程．中学教学（特别是考试

中）的基本想法是，把待解决或未解决的问题，化归为一类已经解决或者比较容易解决的问题.

（2）思路探求“探什么、怎么探”.

可以分两步走，如图 5，我们将思路探求“探什么、怎么探”设计为一个操作流程图. 核心是七个解题策略的运用：模式识别、差异分析、以退求进、区分情况、层次解决、正难则逆、数形结合.

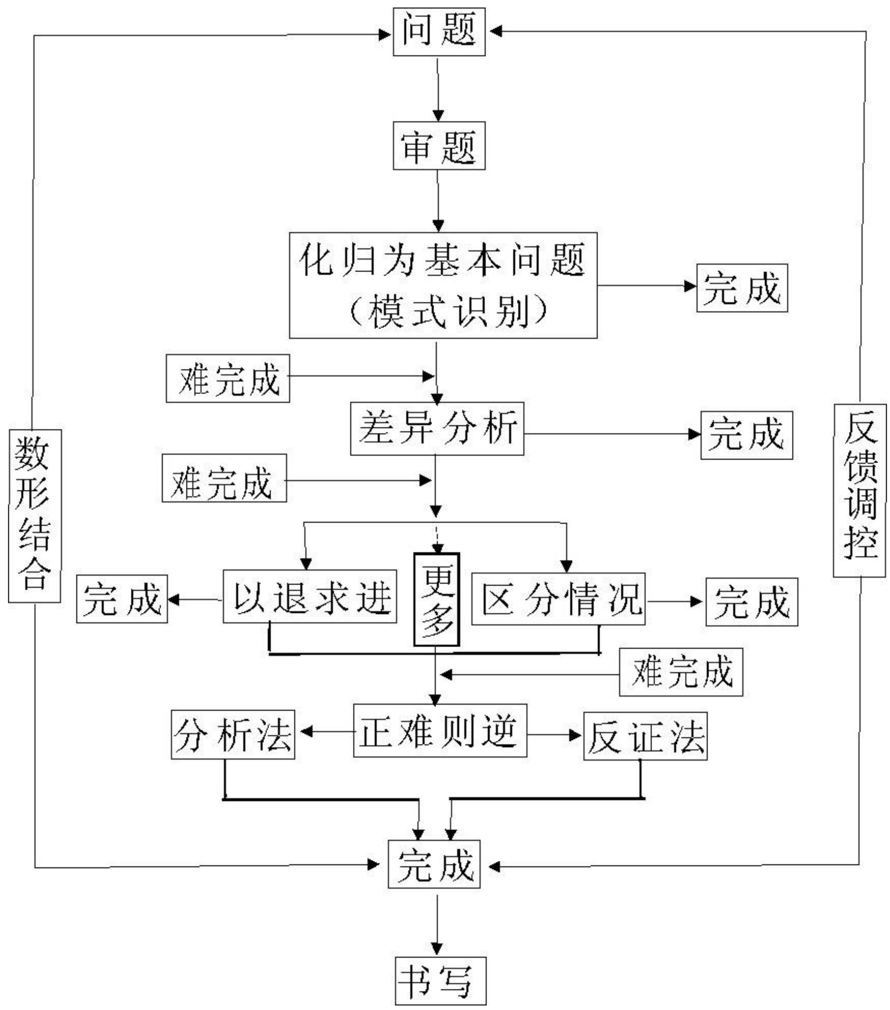


图 5

第一步，努力在已知与未知之间找出直接的联系——化

归为已经解决过的基本问题．对于大量的常规题来说，题意弄清楚了，题型就得以识别，记忆中关于这类题的解法就召之即来．（叫做模式识别，课本的重要定理及相关概念自动组成一个基本问题）

第二步，如果找不出直接的联系，就对原来的问题作出某些必要的变更或修改，运用解题策略：差异分析、以退求进、区分情况、层次解决、正难则逆、以及自始至终的数形结合等．

①差异分析：通过分析条件与结论之间的差异（目标差）、并不断减少目标差来完成解题的思考方法叫做差异分析法．使用差异分析法有 3 个步骤：

●寻找目标差．通过分析题目中所出现的元素和特征去寻找异同点；

●作出减少目标差的反应．运用基础理论与基本方法作出减少目标差的某种反应；

●积累目标差的减少．把减少目标差的调节积累起来、直至消除．

②以退求进：可以先考虑问题的特殊情况，或先考虑问题的一部分，看清楚、想明白了再进．退是手段、进是目的，“难的不会想简单的”是个好主意．在具体实践中，常常是进退互化．

③区分情况：或是分解为一个个小步骤（分步）、或是

分解为一个个小类型（分类），各个击破、分别解决．在具体实践中，常常是分合并用．

④层次解决：人们在创造性解决问题的过程中，思维是按层次展开的，先粗后细，先宽后窄，先对问题作一个粗略的思考，然后逐步深入到实质与细节．或者说，先作大范围的搜索，然后再逐步收缩包围圈．数学解题也是一个创造性活动，也可以层层深入地解决，我们叫做三层次解决．

●第一层次：一般性解决．即在策略水平上的解决，以明确解题的总体方向．这是对思考作定向调控．在这一层次上，根据中学阶段课程体系的结构，我们认为自觉应用函数思想和方程思想是十分有益的．（方向解决）

●第二层次：功能性解决．即在数学方法水平上的解决，以确定具有解决功能的解题手段，这是对解决作方法选择．对于高考，坐标法、三角法、向量法、待定系数法、换元法、配方法、反证法、代入法、消元法、数学归纳法等都属于选择的范围．（方法解决）

●第三层次：特殊性解决．即在数学技能水平上的解决，以进一步缩小功能解决的途径，明确运算程序或推理步骤，这是对技巧作实际完成．（具体完成）

在进行三层次解决时，每一层次又可能有三层次解决．

⑤正难则逆：正面思考有困难时，可以调整思考的方向，转而从结论入手（分析法、逆推法），或反面思考问题（反

证法）．在具体实践中，常常是正反相辅．

⑥数形结合：在探索的过程中，要始终不忘把数与形结合起来思考，既会把数式转变为图形，又会把图形转变为数式，注意发挥数与形的双重优势．

值得注意的是，这个框图恰好组成一个由简单到复杂的解题思考程序：

第 1 步，如果能够辨别题目属于熟悉的类型，那我们就用该类型相应的方法来解决——模式识别；对于表面上不熟悉的题目可以分解或补充、转换化归为熟悉的类型．

第 2 步，如果题目不属于熟悉的类型，转换也有困难，那我们就差异分析并辅以数形结合等直接解决．

第 3 步，如果遇到不熟悉的和费解的问题，模式识别和差异分析都不能奏效，那我们需要运用更多的策略——以退求进、区分情况、层次解决、数形结合等．

第 4 步，如果我们所有这些正面思考都不能奏效，那就正难则反，或者肯定结论找充分条件（分析法），或否定结论找出矛盾（反证法）．

（3）高考中的化归．

高考解题就是将课堂上获得的数学知识、数学方法和数学经验用于解决高校招生考试的新试题．这是一个从记忆模仿到探索发现的过程，关键在探索发现，核心是通过演算、推理、论证得出一个符合数学事实的结论．一个重要的建议

是

●化归为课堂上已经解决的问题（包括往年的高考题或其变形）.

①因为课堂和课本是学生知识资源的基本来源，也是学生解题体验的主要引导．离开了课本，学生还能从哪里找到解题依据、解题方法、解题体验？还能从哪里找到解题灵感的撞针？高考解题一定要抓住“课本”这个根本.

②因为课本是高考命题的基本依据．有的试题直接取自教材，或为原题、或为类题；有的试题是课本概念、例题、习题的改编；有的试题是教材中的几个题目、几种方法的串联、并联、综合与开拓；少量难题也是按照课本内容设计的，在综合性、灵活性上提出较高要求．可以说，抓住了“化归为课堂上已经解决的问题”就抓住了多数考题.

“化归为课堂上已经解决的问题”的实质是化归为课堂上学过的内容与方法，以不变应万变.

思考练习 2：请思考下题中的解题思路.

例 4 （2011 年高考数学重庆文科第（15）题）若实数 a,b,c 满足

$$2^a+2^b=2^{a+b}, \qquad ①$$

$$2^a+2^b+2^c=2^{a+b+c}, \qquad ②$$

则 c 的最大值是__________.

讲解　看懂题目的字面含义并不难，但两个已知等式有

什么用、怎么用都不清楚，这需要与结论联系起来加以思考.

第一、题意的初步理解.

（1）题目的条件是什么，一共有几个，其数学含义如何.

条件是两个等式.

条件 1：等式 $2^a+2^b=2^{a+b}$，其特点是两数之和 2^a+2^b 等于该两数之积 $2^a\bullet 2^b$.

条件 2：等式 $2^a+2^b+2^c=2^{a+b+c}$，三数之和 $2^a+2^b+2^c$ 等于该三数之积 $2^a\bullet 2^b\bullet 2^c$.

（2）题目的结论是什么，一共有几个，其数学含义如何.

结论是求 c 的最大值，可以看成求函数的最值（有不等关系）. 为了求函数的最值，一个途径是弄清函数的解析式和定义域.

（3）题目的条件与结论有哪些数学联系，是一种什么样的结构.

首先，从形式上理解条件与结论可以看到三个差异（差异分析）：

●条件有三个字母 a,b,c，结论只有一个字母 c，立即作出反应，消元 a,b.

●条件是两个式子，结论是一个不式子，立即作出反应，合并两个式子.

●条件是等式，结论是不等式，立即作出反应，合并、两个等式、消元a,b时，放缩为不等式.

其次，从内容上理解条件和结论，我们的脑子呈现这样的数学结构：构建函数并求最值（函数与方程的观点，体现一般性解决，方向有了）. 但是，函数是什么、怎样求最值？下面是一个思路探求的过程.

为了构建函数，我们需要再次理解条件，寻找函数的解析式和定义域．找函数的解析式主要是找等量关系，条件中有 2 个等式，比较现成；找函数的定义域就是找自变量和它的变化范围（不等式），但是自变量在哪里？怎样由等式得出不等式呢？（这体现了功能性解决的思考，下面主要是特殊性解决）

因为条件②含有c，所以函数解析式要从②中找．首先由条件②解出$2^c=\dfrac{2^a+2^b}{2^a\bullet 2^b-1}$，可见$c$与$a,b$都有关系（高等数学里叫二元函数），注意到$2^a+2^b=2^a\bullet 2^b$，故设$x=2^{a+b}=2^a+2^b>0$，得$2^c=\dfrac{x}{x-1}$.

于是，经过变形、换元、消元，函数有了（自变量也有了，二元函数避开了）：

$$c=\log_2\frac{x}{x-1}.$$

这时，定义域应该从自变量$x=2^{a+b}=2^a+2^b$（即条件 1）出发去寻找，其实质是找二元函数$x=g(a,b)$的值域．由“两数和、两数积”的结构想到基本不等式，由

$$x=2^{a+b}=2^a+2^b\ge 2\sqrt{2^{a+b}}=2\sqrt{x}\Rightarrow x\ge 4,$$

定义域也有了．解题的思路已经打通．

解法 1　设 $x=2^{a+b}=2^a+2^b\ge 2\sqrt{2^{a+b}}=2\sqrt{x}\Rightarrow x\ge 4$，当 $a=b=1$ 时 $x=4$．

把①代入②，有

$$x+2^c=x\bullet 2^c,\ (x\ge 4)$$

得

$$2^c=\frac{x}{x-1},\ (x\ge 4)$$

因 $f(x)=\frac{x}{x-1}$（$x\ge 4$）是一个减函数，当 $x=4$ 时达到最大值，故有

$$2^c=\frac{x}{x-1}\le f(4)=\frac{4}{3},$$

得

$$c\le \log_2\frac{4}{3}.$$

所以，当 $x=4$ 时 c 取最大值 $\log_2\frac{4}{3}$．

第二、问题的深入理解

第 1、函数观点的深入理解．

回顾求解过程就比当初看的更清楚了，题目的结构是

（1）由条件①提供自变量和定义域．而求定义域的实质是用基本不等式找二元函数的最小值．

（2）由条件②提供函数解析式．用到了换元和消元．

（3）结论是根据函数解析式和定义域求最大值．用到了函数的单调性．

理解上述解法的实质，立即可以改写为不等式运算．

解法 2　由①有

$$2^{a+b}=2^a+2^b\geq 2\sqrt{2^{a+b}}\Rightarrow 2^{a+b}=2^a+2^b\geq 4,$$

当 $a=b=1$ 时， $2^{a+b}=2^a+2^b=4$.

把①代入②，有

$$2^{a+b}+2^c=2^{a+b}\bullet 2^c,$$

变形
$$\begin{cases}1=\left(2^c-1\right)\left(2^{a+b}-1\right),\\ 2^{a+b}\geq 4\rightarrow 2^{a+b}-1\geq 3\end{cases}\rightarrow 1\geq\left(2^c-1\right)3,$$

有
$$2^c\leq\frac{4}{3},$$

得
$$c\leq\log_2\frac{4}{3}.$$

所以，当 $a=b=1$ 时，c 取最大值 $\log_2\frac{4}{3}$.

这个解法省略了探究过程，书写简洁，但怎么想到的就比较费解了.理解了问题的深层结构，推广也立即成为可能.

例 4-1 （推广）对实数 $a>0$，整数 $n>1$，如果存在实数 $b_1,b_2,\cdots,b_n,b_{n+1}$ 使

$$a^{b_1}+a^{b_2}+\cdots+a^{b_n}=a^{b_1+b_2+\cdots+b_n},$$
$$a^{b_1}+a^{b_2}+\cdots+a^{b_n}+a^{b_{n+1}}=a^{b_1+b_2+\cdots+b_n+b_{n+1}},$$

求 b_{n+1} 的最值.

显然 $a\neq 1$，仿照上面的解法可得：若 $a>1$，在 $x=\sqrt[n-1]{n^n}$ 时 b_{n+1} 取最大值 $\log_a\frac{\sqrt[n-1]{n^n}}{\sqrt[n-1]{n^n}-1}$. 若 $0<a<1$，在 $x=\sqrt[n-1]{n^n}$ 时 b_{n+1} 取最小值 $\log_a\frac{\sqrt[n-1]{n^n}}{\sqrt[n-1]{n^n}-1}$.

这里也经历了一个“三层次解决”的过程：方向解决，方法解决，具体完成.

一般性解决：构建函数并求最值，方向有了.

功能性解决：为了“构建函数并求最值”我们需要找出自变量和定义域，需要找出函数解析式．有了函数及定义域便可求函数的最小值．方法有了

特殊性解决：由条件①提供自变量和定义域；条件②提供函数解析式；由函数的单调性找出最小值．这是从操作层面对解题作具体完成．

第 2、差异分析的深入理解．

回顾求解过程就比可以看到三个差异的消除：

（1）对“条件有三个字母a,b,c与结论只有一个字母c”差异，作出两步反应，第一步设$x=2^{a+b}=2^a+2^b$，二元变一元；第二步，取$x=4$（即$a=b=1$），消元a,b．

（2）对“条件是两个式子与结论是一个式子”的差异，作出“把①代入②”的反应，有$x+2^c=x\bullet 2^c$（$x\geq 4$）

（3）对“条件是等式与结论是不等式”的差异，作出等式放大的反应，两次用到函数的单调性．

例 5 （1997 年数学高考理科第（24）题第（1）问）设二次函数$f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，方程$f(x)-x=0$的两个根x_1,x_2满足$0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$．当$x\in(0,x_1)$时，证明：$x<f(x)<x_1$．

分析 欲证$x<f(x)<x_1$.，

只需证 $0<f(x)-x<x_1-x$，（条件有方程$f(x)-x=0$）

只需证 $0<a(x_1-x)(x_2-x)<x_1-x$，（条件有根与系数的关系）

只需证 $0<(x_1-x)(x_2-x)<\frac{1}{a}(x_1-x)$，（条件有关系$0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$）

只需证 $0<(x_2-x)<\frac{1}{a}$，（$x_1-x>0$）（条件有 $x\in(0,x_1)$）

由 $0<x<x_1<x_2<\frac{1}{a}$， $x\in(0,x_1)$ 知，最后一式已成立.

例 6 （2012 数学高考广东卷理科第 20 题，14 分）在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率 $e=\sqrt{\frac{2}{3}}$，且椭圆 C 上的点到 $Q(0,2)$ 的距离的最大值为 3.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）在椭圆 C 上，是否存在点 $M(m,n)$ 使得直线 l：$mx+ny=1$ 与圆 O：$x^2+y^2=1$ 相交于不同的两点 A,B，且 ΔOAB 的面积最大？若存在，求出点 M 的坐标及相对应的 $\triangle OAB$ 的面积；若不存在，请说明理由.

哪一问比较难？

第（Ⅰ）问椭圆方程求不出来，第（Ⅱ）还能不能得分？

解法 1 （Ⅰ）由 $e=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$，得

$a^2=3b^2$，

即椭圆 C 的方程为

$$\frac{x^2}{3b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad ①$$

设 $P(x,y)$ 为椭圆 C 上任意一点，则 $-b\le y\le b$，且

$$PQ^2=(x-0)^2+(y-2)^2$$

$$=3b^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)+(y-2)^2$$

$$=3b^2-2y^2-4y+4$$

$$=3b^2+6-2(y+1)^2 \qquad ②$$

$$\le 3b^2+6.$$

得 $3^2=\left(PQ^2\right)_{最大值}\le 3b^2+6\Rightarrow b\ge 1$.

这时，取 $y=-1\in[-b,b]$，代入②，得

$$3^2=\left(PQ^2\right)_{最大值}=3b^2+6$$

得 $b=1$，代入①得椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

（Ⅱ）假设点 $M(m,n)$ 存在，则

$$\frac{m^2}{3}+n^2=1, \qquad ③$$

由于直线 l： $mx+ny=1$ 与圆 O： $x^2+y^2=1$ 相交于不同的两点 A， B，所以，圆心到直线的距离 d 小于半径 1

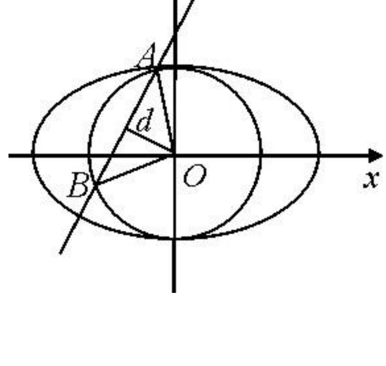
$$d=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}<1\Rightarrow m^2+n^2>1.$$

又 $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}AB\bullet d=\sqrt{1-d^2}\bullet d\le\frac{\left(1-d^2\right)+d^2}{2}=\frac{1}{2}$,

当且仅当 $1-d^2=d^2\Rightarrow d^2=\frac{1}{2}$， 即

$$m^2+n^2=2 \qquad ④$$

时 ΔOAB 的面积最大，为 $\frac{1}{2}$.



联立③、④，解得 $m^2=\frac{3}{2},n^2=\frac{1}{2}$，即点 M 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$， $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，ΔOAB 的面积取最

大值$\frac{1}{2}$.　　　　　　　　　　　　　　　　图 6

说明 1　两问串联设计，结构相同：都是直接给出一个等量关系，再由最值条件找出另一个等量关系，并且第二问找出另一个等量关系更容易.

说明 2　第（Ⅰ）问椭圆方程求不出来，第（Ⅱ）还能得分，可以算出$m^2+n^2=2$时ΔOAB的面积最大，为$\frac{1}{2}$.

解法2　（Ⅰ）椭圆上距Q最远的点就是椭圆的最低点$B_2(0,-b)$，有$|QO|+|OB_2|=3$，得

$$2+b=3\Rightarrow b=1,$$（与解法1结论相同）

又由　$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}=\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

得　$$a^2=3b^2=3.$$

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

第（Ⅱ）问同解法 1.

错在哪里？（参见例 5-1 误解 1）

解法 3　（Ⅰ）同解法 1 得出$\frac{x^2}{3b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$及

及　$$PQ^2=3b^2-2y^2-4y+4,\quad -b\le y\le b.$$

把$PQ=3$代入，得关于y的二次方程

$$2y^2+4y+5-3b^2=0,$$

因为题目中椭圆$\frac{x^2}{3b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$与圆$x^2+(y-2)^2=9$相切，所以，上述关于$y$的二次方程有判别式为0

$$\Delta = 4^2 - 4\times 2\left(5-3b^2\right)=0,$$

解得$b^2=1$，所求的椭圆方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

错在哪里？（参见例 5-2 误解 3）

解法 4　（Ⅰ）同解法 1 得出$\frac{x^2}{3b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$及

$$PQ^2=3b^2+6-2\left(y+1\right)^2,\quad -b\ \le y\ \le .\qquad ⑤$$

（1）若$-1<-b$即$0<b<1$，式⑤为y的减函数，当$y=-b$时，取到最大值，得

$$3b^2+6-2\left(1-b\right)^2=\left(PQ^2\right)_{最大值}=9,$$

即　$$b^2+4\ b-5\ =0\ \Rightarrow b\quad 或\ b=-5,$$

均与$0<b<1$矛盾，无解.

（2）若$-b\le -1$即$b\ge 1$，式⑤当$y=-1\in[-b,b]$时，函数取到最大值，有

$$3^2=\left(PQ^2\right)_{最大值}=3b^2+6$$

得$b=1$，代入①得椭圆C的方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

（Ⅱ）假设点$M\left(m,n\right)$存在，同解法 1，得

$$\frac{m^2}{3}+n^2=1,\quad d=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}<1.$$

又　$$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA\bullet OB\sin\angle AOB\le\frac{1}{2},$$（$\angle AOB=90^\circ$取最大值）

当$d=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}=OA\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow m^2+n^2=2$时取最大值.

以下同解法 1.

说明 3　这道高考题与下述高考题有结构上的类同点，

体现新高考题的求解可以化归为往年的高考题：

例 6-1 （1990 数学高考文科 26 题、理科第 25 题，12 分）设椭圆的中心是坐标原点，长轴在 x 轴上，离心率为 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$．已知点 $P\left(0,\frac{3}{2}\right)$ 到这个椭圆上的点的最远距离是 $\sqrt{7}$．求这个椭圆的方程，并求椭圆上到点 P 的最远距离等于 $\sqrt{7}$ 的点的坐标．

求椭圆方程时，“会而不对、对而不全”的错误很多，如

误解1 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），椭圆上距 P 最远的点就是椭圆的最低点 $B_2(0,-b)$，有 $|PO|+|OB_2|=\sqrt{7}$，得

$$\frac{3}{2}+b=\sqrt{7}\Rightarrow b=\sqrt{7}-\frac{3}{2},$$

又由 $$\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2},$$

得 $$a=2b=2\sqrt{7}-3.$$

故椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{\left(2\sqrt{7}-3\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{7}-\frac{3}{2}\right)^2}=1,$$

或 $$\frac{x^2}{37-12\sqrt{7}}+\frac{4y^2}{37-12\sqrt{7}}=1.$$

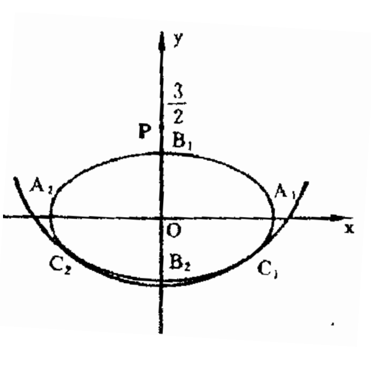


图7

说明4 这个解法把 $B_2(0,-b)$ 视为距 P 最远的点是一种直观错觉，如图7，椭圆上的点 $C_{1,2}\left(\pm\sqrt{36-12\sqrt{7}},-\frac{1}{2}\right)$ 与 P 的距离为

$$\left|PC_{1,2}\right|=\sqrt{\left(36-12\sqrt{7}\right)+4}>\sqrt{7}.$$

误解 2　设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），由

$$e=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},$$

得

$$a^2=4b^2.$$

椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

设$Q(x,y)$为椭圆上任意一点，则$-b\le y\le b$，且

$$PQ^2=(x-0)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$=4b^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$=4b^2-3y^2-3y+\frac{9}{4}$$

$$=4b^2+3-3\left(y+\frac{1}{2}\right)^2,$$

当$y=-\frac{1}{2}$时，PQ^2（从而PQ）有最大值，得

$$\left(\sqrt{7}\right)^2=\left(PQ^2\right)_{最大值}=4b^2+3,$$

得$b=1$，所求的椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

说明5　这个解法默认了$b\ge\frac{1}{2}$，否则，由$y\in[-b,b]$知，$y=-\frac{1}{2}$不可能成立，需要补上$b<\frac{1}{2}$时的讨论.

误解3　仿误解2得出

$$PQ^2=4b^2-3y^2-3y+\frac{9}{4}.$$

把 $PQ=\sqrt{7}$代入，得关于y的二次方程

$$3y^2+3y-4b^2+\frac{19}{4}=0,$$

因为题目中椭圆$\frac{x^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$与圆$x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=7$相切，所以，上述关于$y$的二次方程有判别式为0

$$\Delta=3^2+4\times3\left(4b^2-\frac{19}{4}\right)=0,$$

解得$b^2=1$，所求的椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

说明6　椭圆与圆相切用判别式为0是不可靠的，得出正确结论只是巧合，把$\sqrt{7}$改为$\frac{7}{4}$结论就不对.

例 6-2　设椭圆的中心是坐标原点，长轴在x轴上，离心率为$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$．已知点$P\left(0,\frac{3}{2}\right)$到这个椭圆上的点的最远距离是$\frac{7}{4}$．求这个椭圆的方程.

误解　沿用上述例5-1误解3的判别式法，有关于y的二次方程

$$3y^2+3y-4b^2+\frac{13}{16}=0$$

$$\Delta=3^2+4\times3\left(4b^2-\frac{13}{16}\right)=0,$$

解得$b^2=\frac{1}{64}$，从而$a^2=4b^2=\frac{1}{16}$．得所求的椭圆方程

$$16x^2+64y^2=1.$$

说明7 这时的椭圆$16x^2+64y^2=1$与圆$x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{4}$不相切，“巧合”没有发生．正确的答案为$4x^2+16y^2=1$.

例 7-1　（2011 数学高考广东卷文科第 20 题，14 分）设$b>0$, 数列$\{a_n\}$满足$a_1=b$，$a_n=\frac{nba_{n-1}}{a_{n-1}+n-1}(n\geq2)$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）证明：对于一切正整数n，$2a_n \le b^{n+1}+1$.

例 7-2 （2011 数学高考广东卷理科第 20 题，14 分）设$b>0$, 数列$\{a_n\}$满足$a_1=b$，$a_n=\dfrac{nba_{n-1}}{a_{n-1}+2n-2}(n\ge 2)$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）证明：对于一切正整数n，$a_n \le \dfrac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1$.

例 7-3 （2006 数学高考江西卷理科第 22 题，14 分）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\dfrac{3}{2}$，且$a_n=\dfrac{3na_{n-1}}{2a_{n-1}+n-1}$（$n\ge 2$，$n\in N^*$）.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）证明：对于一切正整数n，不等式$a_1\bullet a_2\bullet\cdots\bullet a_n<2\bullet n!$.

解 （Ⅰ）将条件作倒数变换，得

$$\frac{n}{a_n}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{n-1}{a_{n-1}},$$

再变为 $$\left(1-\frac{n}{a_n}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{n-1}{a_{n-1}}\right),$$

这表明，$\left\{1-\dfrac{n}{a_n}\right\}$是一个等比数列，其首项为$1-\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{3}$，公比为$q=\dfrac{1}{3}$，从而$1-\dfrac{n}{a_n}=\dfrac{1}{3^n}$，得

$$a_n=\frac{n\bullet 3^n}{3^n-1}\quad（n\ge 1）$$

（Ⅱ）（略）

讲解 2011 年的广东高考题与 2006 年的江西高考题有

结构上的类同点（求通项、证数列不等式），体现新高考题的求解可以化归为往年的高考题.

例 8-1 （2001 数学高考全国卷文科第 19 题，12 分）已知圆内接四边形 $ABCD$ 的边长分别为 $AB=2$，$BC=6$，$CD=DA=4$ 求四边形 $ABCD$ 的面积.

例 8-2 （2014 数学高考全国卷文科第 17 题，12 分）四边形 $ABCD$ 的内角 A 与 C 互补，$AB=1$，$BC=3$，$CD=DA=2$.

(I)求角 C 和 BD;

(II) 四边形 $ABCD$ 的面积.

例 9-1 （2018 全国Ⅰ卷文**第** 21 题，14 分） 已知函数 $f(x)=x-\frac{2}{x}+1-a\ln x$， $a>0$

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性;

（2）设 a=3，求 $f(x)$ 在区间[1，e^2]上值域。其中 e=2.71828⋯是自然对数的底数。

例 9-2（2009 安徽理第 19 题，12 分） 已知函数 $f(x)=x-\frac{2}{x}+a(2-\ln x),(a>$ ，讨论 $f(x)$ 的单调性.

例 10-1 （2018 全国Ⅰ卷理第 21 题）已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x-a\ln x$

(I)讨论 $f(x)$ 的单调性;

（II)若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，证明 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1,x_2}<a-2$.

例 10-2 （2011 湖南文科第 21 题，13 分）设函数

$f(x)=x-\frac{1}{x}-a\ln x$ （$a\in R$）

(I)讨论 $f(x)$ 的单调性；

（II）若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1和x_2，记过点 $A(x_1,f(x_1)),B(x_2,f(x_2))$ 的直线的斜率为 k，问：是否存在 a，使得 $k=2-a$?若存在，求出 a 的值，若不存在，请说明理由.

2-3　书写表达

（1）书写表达的基本含义.

就是把打通了的解题思路（即自己看清楚、想明白的事情），用文字具体表达出来，说服自己、说服别人（包括同意或不同意你看法的人）．高考中就是要说服阅卷老师．这当中可能会有某一步骤因忽视了关键细节而反复，也可能会因认真整理思想而深化理解或触发新的灵感.

（2）书写表达“写什么、怎么写”.

应该看到，“怎样表达”对学生来说仍然是一个需要系统指导和严格训练的问题．事实上，数学语言的运用与表达是中学教学的一个薄弱环节，语言表述不规范，推理过程不完整，逻辑关系“能意会不能言传”等很普遍．我们对“写什么、怎么写”的建议是：

①平时抓“15 字口诀”和“24 字要领”.

●“写什么”的 15 字口诀：定方法、找起点、分层次、选定理、用文字．总结出

计算题格式，

证明题格式，

应用题格式，

……

●“怎么写”的 24 字要领：方法简单、起点明确、层次清楚、定理准确、论证严密、书写规范．

对于网上阅卷，还要安排好书写的位置和字体的大小．

②临场抓“书写要快”和“分段得分”．如速度意识，写得分点，缺步解答，跳步解答，退步解答，倒步解答，辅助解答等，进可全题解决，退可分段得分．

思考练习 3：请思考下面各题中的书写表达

例 11 将 $n(n\geq 2)$ 个同学任意分成两组，给两组之间的每两个同学都拉上一条绳子(同一组内的同学不拉绳子)，继续这一过程，只要某组的同学数大于 1，就把这组同学再随意分成两组，并给两组之间的每两同学再拉一条绳子，直至每组只有 1 个同学为止．求

（Ⅰ）过程结束时绳子的总数．（你认为这是什么题型？或可以化为什么题型？）

（Ⅱ）过程结束时每个同学所拉绳子条数一样多的概率是多少？存在两个同学所拉绳子条数不同的概率是多少？

讲解 分四步（探索、类比、证明、感悟）讲解如下．

（1）探索：“难的不会想简单的”，特殊化分组，发现结果．

对n个同学作$(n-1)+1$分组，用$n-1$条绳子.

对$n-1$个同学作$(n-2)+1$分组，用$n-2$条绳子.

依此类推，最后对 2 个同学作 1+1 分组，用 1 条绳子.

对这个特殊的分组，绳子的总数为

$$N_n=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.\text{（条）}$$

由此发现，这与“数线段”的结果是一样的（打电话、握手等的C_n^2模型）. 当然，对任意分组是否成立还需要证明，但是，证明的目标已经有了.

例 11-1　基本问题（数线段）　平面（或空间）上有n个点$A_1,A_2,\cdots,A_n\ (n\geq 2)$，两两连一条线段，共有$\frac{n(n-1)}{2}$条.

解　（乘法原理的视角）每一个点都与另外$n-1$个点连线，n个点计算便有$n(n-1)$条连线，但在这个计算中，每条线都重复计算了 1 次，故得$\frac{n(n-1)}{2}$.

（2）类比：类比“数线段”的求解，将人对应为点，将拉绳子对应为连线，则每一个人都与另外$n-1$个人拉绳子就对应每一个点都与另外$n-1$个点连线，……这样一来，思路应该是通的.

但是，怎么书写呢？先想一想.

（3）**证明：**（Ⅰ）将n个同学记为$A_1,A_2,\cdots,A_n$，任取其中 1 个同学A_i（$1\leq i\leq n$），当全体同学被分成两组时，A_i与另一组中的每一个同学都拉有绳子，当A_i所在的组继续分成两小组

时，A_i又与另一小组中的每一个同学都拉有绳子，依此类推，每个分出去的同学都与A_i拉有绳子，直至每组只有 1 个同学时，A_i就与A_i之外的$n-1$个同学都拉有绳子，共$n-1$条．令$i=1,2,\cdots,n$，可得$n(n-1)$．但在这个计算中，每条绳子都重复计算了 1 次，故得绳子总数为$\frac{n(n-1)}{2}$条．

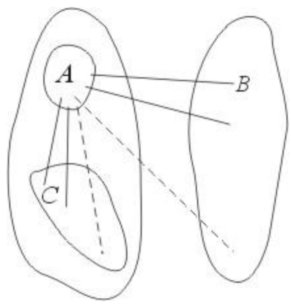


图 8

（Ⅱ）过程结束时每个同学所拉绳子条数一样多是必然事件，概率为 1；存在两个同学所拉绳子条数不同是不可能事件，概率为 0．

（4）感悟：这个书写体现了“15 字口诀”．“定方法”就是采用例 1-36-1“数线段”的求解方法；“找起点”就是从“将人对应为点，将拉绳子对应为连线”开始；“分层次”就是分四步骤完成，第一步将n个同学看成n个字母（点），第二步说明每个同学都拉有$n-1$条绳子，第三步按n个同学直接计算可得$n(n-1)$条绳子，第四步由于计算有重复故得绳子总数为$\frac{n(n-1)}{2}$条；“选原理”主要用到了“乘法原理”（然后还有除法）；“用文字”就是组织为上述书写过程．这个书写也体现了“24 字要领”的追求．

11-2 （变式）将平面上的$n(n\geq 2)$个点任意分成两堆，记下这两堆点数的乘积．继续这一过程，只要某堆的点数大于

1，就把这堆点再随意分成两小堆，并记下两小堆点数的乘积，直至每堆只有 1 个点为止．求上述所有乘积之和．

讲解　（1）作特殊化分组，发现结果．

对n个点作$(n-1)+1$分组，乘积为$(n-1)\times1=n-1$．

对$n-1$个点作$(n-2)+1$分组，乘积为$(n-2)\times1=n-2$．

依此类推，最后对 2 个点作 1+1 分组，乘积为$1\times1=1$．

对这个特殊的分组，所有乘积之和为

$$N_n=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

由此发现，这与例 8-1 的结果是一样的．

（2）将n个点记为$A_1,A_2,\cdots,A_n$，当全体点被分成M_1,N_1两堆作乘法时，我们将M_1中每一个点都与N_1中的每一个点作连线，M_1内部不连线，N_1内部不连线，则连线的条数就是M_1,N_1两堆点数的乘积．可见，每次分堆点数的乘积就是每次分堆连线段的条数，所有乘积之和，就是n个点两两连段的总和．思路是通的，怎么书写呢？

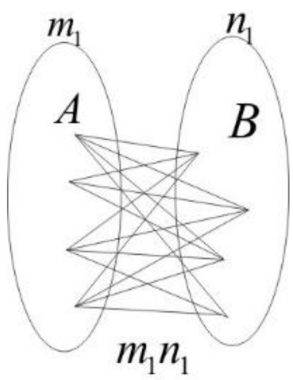


图 9

例 11-3　（2016 年陕西师大自主招生考试题）将$n\ (n\geq2)$个同学任意分成两组，分手时，两组之间的每两个同学都握手告别一次（同一组内的同学不握手），继续这一过程，只要某组的同学数大于 1，就把这组同学再随意分成两组，并进行握手告别，直至每组只有 1 个同学为止．设过程结束时握手告别的总次数为a_n．

（Ⅰ）求和$a_2+a_3+\cdots+a_n$；

（Ⅱ）求证$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$．

讲解： 由例8可知$a_n=\frac{n(n-1)}{2}$．

（Ⅰ）由 $a_k=\frac{k(k-1)}{2}=\frac{k(k-1)[(k+1)-(k-2)]}{6}$

$$=\frac{(k+1)k(k-1)}{6}-\frac{k(k-1)(k-2)}{6},$$

取$k=2,3,\cdots,n$，并求和得$\sum_{k=2}^{n}a_k=\frac{(n+1)n(n-1)}{6}$．

或由已知$a_k=C_k^2=C_{k+1}^3-C_k^3$，有

$$\sum_{k=2}^{n}a_k=\sum_{k=2}^{n}C_k^2=C_3^3+\sum_{k=3}^{n}\left(C_{k+1}^3-C_k^3\right)=C_{n+1}^3.$$

（Ⅱ）$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{2}{1\times2}+\frac{2}{2\times3}+\cdots+\frac{2}{(n-1)n}$

$$=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n}\right)<2.$$

例 11-4 （变式）已知$n\ (n\geq2)$个药箱里有a_n种药，满足：每两个药箱里有一种相同的药，每种药恰好在两个药箱里出现.

（Ⅰ）求和$a_2+a_3+\cdots+a_n$；

（Ⅱ）求证$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$．

提示： 把药箱对应为点，“两个药箱里有 1 种相同的

药”就连一条线，每两点都有连线；又由于“每种药恰好在两个药箱里出现”，故每两点都连且只连一条线，得到一个图（C_n^2模型），图中有$\frac{n(n-1)}{2}$条边，即$a_n=\frac{n(n-1)}{2}$．以下同例8-3．

例 12 多种方法求出图中有多少个小正方形.（两组线均为等距平行线）

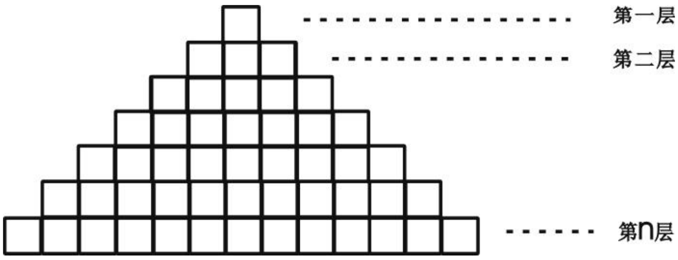


图 10

（这个图有一种对称性结构，可以有多种不同的书写，反映出来的思维层次是有区别的，写出你的解法.）

讲解　思路 1：从上到下求和.

解法 1　代数求法：$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\cdots=n^2$.

解法 2　几何求法：如图 11，变为正方形.

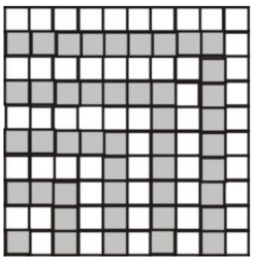


图 11

思路 2：从左到右求和.

解法 3　代数求法： $1+2+\cdots+(n-1)+n+(n-1)\cdots+2+1=\cdots=n^2$

解法 4　几何求法： 图 10 对折为正方形图 12.

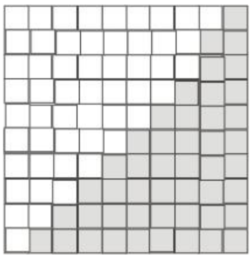


图 12

思路 3： 将图形对应为ΔABC，由相似三角形面积比等于边长的平方比，有

$$\frac{S_{\vartriangle AB_1C_1}}{S_{\vartriangle ABC}}=\left(\frac{AB_1}{AB}\right)^2,$$

得
$$\frac{S_{\vartriangle AB_1C_1}}{S_{\vartriangle ABC}}=\frac{1}{n^2},$$

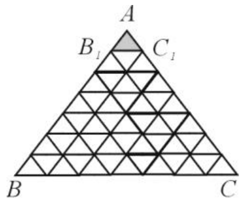


图 13

即$S_{\vartriangle ABC}=n^2S_{\vartriangle AB_1C_1}$. 所以，分成$n^2$个小三角形$AB_1C_1$.

例 12-1　从 1 到 100 的自然数中，每次取两个数使它们之和大于 100，有多少种不同的取法？

解　从 1 到 100 的自然数中每次取两个数a,b，使$a+b>100$，不妨设$a<b$，则a的可取值有 1，2，3，…，99 共 99 个，分 99 类讨论：

当a=1 时，b可取 100，有 1 种取法；

当a=2 时，b可取 99，100，有 2 种取法；

……

当a=49 时，b可取 52，53，…，99，100，有 49 种取法；

当a=50时，b可取51，52，…，99，100，有50种取法；

当a=51时，b可取52，53，…，99，100，有49种取法；

……

当a=98时，b可取99，100，有2种取法；

当a=99时，b可取100，有1种取法；

总计 $N=1+2+\cdots+49+50+49+\cdots+2+1$

其几何意义正是上题中$n=50$，故答案为$50^2=2500$．还可以在直角坐标系上表示$\{(a,b)|a+b>100,1\le a<b\le 100,a,b\in N\}$，当$1\le a\le 50$时，$a\le 100-a<b\le 100$，$b$的取值个数为

$$k=100-(100-a)=a\text{（个）}.$$

当$51\le a\le 99$时，$a<b\le 100$，b的取值个数为

$$s=100-a$$

求和 $$\sum_{k=1}^{50}k+\sum_{a=51}^{99}(100-a)=\sum_{k=1}^{50}k+\sum_{a=51}^{99}\left[50-(a-50)\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{50}k+\sum_{k=1}^{49}(50-k)=\sum_{k=1}^{50}50=50^2.$$

2-4　回顾反思

（1）回顾反思的基本含义．

反思就是从自身的认识活动中“脱身”出来，作为一个“旁观者”来看待自己刚才做了些什么事情，使自己的活动成为了思考的对象．有两个层面的回顾反思，一个是解题层面的回顾反思，另一个是学会解题层面的回顾反思．

（2）回顾反思“思什么”．

①解题层面的回顾反思．主要是复查检验，看计算是否

准确、推理是否合理、思维是否周密、解法是否还有更多、更简单的.

●有的检验是解题的必要步骤，检验之后，解题才算完成;

●有的检验是避免过失的技术性措施，像足球守门员把住最后一关.

②学会解题层面的回顾反思. 表现为解题后对数学题目本身及解题方法的重新认识. 如（思什么）

●解题中用到了哪些知识？用到了哪些方法？这些知识和方法是怎样联系起来的？

●自己是怎么想到它们的？困难在哪里？关键是什么？遇到过什么障碍？后来是怎么解决的？

●还有别的解决方法吗? 更一般的方法？更特殊的方法？沟通其他学科的方法？更简单的方法？同样的方法能用来处理更一般性的命题吗？

●命题能够推广吗？条件能减弱吗？结论能加强吗？

●这些知识和方法体现了什么样的数学思想？调动这些知识和方法体现了什么样的解题策略？

●洞察问题的深层结构了吗？

●题目有无科学性缺陷解法有无逻辑性漏洞？

如此等等的思考不仅能改进和完善眼前的解题，而且能提炼出对未来解题有指导作用的信息，它的长期积累会升华

为数学才华．这是更深层次的回顾反思，已经涉及学会解题了．

（3）回顾反思“怎么思”．

通常要经历整体分解与信息交合两个步骤．

①整体分解：就是把原解法的全过程分拆为一些信息单元，看用到了哪些知识、哪些方法，它们是怎样组合在一起的，从中概括出知识基础、逻辑结构、信息流程、心理过程等．

②信息交合：就是抓住整体分解中提炼出来的新认识或本质步骤，将信息单元转换或重组成新的信息块，这些新信息块的有序化，使认识更接近问题的深层结构．于是，一个新的解法就诞生了，所储存的数学知识之间的非人为的、实质性的联系就加强了，怎样学会解题的体验就生成了，提炼解题理论的基础也奠定了．

高考的回顾主要是复查检验，保证计算准确、推理合理、思维周密、避免过失．

这 4 个步骤需要不断的反馈调节，即使 4 步完成了也存在反思改进的空间：有时候思路还比较麻烦，通过反馈调节而精简；有时候思路还存在错误，通过反馈调节而纠正．

思考练习 4：做完下面各题后，你作过回顾吗？

例 13 （2012 高考数学福建卷理科第 20 题，14 分）已知函数 $f(x)=e^{x}+ax^{2}-ex,a\in R$

（Ⅰ）若曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线平行于x轴，求函数$f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）试确定a的取值范围，使得曲线$y=f(x)$上存在唯一的点P，曲线在该点处的切线与曲线只有一个公共点P．

讲解　（Ⅰ）由$f'(x)=e^x+2ax-e$知，曲线在$(1,f(1))$处的切线斜率为$f'(1)=2a=0$，得$a=0$，即$f(x)=e^x-ex$．

此时，由$f'(x)=e^x-e=0$，得$x=1$，有

（1）当$x\in(-\infty,1)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减，故$f(x)$单调递减区间为$(-\infty,1)$．

（2）当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增，故$f(x)$单调递增区间为$(1,+\infty)$．

你对第（Ⅰ）问的求解有什么看法？

说明　当$a=0$时，$f(1)=e+a-e=a=0$，问题来了：计算得出点$(1,f(1))$在x轴上，该处的切线重合于x轴，与题目说的“在点$(1,f(1))$处的切线平行于x轴”到底有没有矛盾？

有人说“同一平面内，且没有公共点的直线叫平行线”，而重合有无数个公共点，有矛盾，是错题（或者说，满足题干的实数a事实上是不存在的）；

有人说“重合可以是平行的特例”，虽然不承认“错题”，也只肯定到“不要紧”、“不影响学生求解”．

这至少在客观上有了歧义（歧义题），若提前发现肯定会修改．比如改为：在点$(1,f(1))$处的切线垂直于y轴．（凡

有歧义之处，高考命题都要回避）

第（Ⅱ）问（略）.

例 14 (2015 新课标全国二卷理科第 21 题) 设函数

$$f(x)=e^{mx}+x^2-mx.$$

（Ⅰ）证明：$f(x)$在$(-\infty,0)$单调递减，在$(0,+\infty)$单调递增；

（Ⅱ）若对于任意$x_1,x_2\in[-1,+1]$, 都有

$$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\le e-1, \qquad ①$$

求m的取值范围.

解　（Ⅰ）**证明 1**：对已知函数求导

$$f'(x)=me^{mx}+2x-m=m(e^{mx}-1)+2x. \qquad ②$$

（1）当$x\in(-\infty,0)$时，

若$m\ge 0$，则$mx\le 0$，$e^{mx}-1\le 0$，有$m\left(e^{mx}-1\right)\le 0$；又$2x<0$，由②知

$$f'(x)<0;$$

若$m<0$，则$mx>0$，$e^{mx}-1>0$，有$m\left(e^{mx}-1\right)<0$，又$2x<0$，由②知

$$f'(x)<0.$$

综上总有$f'(x)<0$，得$f(x)$在$(-\infty,0)$单调递减.

（2）当$x\in(0,+\infty)$时，

若$m\ge 0$，则$mx\ge 0$，$e^{mx}-1\ge 0$，有$m\left(e^{mx}-1\right)\ge 0$，又$2x>0$，故

$$f'(x)>0;$$

若$m<0$，则$mx<0$，$e^{mx}-1<0$，有$m\left(e^{mx}-1\right)>0$，又$2x>0$，故

$f'(x)>0$.

综上总有 $f'(x)>0$，得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

所以，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

反思 1　式②的符号牵涉到两个字母 x,m 的二级讨论，其中对字母 x 的讨论是题目所要求的，但对字母 m 的讨论，只是看不清 $f'(x)$ 的符号才在解题中进行的，并且讨论 $m\geq 0$ 与 $m<0$ 得出的结果相同（当 $x\in(-\infty,0)$ 时，m 与 $e^{mx}-1$ 总是异号；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，m 与 $e^{mx}-1$ 总是同号），这促使我们思考：对字母 m "先分再合"的讨论，是必要的"回路"还是多余的"回路"？换句话说，$f'(x)$ 符号的确定是不是只有讨论字母 m 一条路？这一想，思路就有了，比如确定函数 $g(x)=m(e^{mx}-1)+2x$ 的单调性等.

证明 2：对已知函数求导

$$f'(x)=m\left(e^{mx}-1\right)+2x.$$

设 $g(x)=m\left(e^{mx}-1\right)+2x$，求导

$$g'(x)=m^2e^{mx}+2>0$$

得 $g(x)$ 为递增函数，且 $g(0)=0$，所以

（1）当 $x\in(-\infty,0)$ 时，有 $g(x)<g(0)=0$，即 $f'(x)<0$，得 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减.

（2）当 $x\in(0,+\infty)$ 时，有 $g(x)>g(0)=0$，即 $f'(x)>0$，得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

反思 2：这个解法的实质是求 $f(x)$ 的二阶导数，出现字

母m的平方，不用讨论字母m的符号了(对e^{mx}一次求导产生me^{mx}符号与m有关，再一次求导产生m^2e^{mx}符就号与m无关了)．但中学生怎么想到把$f'(x)$看成函数并继续求导呢？其实，$f'(x)$符号的确定还有更多的思路，注意到解法 1 用到指数函数 e^x 的单调性，抓住这一关键将其表示为$\left(x_2-x_1\right)\left(e^{x_2}-e^{x_1}\right)>0\left(x_2\neq x_1\right)$，有

证明 3：对已知函数求导

$$f'(x)=me^{mx}+2x-m=m\left(e^{mx}-1\right)+2x .$$

当$x\neq 0$时，变形为

$$f'(x)=\frac{1}{x}\bullet\left(mx-0\right)\left(e^{mx}-e^0\right)+2x . \qquad ③$$

由指数函数e^x为增函数知，对$x\neq 0$有

$\left(mx-0\right)\left(e^{mx}-e^0\right)\geq 0$．（仅当$m=0$时取等号）

（1）当$x\in(-\infty,0)$时，有$\frac{1}{x}\bullet\left(mx-0\right)\left(e^{mx}-e^0\right)\leq 0$，$2x<0$，由③知$f'(x)<0$，得$f(x)$在$(-\infty,0)$单调递减.

（2）当$x\in(0,+\infty)$时，有$\frac{1}{x}\bullet\left(mx-0\right)\left(e^{mx}-e^0\right)\geq 0$，$2x>0$，由③知$f'(x)>0$，得$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增.

第（Ⅱ）问（略）.

例 15 （2017 年数学高考理科Ⅱ卷第 23 题 10 分）已知$a>0,b>0,a^3+b^3=2$，证明：

（Ⅰ）$(a+b)(a^5+b^5)\geq 4$；（Ⅱ）$a+b\leq 2$.

证明 1　（Ⅰ）$(a+b)(a^5+b^5)=a^6+ab^5+a^5b+b^6$

$$=\left(a^3+b^3\right)^2-2a^3b^3+ab\left(a^4+b^4\right)$$

$$=4+ab\left(a^2-b^2\right)^2\ge 4.$$

反思，实质步骤是

$$(a+b)\left(a^5+b^5\right)=\left(a^3+b^3\right)^2+ab\left(a^2-b^2\right)^2\ge\left(a^3+b^3\right)^2=4,$$

$$(a+b)\left(a^5+b^5\right)\ge\left(a^3+b^3\right)^2.$$

这能直接证明吗？能，柯西不等式.

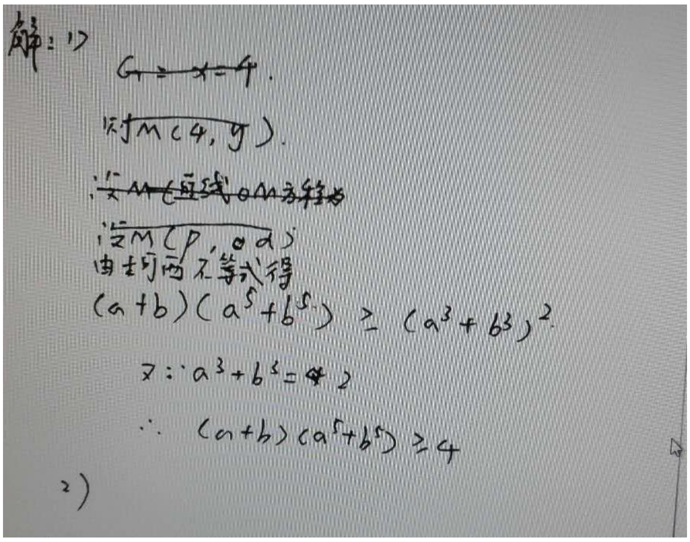
证明 2　由 $a>0,b>0,a^3+b^3=2$ 及柯西不等式，有

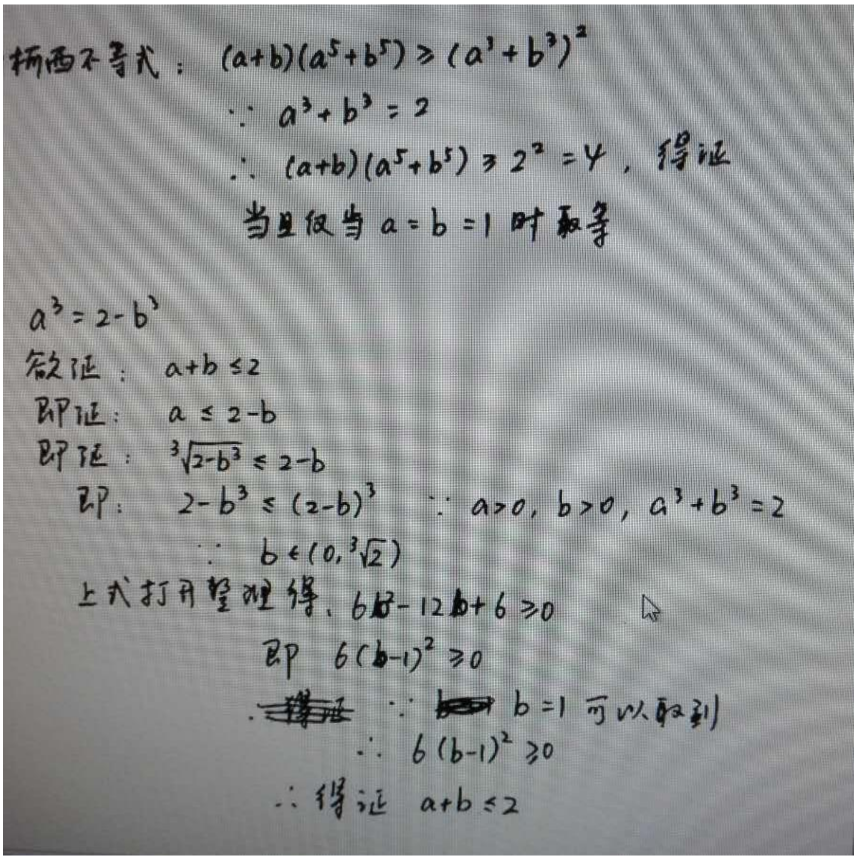
$$(a+b)\left(a^5+b^5\right)\ge\left(\sqrt{a}\sqrt{a^5}+\sqrt{b}\sqrt{b^5}\right)^2=\left(a^3+b^3\right)^2=4.$$

证明 3　由柯西不等式，有

$$(a+b)\left(a^5+b^5\right)\ge\left(a^3+b^3\right)^2=4.$$

给多少分？


解：1)
~~G = x=4~~.
则M(4, y).
~~设M(直线OM方程为~~
设M(p, αd)
由柯西不等式得
$(a+b)(a^5+b^5)\ge(a^3+b^3)^2$.
又∵ $a^3+b^3=2$
∴ $(a+b)(a^5+b^5)\ge 4$
2)



	13-16	17	18	19	20	21	22	23
文	3	15	12	12	7	10	6	13
理	3	12	14	20	9	11	11	15

3　课本糖水加糖例题与数学核心素养教学

教育部《关于全面深化课程改革 落实立德树人根本任务的意见》提出了发展核心素养体系的重大任务（2014），对于数学教学，关键是落实六个核心素养：数学抽象、逻辑

推理、数学建模、数学运算、直观想象、数据分析．课堂是培养数学核心素养的主渠道，下面通过对课本糖水加糖例题的处理，探索并积累数学素养教学的活动经验．

3-1　糖水加糖与数学活动

人教版高中数学选修 4-5《不等式选讲》第 21 页的例 2 是这样说的：如果用 akg 白糖制出 bkg 糖溶液，则糖的质量分数为 $\frac{a}{b}$．若在上述溶液中再添加 mkg 糖，此时糖的质量分数增加到 $\frac{a+m}{b+m}$，请将这个事实抽象为数学问题，并给出证明．

课本的意图首先是：展示数学内容的生活背景，具体表现为由“糖水加糖（糖水未饱和）”的生活情景提炼出“数学命题”来；然后是：经历“数学化”的完整过程，给出严格的数学证明．下面，是我们对这两个意图的落实．

3-1-1　真分数不等式的发现

（1）经历“数学化”的提炼过程．

“糖水加糖变甜了（糖水未饱和）”是一个尽人皆知的生活事实，这里有数学命题吗？该用什么样的数学关系来表达这个命题呢？我们设计的“数学化”过程有三个步骤：

①首先，“变甜”可以用大小关系来表达，记为 $p_1 < p_2$．这里用到了“用字母表示数”的思想，将实际问题转化为一个不等式问题，明确了这一点，就明确了问题解决的方向．

②其次，这个大小关系具体是什么不等式呢？这要调动

“质量分数”的概念（以前叫浓度），并继续用字母表示数，设b克糖水里有a克糖（$b>a>0$），则有$p_1=\frac{a}{b}$（是个真分数），这还没有把“加糖”反映出来，p_2有待明确；再设加入m克糖（$m>0$），得加糖后的“质量分数”为$p_2=\frac{a+m}{b+m}$（也是个真分数）. 这是根据“质量分数”的定义，具体表示出p_1，p_2来，明确了这一点，就明确了问题解决的方法.

③最后，“糖水加糖变甜了”就是：新的“质量分数”大于原来的“质量分数”，得到“真分数不等式”：一个真分数的分子、分母同时加上一个正数时，真分数的值变大. 即

命题：若$b>a>0$，$m>0$，则$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$.

如果考虑到质量分数$\frac{a}{b}$约去公约数$n>0$，那么，可以有真分数不等式的变式.

推论 1：若$b>a>0$，$n>0,m>0$，则$\frac{a}{b}<\frac{an+m}{bn+m}$.

推论 2：若$b>a>0$，$n>0,m>0$，则$\frac{a}{b}<\frac{an+bm}{bn+bm}$.

（2）**展示数学内容的更多情景.**

数学中的比和比例在生活中是广泛存在的，真分数不等式不仅有“糖水加糖”的生活情景，而且还有方方面面的具体模型，了解这些情况能使我们对真分数不等式的认识更加丰满.

①比例模型：某中学计划招收高一新生a人，使全校学生总数达到b人，高一新生所占全校学生总数的比例为$\frac{a}{b}$；后来高一扩招m人，则高一新生所占比例变为$\frac{a+m}{b+m}$，显然，高

一新生所占的比例变大了，即$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$.

②概率模型：盒中有白球和黑球共b个，其中白球a个，从中任取一个，取得白球的概率为$\frac{a}{b}$；若再加入白球m个，则从中任取一个，取得白球的概率为$\frac{a+m}{b+m}$，显然，取到白球的概率增大了，即$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$.

③物理模型：体积为b毫升的酒精溶液中有在a克酒精，其密度为$\frac{a}{b}$;若再加入m毫升酒精,则酒精溶液的密度为$\frac{a+m}{b+m}$，显然，此时酒精溶液的密度增大了，即$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$.

④化学模型：a克物质溶于水配成b克溶液，溶液的质量分数为$\frac{a}{b}$；若再加入m克该物质，则溶液的质量分数为$\frac{a+m}{b+m}$，显然，此时溶液的质量分数增大了，即$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$.

⑤建筑模型：建筑学规定，民用住宅的窗户面积必须小于地板面积，但按采光标准，窗户面积和地板面积之比应不小于 10%，且这个比值越大，采光越好．设窗户面积为a，地板面积为b，则 0<$\frac{a}{b}$<1；若窗户和地板面积均增加m，则采光条件变好，即$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$.

⑥矩形模型：称宽与长的比为 5：12 的矩形为黄金矩形．某城市有一个黄金矩形的广场，现在其一角设计一个矩形草坪，另一角是等宽的步行道，问能否选取步行道的恰当宽度，使矩形草坪仍为黄金矩形？如图 14，草坪的宽、

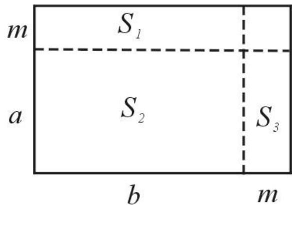


图 14

长分别为a，b，步行道的宽度为m，由 $b>a$，有$S_1>S_3 \Leftrightarrow bm>am$，两边加上$S_2=ab$，得$S_2+S_1>S_2+S_3 \Leftrightarrow b(a+m)>a(b+m)$，变形即得$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$，即矩形草坪不可能为黄金矩形.

⑦椭圆模型：对于$b>a>0,m>0$，椭圆$\frac{x^2}{b}+\frac{y^2}{a}=1$的离心率为$e_1=\sqrt{1-\frac{a}{b}}$，椭圆$\frac{x^2}{b+m}+\frac{y^2}{a+m}=1$的离心率为$e_2=\sqrt{1-\frac{a+m}{b+m}}$，则$e_2<e_1$等价于$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

后面还会继续显示真分数不等式的图形直观，这些直观使我们愈加相信真分数不等式是真命题，具体数值$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{4}{5}$等也表明：分子、分母同时加上一个正数，真分数的值确实变大了，下面，我们来探索结论成立的证明.

3-1-2　真分数不等式的逻辑证明

真分数不等式的证明囊括了从代数到几何的几十种方法（有人给出了 30 个思路），启发学生探求各种证明的思路，沟通相关方法的内在联系，可以体现化归与转化的数学思想，函数与方程的数学思想，数形结合的数学思想，以及抽象概括能力，推理论证能力，运算求解能力，应用与创新意识等.

（1）不等式证明的代数方法.

真分数不等式的代数证明能体现分析法、综合法、比较法、反证法、放缩法、换元法、增量法、以及解不等式、差异分析等多种基本方法，是熟悉不等式代数证明的一个好途径.

证明 1 （分析法）因为$b>a>0$，$m>0$，欲证明

$$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m},$$

只需证 $a(b+m)<b(a+m)$，

只需证 $am<bm$，

只需证 $a<b$，

这已成立，故有命题成立.

证明 2 （综合法）由$b>a>0$，$m>0$，有

$$bm>am, \qquad ①$$

两边加上ab，有

$$ab+bm>ab+am,$$

整理 $b(a+m)>a(b+m)$，②

变形得命题成立.

说明 1：综合法是分析法的逆向书写，其过程的面积含义如图 1 中的矩形所示，$S_1>S_3$对应①式$bm>am$，$S_2+S_1>S_2+S_3$对应②式$b(a+m)>a(b+m)$，数与形恰成对应.

证明 3 （作差比较法）由$b>a>0$，$m>0$，有

$$\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}=\frac{b(a+m)-a(b+m)}{b(b+m)}=\frac{m(b-a)}{b(b+m)}>0, \qquad ③$$

变形得命题成立.

证明 4 （作商比较法）由$b>a>0$，$m>0$，有

$$\frac{\frac{a+m}{b+m}}{\frac{a}{b}}=\frac{ab+bm}{ab+am}>1,$$

变形得命题成立.

说明 2：比较法把两个式子的大小比较，转化为一个式子与 0（作差时）或与 1（作商时）比较.

证明 5 （反证法）假设命题不成立，则存在$b_0>a_0>0$及$m_0>0$，使

$$\frac{a_0+m_0}{b_0+m_0}\le\frac{a_0}{b_0},$$

由$b_0>0$，$b_0+m_0>0$，有

$$b_0\left(a_0+m_0\right)\le a_0\left(b_0+m_0\right),$$

两边减去a_0b_0，有

$$b_0m_0\le a_0m_0,$$

两边除以$m_0>0$，有

$$b_0\le a_0,$$

这与已知$b_0>a_0$矛盾，故得$b>a>0$，$m>0$时，有$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

证明 6 （解不等式）设$x=\frac{a+m}{b+m}$，得$m=\frac{a-bx}{x-1}$，由$m>0$，得不等式

$$\frac{a-bx}{x-1}>0,$$

解得 $$\frac{a}{b}<x<1,$$

即 $$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}<1.$$

证明 7 （放缩法）观察不等式两边可以看到一个明显

的差异：不等式右边分子、分母都加上了字母$m>0$，左边没有m．立即作出消除差异的反应，并积累起来，有

$$\frac{a}{b}=\frac{a(b+m)}{b(b+m)}$$（消除左右两边有无m的差异）

$$=\frac{a+\frac{a}{b}m}{b+m}$$（消除分母上的差异）

$$<\frac{a+m}{b+m}$$（消除分子上的差异）

说明 3：这里使用了差异分析的策略，有 3 个步骤：找出不等式两边的差异；作出消除差异的反应（经过 3 次消除）；把消除差异的效果积累起来直至没有差异．同理，有更多的放缩方式，如

$$\frac{a}{b}=\frac{a(a+m)}{b(a+m)}=\frac{a+m}{b+\frac{b}{a}m}<\frac{a+m}{b+m}.$$

$$\frac{a+m}{b+m}=\frac{a(a+m)}{a(b+m)}=\frac{a^2+am}{ab+am}>\frac{a^2+am}{ab+bm}=\frac{a}{b}.$$

$$\frac{a+m}{a+m}=\frac{b(a+m)}{b(b+m)}=\frac{ab+bm}{b^2+bm}>\frac{ab+am}{b^2+bm}=\frac{a}{b}.$$

证明 8　（换元法）设$b=\lambda a$（$\lambda>1$），有

$$\frac{a+m}{b+m}=\frac{a+m}{\lambda a+m}>\frac{a+m}{\lambda a+\lambda m}=\frac{a+m}{\lambda\left(a+m\right)}=\frac{1}{\lambda}=\frac{a}{b}.$$

证明 9　（增量法）设$b=a+t,t>0$，有

$$\frac{a+m}{b+m}=\frac{a+m}{a+t+m}=1-\frac{t}{a+t+m}>1-\frac{t}{a+t}=\frac{a}{b}.$$

说明 4：增量即是$t=b-a$，可以用$b-a$来代替，改写为

证明 10 （放缩法）$\frac{a+m}{b+m}=\frac{b+m-(b-a)}{b+m}=1-\frac{b-a}{b+m}>1-\frac{b-a}{b}=\frac{a}{b}$.

（2）不等式证明的“数形结合”方法.

真分数不等式证明的“数形结合”方法需要构造性思维，可以构造函数、构造定比分点、构造直线斜率、构造复数、构造几何图形等，有的构造途径是借助坐标系来沟通“数”与“形”的联系，有的则直接给“式子”赋予几何意义.

①首先，我们注意到，证明 7 至证明 10 的关键步骤是放缩，这可用函数单调性来代替，由此，导致函数更多性质的导入.

证明 11（函数的单调性）设 $f(x)=\frac{a+x}{b+x}\ (x\geq 0)$，因为 $b>a>0$，所以

$$f'(x)=\frac{b-a}{(b+x)^2}>0,$$

得 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 递增，故对 $m>0$，有

$$f(m)>f(0),$$

变形得命题成立.

说明 5：对函数 $f(x)=\frac{a+x}{b+x}\ (x\geq 0)$ 求值域就是证明 6 中的“解不等式”.

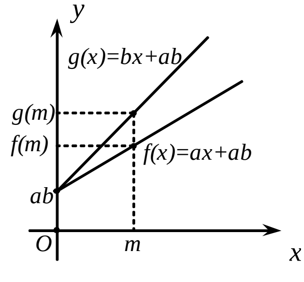


图 15

证明 12 （两直线斜率的比较）对 $b>a>0$ 作函数 $f(x)=ax+ab$ 及 $g(x)=bx+ab$，当 $x\geq 0$ 时它们的图像如图 15 所示，除了点 $(0,ab)$

之外，函数 $f(x)=ax+ab$ 的图像位于函数 $g(x)=bx+ab$ 图像的下方，因而对 $m>0$，有 $f(m)<g(m)$，变形得 $\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$.

证明 13 （定积分的几何意义）函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 当 $x>0$ 时是减函数，如图 16，曲边梯形 $ABCD$ 的面积大于曲边梯形 $EFGH$ 的面积，对 $b>a>0, m>0$，由定积分的几何意义，有

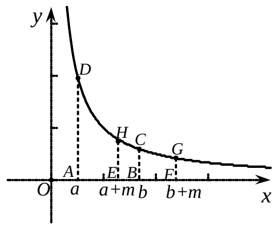


图 16

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx>\int_{a+m}^{b+m}\frac{1}{x}dx,$$

得
$$\ln\frac{b}{a}>\ln\frac{b+m}{a+m},$$

得
$$\frac{b}{a}>\frac{b+m}{a+m},$$

变形得命题成立.

证明 14 （定积分的几何意义）函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 当 $x>0$ 时是减函数，如图 16，曲边梯形 $AEHD$ 的面积大于曲边梯形 $BFGC$ 的面积，对 $b>a>0, m>0$，由定积分的几何意义，有

$$\int_a^{a+m}\frac{1}{x}dx>\int_b^{b+m}\frac{1}{x}dx,$$

得
$$\ln\frac{a+m}{a}>\ln\frac{b+m}{b},$$

得
$$\frac{a+m}{a}>\frac{b+m}{b},$$

变形得命题成立.

说明 6：上面，由代数变形到函数图像，已经体现了“从代数到几何”的沟通，如果对“作差法”的③式作变形，把

$$\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}=\frac{(b-a)m}{b(b+m)}=\frac{m}{b}\left(1-\frac{a+m}{b+m}\right),$$

变为
$$\frac{\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}}{1-\frac{a+m}{b+m}}=\frac{m}{b}>0,$$
则又呈现出几何意义：$\frac{a+m}{b+m}$分$\frac{a}{b}$，1为定比$\lambda=\frac{m}{b}>0$，这就与定比分点公式沟通了.

证明 15 （定比分点法）变形，由$\frac{a+m}{b+m}=\frac{\frac{a}{b}+\frac{m}{b}\bullet 1}{1+\frac{m}{b}}$，知$\frac{a+m}{b+m}$分$\frac{a}{b}$，$1$为定比$\lambda=\frac{m}{b}>0$，得
$$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}<1,$$
更有命题成立.

说明 7: 定比分点解法表明了两个极限状态：当$m\to 0$时，$\frac{a+m}{b+m}\to\frac{a}{b}$；当$m\to+\infty$时，$\frac{a+m}{b+m}\to 1$. 这个一维线段上的变化情况也可以呈现在二维平面上：如图 17，点$P(b,a)$为坐标平面内一点，因为$0<a<b$，所以点$P(b,a)$在直线$L_0:y=x$的下方，$\frac{a}{b}$表示直线OP的斜率；同样，$\frac{a+m}{b+m}$表示点$P_1(b+m,a+m)$与点$O(0,0)$连线OP_1的斜率. 易知，m增大、从而点P_1变为点P_2时，直线PP_1、PP_2的斜率均为 1，所以点P_1在以点P为端点、斜率为 1 的射线L_1上运动，并有$L_1//L_0$. 由图 17 可见，当$m\to 0$时，点P_1沿射线L_1趋向点P、OP_1趋向OP，有$\frac{a+m}{b+m}\to\frac{a}{b}$；当$m\to+\infty$时，点$P_1$沿射线$L_1$趋向无穷、$OP_1$趋向直线$L_0:y=x$，有$\frac{a+m}{b+m}\to 1$. 故有$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}<1$.

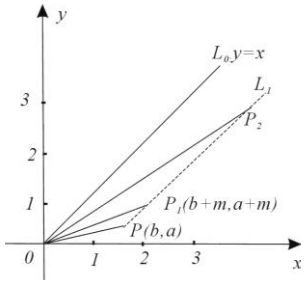


图 17

在下面的解法中还会继续呈现这个几何意义.

证明 16（直线的斜率）如图 18 所示，在直角坐标系中，

$$\frac{a+m}{b+m}=\frac{a-(-m)}{b-(-m)}$$

表示经过点 $A(b,a)$ 与点 $B(-m,-m)$ 的直线斜率（$b>a>0,m>0$），设其倾斜角为 α；而

$$\frac{a}{b}=\frac{a-0}{b-0}$$

表示经过点 $A(b,a)$ 与原点的直线斜率，设其倾斜角为 β.

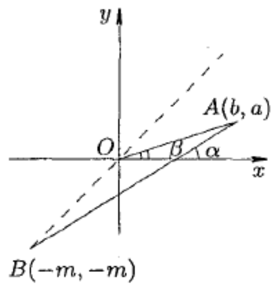


图 18

由 $a<b$ 知，A,B,O 三点不共线，且点 A 在直线 OB 的下方，故有

$$0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{4}\Rightarrow k_{OA}<k_{AB}<k_{OB}\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}<1.$$

证明 17 （直线的斜率）在直角坐标系中，设 $A(b,a)$，$B(m,m)$（$b>a>0,m>0$），则线段 AB 的中点为 $C\left(\frac{b+m}{2},\frac{a+m}{2}\right)$，如图 19 所示，有

$$k_{oA}<k_{OC}<k_{OB},$$

得

$$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}<1.$$

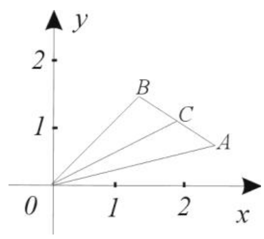
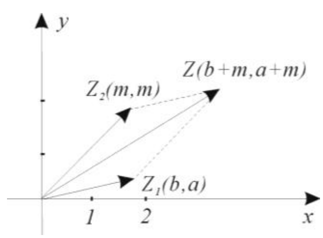


图 19

证明 18 （直线的斜率）对 $b>a>0$，$m>$，取复数 $z_1=b+ai,z_2=m+mi$，有

$$z=z_1+z_2=(b+m)+(a+m)i,$$

如图 20，由复数加法的平行四边形法



则，有

$$k_{OZ_1} < k_{OZ} < k_{OZ_2},$$

图 20

得 $$\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m} < 1.$$

②其次，比和比例在几何中是大量存在的，它们可以与面积大小（见图 14、图 17），角度大小（见图 13、图 18、图 19、图 20），图形相似、平行线截割等内容相通，体现为代数不等式的几何证明.

证明 19 （角度大小）如图 21 所示，在 RtΔABC 中，$\angle C = 90^\circ$，$BC = a$，$AC = b$（$b > a > 0$），延长 CA 到 D，延长 CB 到 E，使 $AD = BE = m$（$m > 0$），又设 BA, ED 交于 F，则有

$$\tan\angle CAB = \frac{a}{b}, \quad \tan\angle CDE = \frac{a+m}{b+m},$$

由 $$\angle CAB = \angle DAF < \angle CDE < 90^0,$$

有 $$\tan\angle CAB < \tan\angle CDE,$$

得 $$\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}.$$

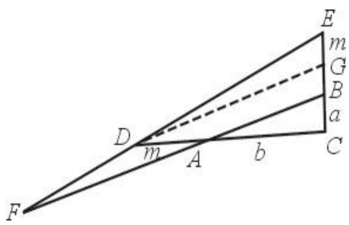


图 21

证明 20 （三角形相似）在图 21 的基础上，过 D 作 $DG // AB$ 交线段 BE 于 G，有

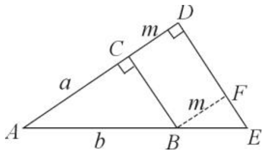
$$\Delta ABC \sim \Delta DGC,$$

则 $$\frac{a}{b} = \frac{CG}{CD} < \frac{CE}{CD} = \frac{CB+BE}{CA+AD} = \frac{a+m}{b+m},$$

故 $$\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}.$$

证明 21 （平面几何）如图 22，在 RtΔABC 中，$\angle C = 90^\circ$，$AC = a$，$AB = b$（$b > a > 0$），延 AC 到 D，使 $CD = m$（$m > 0$），过 D

作CB的平行线交AB的延长线于E，有



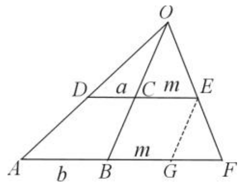
$$\Delta ABC \sim \Delta AED,$$

则
$$\frac{a}{b}=\frac{AD}{AE}=\frac{AC+CD}{AB+BE}<\frac{AC+CD}{AB+BF}=\frac{a+m}{b+m},$$

故
$$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}.$$

图 22

证明 22 （平行线截割）如图 23，梯形$ABCD$的两底$AB=b, CD=a$（$b>a>0$），延长两腰AD, BC相交于O，又延长DC到E，使$CE=m$（$m>0$），联结OE交AB的延长线于F，由平行线截割定理，有



$$\frac{a}{b}=\frac{OD}{OA}=\frac{DE}{AF}<\frac{DE}{AG}=\frac{DC+CE}{AB+BG}=\frac{a+m}{b+m},$$

故
$$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}.$$

图 23

还可以提供更多的证明，但仅此已从不同的角度揭示出$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$这一形式的多种表现，这是数学内部各块知识有机统一的有力证明，它有助于学生洞察问题的深层结构、并形成优化的认知识结构．

同时，整个问题解决的过程蕴含了从生活现象抽象出数学模型，再到严谨数学证明的完整过程，对学生学数学、用数学的意识是很有帮助的．学生不再觉得数学离我们的生活很远，学习数学是非常有意义、非常有趣的事情．学习数学可以帮助我们解决、解释很多问题和现象．从课堂教学效果来看，学生学习的兴趣和积极性得到了较大的提高．

3-2　数学活动分析与数学素养培养

真分数不等式的提炼和论证为发展学生的数学素养准备

了丰富的物质基础，教师首先要不失时机地显化内容所蕴含的数学素养，同时要通过实际应用去巩固和提升数学素养．

3-2-1　糖水活动的数学素养分析

应该看到，作为“必备品格与关键能力”的核心素养是隐含在数学知识和数学方法背后的内容，除非教师作出自觉的显化、否则，让学生去自发领悟是有实际困难的．在真分数不等式的提炼和论证中到底蕴含着哪些数学素养？又具体表现在什么地方？从中能获得哪些收获等都需要教师去组织和启发．我们的分析表明，这个活动蕴含有数学建模、数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算等数学素养．

（1）**数学建模．**

数学建模是对现实问题进行抽象，用数学语言表达和解决问题的过程．具体表现为：在实际情境中，从数学的视角提出问题、分析问题、表达问题、构建模型、求解结论、验证结果、改进模型，最终得到符合实际的结果．

“糖水加糖”不是数学（扩招新生、模取白球、溶液密度、住宅采光、草地设计等也不是数学），经过三个步骤将其提炼为“不等式”：“一个真分数的分子、分母同时加上一个正数时，真分数的值变大”（文字叙述）或“若 $b>a>0$，$m>0$，则 $\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$”（符号叙述）时，就是从数学的角度对生活事实进行抽象，并加以表达和解决．学生在这个提炼和论证的活动中，经历了数学建模的基本过程，也积累了用数学语言表

达实际问题的经验，从中可以感受到生活中到处都有数学的原型和数学的应用，提升应用能力和创新意识．

（2）**数学抽象**

数学抽象是指舍去事物的一切物理属性，得到数学研究对象的思维过程．主要包括：从数量与数量关系、图形与图形关系中抽象出数学概念及概念之间的关系，从事物的具体背景中抽象出一般规律和结构，并且用数学符号或者数学术语予以表征．

将“糖水加糖”以及扩招新生、模取白球、溶液密度、住宅采光、草地设计等提炼为“真分数不等式”并加以证明，就是从事物的“数量关系”中抽取出共同的、本质的属性，而舍弃其非本质属性的思维过程，就是把某些具有一些相同属性的事物中抽取出来的本质属性，推广到具有这些属性的一切事物，从而形成关于这类事物的普遍概念的概括过程．提炼出来的比$\frac{a}{b},\frac{a+m}{b+m}$及其大小关系$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$已经完全脱离“糖水、新生、白球、溶液、住宅、草地”等具体情景，而成为符号化、形式化的数学模式．学生在这个“去情境化、去个性化”的模式化过程中，可以理解不等式及其证明方法，形成一般性思考数学问题的习惯．

（3）**逻辑推理**

逻辑推理是指从一些事实和命题出发，依据逻辑规则推出一个命题的思维过程．它是得到数学结论、构建数学体系

的重要方式，是数学严谨性的基本保证．逻辑推理是数学交流的基本品质，使数学交流具有逻辑性．

真分数不等式的 20 多个证明主要是演绎推理，所出现的众多方法（分析法、综合法、比较法、反证法、放缩法、换元法、增量法、以及构造函数、构造定比分点、构造直线斜率、构造复数、构造几何图形等），既有顺向思维又有逆向思维，既有直接证法又有间接证法，既有代数证法又有几何证法、还有数形结合的证法，教师可以有选择地应用于自己的学生和自己的课堂，帮助学生掌握推理的形式，表述论证的过程，理解数学知识之间的联系，形成有论据、有条理、合乎逻辑的思维习惯和交流能力．

真分数不等式的证明是熟悉不等式证明的一个好途径．

（4）**直观想象**

直观想象是指借助空间想象感知事物的形态与变化，利用几何图形理解和解决数学问题．主要包括：利用图形描述数学问题，建立形与数的联系，构建数学问题的直观模型，探索解决问题的思路．

“真分数不等式”的提炼和证明充满直观想象，从提出数学问题到论证解决，从构造函数和坐标系、到构造几何图形及其比例线段，数与形的联系已经成为逻辑推理的思维基础，并有助于学生养成数形结合的习惯，建立良好的数学直觉．

分析“真分数不等式”提炼和证明中的“数形结合”可

以看到 3 个基本形式：

①将“真分数不等式”中的字母m动起来产生函数，如$f(x)=\frac{a+x}{b+x}$，$f(x)=ax+ab$及$g(x)=bx+ab$等；对函数$f(x)=\frac{a+x}{b+x}\ (x\geq 0)$既可以利用单调性又可以求值域. 在这里，坐标系成为了“数形结合”的桥梁.

②将“真分数不等式”中比的形式$\frac{a}{b},\frac{a+m}{b+m}$与直线的倾斜角（斜率）、椭圆的离心率、或相似三角形的比例线段、平行线截割等知识沟通. 在这里，“数形结合”的桥梁既有坐标系，又有对应：给抽象的“数”赋予“量”的具体内容.

③将“真分数不等式”作变形产生面积、定积分和定比分点等. 把$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$变为$b(a+m)>a(b+m)$就可以产生矩形面积，而变为$\ln b-\ln a>\ln(b+m)-\ln(a+m)$就又产生定积分；若把$\frac{a+m}{b+m}$变为$\frac{\frac{a}{b}+\frac{m}{b}\bullet 1}{1+\frac{m}{b}}$则产生定比分点. 这里，需要对应，把正数$a,b,m$对应为线段的长度，把$am,bm$对应矩形的面积，把$am,bm$ $b(a+m)>a(b+m)$对应为一个矩形的面积大于另一个矩形的面积等.

（5）**数学运算**

数学运算是指在明晰运算对象的基础上，依据运算法则解决数学问题. 主要包括：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算方向，选择运算方法，设计运算程序，求得运算结果.

在“真分数不等式”的提炼和证明中，虽然抽象概括和逻辑推理比运算的要求更高，但运算依然是构成数学抽象结构的基本要素，依然是演绎推理的重要形式，一般地说，20多个证明的每一个都离不开数式的运算与变形，特别地，证明 6 还把不等式的证明转化为不等式的求解．在这里，不仅有恒等变形而且有放缩变形，不仅有单纯的运算而且有推理的结合——推理提出了运算的需要，运算的结果提供了推理的依据，运算的目的性得到了强调，一丝不苟的科学精神得到了强调．

3-2-2　真分数不等式的简单应用

应用“真分数不等式”去解决数学问题，不仅是对“真分数不等式”的巩固，同时要也是对数学素养的检验与提升．下面编选的是一些高考题．

例 13　（1989 年广东高考题）如果 $0<m<b<a$，那么（　）

$(A)\cos\frac{b+m}{a+m}<\cos\frac{b}{a}<\cos\frac{b-m}{a-m}$

$(B)\cos\frac{b}{a}<\cos\frac{b-m}{a-m}<\cos\frac{b+m}{a+m}$

$(C)\cos\frac{b-m}{a-m}<\cos\frac{b}{a}<\cos\frac{b+m}{a+m}$

$(D)\cos\frac{b+m}{a+m}<\cos\frac{b-m}{a-m}<\cos\frac{b}{a}$

解　对 $0<m<b<a$，由真分数不等式有

$$1>\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}>\frac{b-m}{a-m}>0,$$

又由余弦函数在上的单调性的 $[0,1]$

$$\cos\frac{b+m}{a+m}<\cos\frac{b}{a}<\cos\frac{b-m}{a-m}.$$

例 14　（1985 年上海高考题）对一切大于 1 的自然数，求证：

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{\sqrt{2n+1}}{2}.$$

证明　由真分数不等式，有

$$\frac{3}{4}<\frac{4}{5},\ \frac{5}{6}<\frac{6}{7},\ \cdots,\frac{2n-1}{2n}<\frac{2n}{2n+1},$$

得
$$\left(\frac{3}{4}\right)^2\bullet\left(\frac{5}{6}\right)^2\bullet\left(\frac{7}{8}\right)^2\bullet\cdots\bullet\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)^2\bullet\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2$$

$$<\left(\frac{3}{4}\bullet\frac{4}{5}\right)^2\bullet\left(\frac{5}{6}\bullet\frac{6}{7}\right)^2\bullet\left(\frac{7}{8}\bullet\frac{8}{9}\right)^2\bullet\cdots\bullet\left(\frac{2n-1}{2n}\bullet\frac{2n}{2n+1}\right)^2$$

$$=\frac{3}{4}\bullet\frac{4}{5}\bullet\frac{5}{6}\bullet\frac{6}{7}\bullet\frac{7}{8}\bullet\frac{8}{9}\bullet\cdots\bullet\frac{2n-1}{2n}\bullet\frac{2n}{2n+1}$$

$$=\frac{3}{2n+1}<\frac{4}{2n+1},$$

得
$$\frac{3}{4}\bullet\frac{5}{6}\bullet\frac{7}{8}\bullet\cdots\bullet\frac{2n-3}{2n-2}\bullet\frac{2n-1}{2n}>\frac{2}{\sqrt{2n+1}},$$

所以
$$\frac{4}{3}\bullet\frac{6}{5}\bullet\frac{8}{7}\bullet\cdots\bullet\frac{2n-2}{2n-3}\bullet\frac{2n}{2n-1}>\frac{\sqrt{2n+1}}{2},$$

即
$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{\sqrt{2n+1}}{2}.$$

例 15　（1995 年理科全国卷）设$\{a_n\}$是由正数组成的等比数列，S_n是其前n项和.

（Ⅰ）证明$\frac{\lg S_n+\lg S_{n+2}}{2}<\lg S_{n+1}$；

（Ⅱ）是否存在常数$c>0$，使得$\frac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c)$.

讲解　（1）所证结论或许会使我们在两个等价式

$$S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2 \qquad ①$$

与 $$\frac{S_n}{S_{n+1}}<\frac{S_{n+1}}{S_{n+2}} \qquad ②$$

之间犹豫（甚至在乘除法之间选择乘法），而一旦想到真分数不等式，则②式已接近完成：由$\{a_n\}$为递增的正项数列有$S_{n+2}>S_{n+1}>S_n>0$，用真分数不等式得

$$\frac{S_{n+1}}{S_{n+2}}=\frac{a_1+qS_n}{a_1+pS_{n+1}}>\frac{qS_n}{qS_{n+1}}=\frac{S_n}{S_{n+1}}.$$

（Ⅱ）略.

例 13 （2004 年文科全国卷）已知数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_2=6,\ a_5=162$，

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式

（Ⅱ）设S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，证明$\frac{S_n \bullet S_{n+2}}{S_{n+1}^2}\le 1$.

解说 本例的第（2）问与上例的第（1）问实质相同.（撞题了）

例 14 （1998 年理科全国卷）已知数列$\{b_n\}$是等差数列，$b_1=1,\ b_1+b_2+\cdots+b_{10}=145$，

（Ⅰ）求数列$\{b_n\}$的通项b_n；

（Ⅱ）设数列$\{a_n\}$的通项$a_n=\log_a(1+\frac{1}{b_n})$（其中$a>0$,且$a\ne 1$），记$S_n$是数列$\{a_n\}$前$n$项和．试比较$S_n$与$\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$的大小，并证明你的结论.

讲解 （Ⅰ）易得$d=3$，从而$b_n=3n-2$.

（Ⅱ）由$b_n=3n-2$，知

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\log_a(1+\frac{1}{b_k})$$

$$=\log_a(1+1)\bullet\left(1+\frac{1}{4}\right)\bullet\cdots\bullet\left(1+\frac{1}{3n-2}\right),$$

$\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}=\log_a\sqrt[3]{3n+1}$，

要比较 S_n 与 $\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$ 的大小，只需比较 $(1+1)\bullet\left(1+\frac{1}{4}\right)\bullet\cdots\bullet\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)$ 与 $\sqrt[3]{3n+1}$ 的大小.

由真分数不等式有

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4},$$
$$\frac{4}{5}<\frac{5}{6}<\frac{6}{7},$$
$$\frac{7}{8}<\frac{8}{9}<\frac{9}{10},$$
$$\cdots$$
$$\frac{3n-2}{3n-1}<\frac{3n-1}{3n}<\frac{3n}{3n+1},$$

得 $$\left(\frac{1}{2}\bullet\frac{4}{5}\bullet\frac{7}{8}\bullet\cdots\bullet\frac{3n-2}{3n-1}\right)^3$$

$$<\left(\frac{1}{2}\bullet\frac{2}{3}\bullet\frac{3}{4}\right)\bullet\left(\frac{4}{5}\bullet\frac{5}{6}\bullet\frac{6}{7}\right)\bullet\left(\frac{7}{8}\bullet\frac{8}{9}\bullet\frac{9}{10}\right)\bullet\cdots\bullet\left(\frac{3n-2}{3n-1}\bullet\frac{3n-1}{3n}\bullet\frac{3n}{3n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3n+1},$$

得 $$\frac{1}{2}\bullet\frac{4}{5}\bullet\frac{7}{8}\bullet\cdots\bullet\frac{3n-2}{3n-1}<\frac{1}{\sqrt[3]{3n+1}},$$

得 $$\frac{2}{1}\bullet\frac{5}{4}\bullet\frac{8}{7}\bullet\cdots\bullet\frac{3n-1}{3n-2}>\sqrt[3]{3n+1},$$

即 $$(1+1)\bullet\left(1+\frac{1}{4}\right)\bullet\cdots\bullet\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)>\sqrt[3]{3n+1},$$

所以，当 $a>1$ 时，$S_n>\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$；当 $0<a<1$ 时，$S_n<\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$.

例 15 （2001 年理科全国卷）已知i,m,n是正整数，且$1<i\le m<n$.

（Ⅰ）证明：$n^iA_m^i<m^iA_n^i$；

（Ⅱ）证明：$(1+m)^n>(1+n)^m$.

讲解 （Ⅰ）这道题目只有 9 个文字、5 个字母，简洁抽象，当年得分率不到 0.2．但是，题目的字面含义很简单，条件是 3 个正整数i,m,n满足$1<i\le m<n$,结论是证明一个不等式$n^iA_m^i<m^iA_n^i$，关键是理解字母符号的数学含义．一旦理解了题目的数学含义，证明不算曲折．由$1<i\le m<n$，知$0<\frac{m}{n}<1$，用真分数不等式，有

$$\frac{m}{n}>\frac{m-1}{n-1}>\cdots>\frac{m-i+1}{n-i+1}>0,$$

得
$$\left(\frac{m}{n}\right)^i>\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-i+1)}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}=\frac{A_m^i}{A_n^i}.$$

若把求证转化为$\frac{A_m^i}{m^i}<\frac{A_n^i}{n^i}$，则这个抽象的数学不等式可有十分显浅的现实含义：设i个人等可能地分配到N个房间中的任一间去住，记事件A为“恰有i个房间住一人”，则有$P_N(A)=\frac{A_N^i}{N^i}$．因为房间的数量越多（N越大），则每个人住单间的可能性越大（$P_N(A)$越大），于是当$1<i\le m<n$时有$P_m(A)<P_n(A)$，即$n^iA_m^i<m^iA_n^i$.

（Ⅱ）略.

例 16 （2009 年数学高考理科山东卷）等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知对任意的$n\in N^+$，点(n,S_n)均在函数$y=b^x+r$

（$b>0$且$b\neq 1, b, r$均为常数)的图像上．

（Ⅰ）求r的值；

（Ⅱ）当$b=2$时，记$b_n=2\left(\log_2 a_n+1\right)$（$n\in N^+$），证明：对任意的$n\in N^+$，不等式$\frac{b_1+1}{b_1}\bullet\frac{b_2+1}{b_2}\bullet\cdots\bullet\frac{b_n+1}{b_n}>\sqrt{n+1}$成立．

解　（Ⅰ）因为对任意的$n\in N^+$，点(n,S_n)均在函数$y=b^x+r$（$b>0$且$b\neq 1, b, r$均为常数)的图像上．所以得

$$S_n=b^n+r．$$

当$n=1$时，$a_1=S_1=b+r$，

当$n\geq 2$时，

$$a_n=S_n-S_{n-1}=b^n+r-(b^{n-1}+r)=b^n-b^{n-1}=(b-1)b^{n-1},$$

为使$\{a_n\}$为等比数列，应有

$$a_1=b+r=b-1，公比为b，$$

所以$r=-1$，且$a_n=(b-1)b^{n-1}$．

（Ⅱ）当$b=2$时，有

$$a_n=(b-1)b^{n-1}=2^{n-1},$$

$$b_n=2\left(\log_2 a_n+1\right)=2(\log_2 2^{n-1}+1)=2n,$$

得
$$\frac{b_n+1}{b_n}=\frac{2n+1}{2n},$$

则
$$\frac{b_1+1}{b_1}\cdot\frac{b_2+1}{b_2}\cdots\cdots\frac{b_n+1}{b_n}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{2n+1}{2n}．$$

由真分数不等式有

$$\frac{2}{3}<\frac{3}{4},\frac{4}{5}<\frac{5}{6},\frac{6}{7}<\frac{7}{8},\cdots,\frac{2n}{2n+1}<\frac{2n+2}{2n+2},$$

从而 $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \bullet \left(\frac{4}{5}\right)^2 \bullet \left(\frac{6}{7}\right)^2 \bullet \cdots \bullet \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2$

$$< \left(\frac{2}{3} \bullet \frac{3}{4}\right) \bullet \left(\frac{4}{5} \bullet \frac{5}{6}\right) \bullet \left(\frac{6}{7} \bullet \frac{7}{8}\right) \bullet \cdots \bullet \left(\frac{2n}{2n+1} \bullet \frac{2n+1}{2n+2}\right)$$

$$= \frac{2}{3} \bullet \frac{3}{4} \bullet \frac{4}{5} \bullet \frac{5}{6} \bullet \frac{6}{7} \bullet \frac{7}{8} \bullet \cdots \bullet \frac{2n}{2n+1} \bullet \frac{2n+1}{2n+2}$$

$$= \frac{1}{n+1},$$

得 $\frac{2}{3} \bullet \frac{4}{5} \bullet \frac{6}{7} \bullet \cdots \bullet \frac{2n}{2n+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$,

所以 $\frac{3}{2} \bullet \frac{5}{4} \bullet \frac{7}{6} \bullet \cdots \bullet \frac{2n+1}{2n} > \sqrt{n+1}$.

口号

●我们应当学会这样一种对待习题的态度，即把习题看做是精密研究的对象，而把解答问题看做是设计和发明的目标.

●我们应该有这样的信念，没有任何一道题是可以解决得十全十美的，总剩下些工作要做，经过充分的探讨总结，总会有点滴的发现，总能改进这个解答的理解水平.

●我们应把解答问题发展为获得新知识和新技能的学习过程.（而不仅仅是学习结果的巩固）

●我们的解题实践表明：分析典型例题的解题过程是学会解题的有效途径，至少在没有找到更好的途径之前，这是一个无以替代的好主意. 因而，解题学习要经历：记忆模仿、变式练习、自发领悟、自觉领悟.

数学解题的四个阶段.

学会解题的四个步骤呈现了人们数学解题的四个阶段：模仿、变式、领悟、理解.

（1）数学解题的模仿阶段．能模仿着教师或教科书的示范去解决一些识记性的问题，会套解题公式，但稍一变化就不会了；解题常常只是为了完成任务，解题的目的就是获得答案，题目解完之后也说不清自己是怎么想的，用了哪些知识、用了哪些方法．很多学生“课堂上的容能够听懂，但课后作业难以独立完成”就是停留在这个简单模仿的水平上.

（2）数学解题的变式阶段：经过数量足够的模仿之后，题型积累有所增加，可以解决一些形式稍有变化的习题，获得答案之后也能说说自己是怎么想的，用了哪些知识、用了哪些方法，有的题目还能进行一题多解、并升起通过解题来提高数学能力的朦胧意识．优秀学生和广大数学教师能达到这个水平.

（3）数学解题的领悟阶段：经过变式练习，题型积累的质量有所提升，对解题思路的探求能够开始有意识的设计，解题不仅要获得答案，不仅能说出自己的思路，用了哪些知识、哪些方法，而且能领悟当中的数学思想，领悟问题的深层结构，能一解多题，并作出一些简单推广，但是，这种领悟带有自发的性质，常常是“只可意会，不可言传”．个别学生和优秀数学教师能够达到这个水平.

（4）数学解题的理解阶段：在领悟解题的基础上，能

进一步做到数学问题的迅速识别，解题思路的主动设计、知识资源的理性配置、解题方法的灵活运用、解题策略的适宜调控，解题过程的自觉反思，努力通过解题去获得数学的理解，使认识进入深层结构．能从数学操作和正确答案中看到数学知识和数学方法的应用，能从数学知识和数学方法中看到数学思想和思维策略的指导，能从数学思想和思维策略中提炼（DNA）数学核心素养，获得态度、情感的熏陶，形成正确的价值观念、必备品格和关键能力．