苏州大学 2019 届高考数学指导卷（2）

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分．不需要写出解答过程，请把答案直接填在答题卡相应位置上．

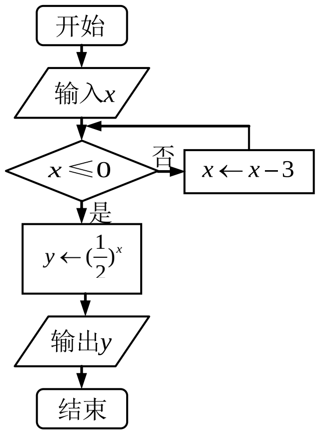
1．已知集合 $A=\{1,a\}$, $B=\{2,3\}$, $A\cap B=\{3\}$，则 $A\cup B=$____▲____．

2．已知 i 是虚数单位，复数 $z=\dfrac{3+4\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ 的虚部为____▲____．

3．某公司共有 1000 名员工，下设若干部门，现采用分层抽样方法，从全体员工中抽取一个容量为 80 的样本，已知广告部门被抽取了 4 个员工，则广告部门的员工人数为____▲____．

4．已知 $(2,0)$ 是双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的一个焦点，则 b 的值是____▲____．

5．右图是一个算法的程序框图，当输入值 x 为 8 时，则其输出的结果是____▲____．



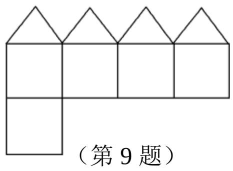
（第 5 题图）

6．函数 $f(x)=\sqrt{\lg(|x|-1)}$ 的定义域为____▲____．

7．在不透明的布袋中有大小相同的白球、黑球各 1 个，红球 2 个．现从中随机摸出 2 个球，则其颜色不同的概率是____▲____．

8．若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=15$，且 $3a_{n+1}=3a_n-2$，则使 $a_ka_{k+1}<0$ 的 k 值为____▲____．

9．已知一个凸多面体共有 9 个面，所有棱长均为 1，其平面展开图如图所示，则该凸多面体的体积 $V=$____▲____．

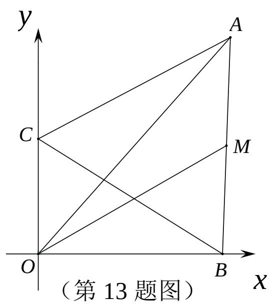

（第 9 题）

10．已知函数 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$，且 $f(x_1)\cdot f(x_2)=-4$，则 $|x_1+x_2|$ 的最小值为____▲____．

11．已知 α,β 均为锐角，且 $\tan(\alpha+\beta)=6\tan\beta$，则 $\sin\alpha$ 的最大值为____▲____．

12．设函数 $f(x)=\begin{cases}|x+1|, & x\leqslant 0,\\ |\log_4 x|, & x>0,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=a$ 有四个不同的解 x_1,x_2,x_3,x_4 且 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则 $x_3(x_1+x_2)+\dfrac{1}{x_3^2x_4}$ 的取值范围是____▲____．

13．如图，等边△ABC 的边长为 2，顶点 B，C 分别在 x 轴的非负半轴，y 轴的非负半轴上滑动，M 为 AB 的中点，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的最大值为____▲____．



（第 13 题图）

14．已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}x^2(a\in\mathbf{R})$，若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2，且 $\dfrac{x_2}{x_1}\geqslant 2$，则实数 a 的取值范围为____▲____．

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)(0<\varphi<2\pi)$ 的图象过点 $(\frac{\pi}{2},-2)$ ．

（1）求 φ 的值；

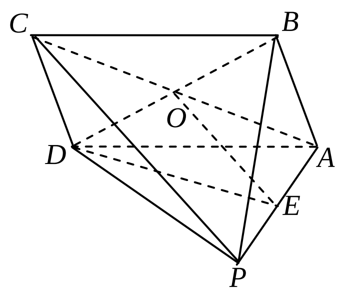
（2）若 $f(\frac{\alpha}{2})=\frac{6}{5}$， $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$，求 $\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})$ 的值．

16．（本小题满分 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形， E 为侧棱 PA 的中点， O 为 AC 与 BD 的交点， $DE\perp CD$， $PD=AD$ ．

（1）求证：直线 $OE//$ 平面 PCD；

（2）求证：平面 $APD\perp$平面 PAB ．



17.（本小题满分 14 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 C 过点 $P(1,1)$，且与圆 $M:(x+2)^2+(y+2)^2=r^2$ $(r>0)$ 关于直线 $x+y+2=0$ 对称.

（1）求圆 C 的方程；

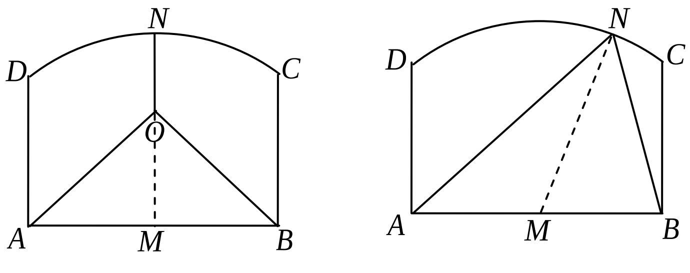
（2）过点 P 作两条相异直线分别与圆 C 相交于 A, B 两点，设直线 PA 与直线 PB 的倾斜角分别为 α,β $(\alpha\neq\beta)$，且满足 $\sin\alpha=\sin\beta$，试判断直线 AB 的斜率是否为定值，并说明理由.

18.（本小题满分 16 分）

在一片生态草原上，某花卉观赏区的边界道路是圆弧 CD，A, B 为两处游客中心，其中 $ABCD$ 为矩形，且 $AB=8\text{km}$，$BC=4\sqrt{2}\text{km}$，圆弧 CD 以 AB 的中点 M 为圆心，MC 为半径．为了保护草原的生态环境，方便游客观赏游览，考虑在草原上修建道路。现提供两种设计方案：方案一：在弧 CD 上取中点 N，建造 AO, BO, NO 三条道路，其中点 O 在线段 NM 上（不包括两端点)；方案二：在弧 CD 上任取点 N，直接修建两条道路 AN, BN；方案二中每公里道路的造价是方案一中的每公里道路造价的 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 倍.

（1）若在方案一中，点 N 选在弧 CD 的中点时的建造费用与方案一建造费用相等，求此时方案一中 O 点的位置；

（2）从节省费用的角度考虑，试问两种方案中哪种方案更合理，请说明理由.



19．（本小题满分 16 分）

已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2-4a\ (a,b\in\mathbf{R},\ 且a\neq 0)$．

（1）若函数 $f(x)$ 恰有两个零点，求 $\dfrac{b}{a}$ 的值；

（2）若对任意的 $x\in[-4,-1]$，$0\leqslant f(x)\leqslant 4x^2$ 恒成立，求 $a+b$ 的取值范围．

20．（本小题满分 16 分）

如果数列 $\{c_n\}$ 满足“对任意正整数 $i,\ j$，$i\neq j$，都存在正整数 k，使得 $c_k=c_ic_j$”，则称数列 $\{c_n\}$ 为“封闭数列”．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1>0$，公差为 d．

（1）若 $a_1=2,\ d=3$，试判断数列 $\left\{a_n\right\}$ 是否为“封闭数列”，并说明理由；

（2）若数列 $\{a_n\}$ 为“封闭数列”，且存在正整数 k，使得 $a_k=3$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

苏州大学 2019 届高考考前指导卷（2）参考答案

一、填空题

1．$\{1,2,3\}$　　2．1　　3．50　　4．$\sqrt{3}$　　5．2　　6．$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

7．$\dfrac{5}{6}$　　8．23　　9．$1+\dfrac{\sqrt{2}}{6}$　　10．$\dfrac{2\pi}{3}$　　11．$\dfrac{5}{7}$　　12．$(-1,\dfrac{7}{2}]$

13．$\dfrac{5}{2}+\sqrt{7}$　　14．$(0,\dfrac{\ln 2}{2}]$

解答与提示：

1．由 $A\cap B=\{3\}$ 可知 $a=3$，则 $A\cup B=\{1,2,3\}$.

2．因为 $z=\dfrac{3+4\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{(3+4\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\dfrac{10+5\mathrm{i}}{5}=2+\mathrm{i}$，所以复数 $z=\dfrac{3+4\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ 的虚部为 1.

3．设广告部门的员工人数为 x，由题意知 $\dfrac{80}{1000}=\dfrac{4}{x}$，解得 $x=50$.

4．因为 $c=2$，$a=1$，所以 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{3}$.

5．当 $x=8$ 时，循环到 $8-3\times3=-1$ 后，得到 $y=(\dfrac{1}{2})^{-1}=2$.

6．由 $\lg(|x|-1)\geqslant 0$，得 $|x|\geqslant 2$，定义域为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

7．取两球颜色相同的事件数为 1，取两个不同的球的样本事件总数为 6，即 $P=\dfrac{5}{6}$.

8．由 $3a_{n+1}=3a_n-2$ 可知 $a_{n+1}-a_n=-\dfrac{2}{3}$，则 $a_n=15-(n-1)\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{47-2n}{3}$；

又由 $a_k a_{k+1}<0$ 可知 $a_k>0$ 且 $a_{k+1}<0$，即 $\dfrac{45}{2}<k<\dfrac{47}{2}$，得 $k=23$.

9．$V=V_1+V_2=1+\dfrac{1}{3}\cdot1\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1+\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

10．$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(x-\dfrac{\pi}{3})$，令 $x-\dfrac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

由题意，$x_1+x_2=2(k\pi+\dfrac{\pi}{3})$，所以 $|x_1+x_2|$ 的最小值为 $\dfrac{2\pi}{3}$.

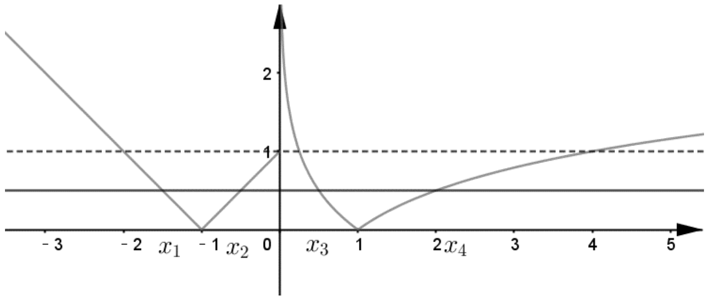
11．因为 $\tan(\alpha+\beta)=6\tan\beta$，

所以 $\tan\alpha=\tan[(\alpha+\beta)-\beta]=\dfrac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\beta}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\beta}=\dfrac{6\tan\beta-\tan\beta}{1+6\tan\beta\tan\beta}$

$=\dfrac{5}{\dfrac{1}{\tan\beta}+6\tan\beta}\leqslant\dfrac{5}{2\sqrt{6}}$，当且仅当 $\tan\beta=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 时等号成立，

又因为α为锐角，所以$\tan\alpha$最大时，则$\sin\alpha$最大，此时$\sin\alpha=\frac{5}{7}$.

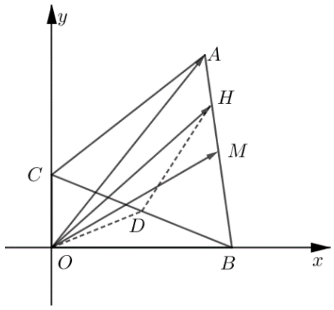
12．作出函数图象，



可知$x_1+x_2=-2$，$x_3x_4=1$；又$f(x)=a$有四个不同的解，可得$\frac{1}{4}\leqslant x_3<1$，

则$x_3(x_1+x_2)+\frac{1}{x_3^2x_4}=-2x_3+\frac{1}{x_3}\in(-1,\frac{7}{2}]$.

13．法一：设BC中点D，AM中点H，



则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=\frac{(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM})^2-(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM})^2}{4}=OH^2-\frac{1}{4}$，

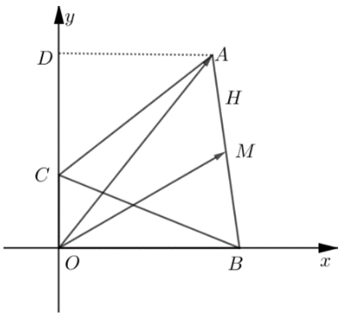
又$DH=\sqrt{1+\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\cos120^\circ}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，

所以$OH\leqslant OD+DH=\frac{\sqrt{7}}{2}+1$；

则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}\leqslant OH^2-\frac{1}{4}=\frac{5}{2}+\sqrt{7}$.

法二：设$\angle OBC=\alpha$，则$B(2\cos\alpha,0)$，$C(0,2\sin\alpha)$；过A作$AD\perp y$轴，

则$A(2\sin(\alpha+30^\circ),2\sin\alpha+2\cos(\alpha+30^\circ))$，



即$A(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha,\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha)$.

又$M(\frac{3}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha,\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha)$，

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=2+\cos^2\alpha+\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin2\alpha$

$$=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}(\cos2\alpha+3\sqrt{3}\sin2\alpha)\leqslant\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+27}=\frac{5}{2}+\sqrt{7}.$$

法三：设$\angle OBC=\alpha$，BC中点D，则$B(2\cos\alpha,0)$，$OD=1$.

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}\cdot\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\frac{1}{2}OA^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}OA^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})^2-(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})^2}{4}$$

$$=\frac{1}{2}(OA^2+OM^2)-\frac{1}{2}；$$

由余弦定理可知 $OA^2=1+3-2\sqrt{3}\cos(2\alpha+90^\circ)=4+2\sqrt{3}\sin2\alpha$；

$OM^2=1+4\cos^2\alpha-2\cdot2\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+60^\circ)=\cos2\alpha+\sqrt{3}\sin2\alpha+2$；

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}(\cos2\alpha+3\sqrt{3}\sin2\alpha)\leqslant\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+27}=\frac{5}{2}+\sqrt{7}$．

14．由题意知 $f'(x)=a\mathrm{e}^x-x$ 有两个零点 x_1,x_2，令 $g(x)=a\mathrm{e}^x-x$，则 $g'(x)=ae^x-1$．

①当 $a\leqslant0$ 时，$g'(x)<0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，此时 $g(x)$ 至多 1 个零点舍去；②当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=0$ 解得 $x=\ln\frac{1}{a}$，$g(x)$ 在 $(-\infty,\ln\frac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(\ln\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增，所以 $g_{\min}(x)=g(\ln\frac{1}{a})=1-\ln\frac{1}{a}$．因为 $g(x)$ 有两个零点，所以 $1-\ln\frac{1}{a}<0$，解得 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$．因为 $g(0)=a>0$，$g(\ln\frac{1}{a})<0$ 且 $\ln\frac{1}{a}>0$，而 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ln\frac{1}{a})$ 上单调递减，所以 $g(x)$ 在 $(0,\ln\frac{1}{a})$ 上有 1 个零点．又因为 $g(\ln\frac{1}{a})<0$，$g(\frac{1}{a})=a\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}=a(\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}-\frac{1}{a^2})>0$ 且 $\ln\frac{1}{a}<\frac{1}{a}$，而 $g(x)$ 在 $(\ln\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增，(需证明不等式 $\ln x<x$ 和 $\mathrm{e}^x>x^2(x>0)$)，所以 $g(x)$ 在 $(\ln\frac{1}{a},\frac{1}{a})$ 上有 1 个零点．综上可得 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$．由题意，得 $\begin{cases}a\mathrm{e}^{x_1}-x_1=0,\\a\mathrm{e}^{x_2}-x_2=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a\mathrm{e}^{x_1}=x_1,\\a\mathrm{e}^{x_2}=x_2,\end{cases}$ $(0<x_1<x_2)$，所以 $\mathrm{e}^{x_2-x_1}=\frac{x_2}{x_1}$．

令 $\frac{x_2}{x_1}=t\geqslant2$，即 $\begin{cases}x_1=\frac{\ln t}{t-1},\\x_2=\frac{t\ln t}{t-1},\end{cases}$ 令 $h(t)=\frac{\ln t}{t-1}$，则 $h'(t)=\frac{1-\frac{1}{t}-\ln t}{(t-1)^2}$，令 $u(t)=1-\frac{1}{t}-\ln t$，而 $u'(t)=\frac{1-t}{t^2}<0$，所以 $u(t)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递减，即 $u(t)\leqslant u(2)=\frac{1}{2}-\ln2<0$，所以 $h(t)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递减，即 $x_1\in(0,\ln2]$，因为 $a=\frac{x_1}{\mathrm{e}^{x_1}},x_1\in(0,\ln2]$，令 $\varphi(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^x}$，而 $\varphi'(x)=\frac{1-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}<0$ 恒成立，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,\ln2]$ 上单调递减，又 $a>0$，所以 $a\in(0,\frac{\ln2}{2}]$．

综上所述，实数 a 的取值范围为 $(0,\frac{\ln2}{2}]$．

二、解答题

15．解：（1）因为函数 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)(0<\varphi<2\pi)$ 的图象过点 $(\frac{\pi}{2},-2)$，

所以 $f(\frac{\pi}{2})=2\sin(\pi+\varphi)=-2$，即 $\sin\varphi=1$．因为 $0<\varphi<2\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$．

（2）由（1）得，$f(x)=2\cos 2x$．因为 $f(\frac{\alpha}{2})=\frac{6}{5}$，所以$\cos\alpha=\frac{3}{5}$．

又因为$-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$，所以$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$．

所以$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25}$， $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{7}{25}$．

从而$\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})=\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{7-24\sqrt{3}}{50}$．

16．证：(1）因为底面 $ABCD$ 为平行四边形，O 是 AC 与 BD 的交点，所以 O 是 AC 中点，

因为 E 是 AP 的中点，所以$OE/\!/CP$，

又因为$OE\not\subset$平面PCD， $CP\subset$平面PCD，所以$OE/\!/$平面PCD，

（2）因为底面 $ABCD$ 为平行四边形，所以 $AB/\!/CD$，

又因为$DE\perp CD$，所以$DE\perp AB$，

因为 E 是 AP 的中点,且 $PD=AD$，所以$DE\perp AP$，

又因为 $AP,AB\subset$平面 PAB， $AP\cap AB=A$，

所以 $DE\perp$平面 PAB，

又因为 $DE\subset$平面 APD，所以平面 $APD\perp$平面 PAB.

17．解:（1）设圆心$C(a,b)$，则$\begin{cases}\frac{a-2}{2}+\frac{b-2}{2}+2=0,\\ \frac{b+2}{a+2}\times(-1)=-1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=0,\\ b=0,\end{cases}$ 即圆心C的坐标为$(0,0)$，

所以圆C的方程为$x^2+y^2=r^2$，将点$P(1,1)$代入，求得$r^2=2$，

所以圆C的方程为$x^2+y^2=2$．

（2）依题意得$\sin\alpha=\sin\beta$，说明α, β互补，直线PA和直线PB的斜率都存在，

且互为相反数，故可设$l_{PA}:y-1=k(x-1)$， $l_{PB}:y-1=-k(x-1)$，

设点A的坐标为(x_A,y_A)，点B的坐标为(x_B,y_B)，

联立$\begin{cases}y-1=k(x-1),\\ x^2+y^2=2,\end{cases}$，消去$y$并整理，得$(1+k^2)x^2+2k(1-k)x+k^2-2k-1=0$，

因为点P的横坐标 1 一定是该方程的解，

所以$x_A=\frac{k^2-2k-1}{1+k^2}$，同理$x_B=\frac{k^2+2k-1}{1+k^2}$，

设直线AB的斜率为k_{AB}，则$k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-k(x_B-1)-k(x_A-1)}{x_B-x_A}=1$，

所以直线AB的斜率为定值，且定值为1．

18．解：(1）设$OM=x$，则为$OB=\sqrt{x^2+16}$，且圆弧的半径为$4\sqrt{3}$，

方案二中 $AN=BN=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+16}=8$，

因为 $[2\sqrt{x^2+16}+(4\sqrt{3}-x)]=16\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，化简得 $3x^2-8\sqrt{3}x+16=0$，

解得 $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$\therefore ON=4\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，

答：O 点距 N 点距离为 $\frac{8}{3}\sqrt{3}\,\text{km}$.

（2）设道路每千米的造价为 $a(a>0)$，

方案一中，设 $\angle OBA=\theta$，则 $OM=4\tan\theta$，$OB=\frac{4}{\cos\theta}$，

所以建造费用为 $y=a(\frac{8}{\cos\theta}-4\tan\theta+4\sqrt{3})$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$，

令 $f(\theta)=\frac{2-\sin\theta}{\cos\theta}$，则 $f^{'}(\theta)=\frac{2\sin\theta-1}{\cos\theta}$，由 $f'(\theta)=0$ 得 $\theta=\frac{\pi}{6}$，

且 $f(\theta)$ 在 $(0,\frac{\pi}{6})$ 上单调递减，在 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$ 上单调递增，

所以 $f(\theta)_{\min}=f(\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$，即 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，$y_{\min}=8\sqrt{3}a$.

方案二中，设 $AN=x$，$BN=y$，

则 $x^2+y^2=128$，其中 $4\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 4\sqrt{6},4\sqrt{2}\leqslant y\leqslant 4\sqrt{6}$，

因为 $x+y\leqslant 2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}=16$，当且仅当 $x=y=8$ 时等号成立，

所以方案二中的建造费用的最大值 $16\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=8\sqrt{3}a$.

答：方案二比较合适.

19．解：（1）由于 $a\neq 0$，所以 $f(0)\neq 0$，由 $f(x)=0$ 得，$\frac{b}{a}=\frac{4-x^3}{x^2}=\frac{4}{x^2}-x\quad(x\neq 0)$.

设 $h(x)=\frac{4}{x^2}-x$，$h'(x)=-\frac{8}{x^3}-1$，令 $h'(x)=0$，得 $x=-2$，

当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(-2,0)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x>0$ 时，$h(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，

故不论 $\frac{b}{a}$ 取何值，方程 $\frac{b}{a}=\frac{4-x^3}{x^2}=\frac{4}{x^2}-x$ 有且仅有一个根；

当 $x<0$ 时，$[h(x)]_{\min}=h(-2)=3$. 故 $\dfrac{b}{a}=3$ 时，

方程 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{4-x^3}{x^2}=\dfrac{4}{x^2}-x$ 恰有一个根 -2，

此时函数 $f(x)=ax^3+3ax^2-4a=a(x+2)^2(x-1)$ 恰有两个零点 -2 和 1.

所以 $\dfrac{b}{a}=3$.

（2）由 $x\in[-4,-1]$，$0\leqslant f(x)\leqslant 4x^2$ 恒成立，得 $a(\dfrac{4}{x^2}-x)\leqslant b\leqslant a(\dfrac{4}{x^2}-x)+4$.

令 $g(x)=a(\dfrac{4}{x^2}-x)=ah(x)$，

由（1）知，当 $x\in(-4,-2)$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in(-2,-1)$ 时，$h'(x)>0$，

①当 $a>0$ 时，$x\in(-4,-2)$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；$x\in(-2,-1)$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增. 所以 $[g(x)]_{\min}=g(-2)=3a$，$[g(x)]_{\max}=g(-1)=5a$.

所以 $5a\leqslant b\leqslant 3a+4$，所以 $6a\leqslant a+b\leqslant 4a+4$，由 $6a\leqslant 4a+4$，得 $0<a\leqslant 2$，

所以 $a+b$ 的取值范围为 $(0,12]$.

②当 $a<0$ 时，$x\in(-4,-2)$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；$x\in(-2,-1)$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，所以 $[g(x)]_{\min}=g(-1)=5a$，$[g(x)]_{\max}=g(-2)=3a$，

所以 $3a\leqslant b\leqslant 5a+4$，所以 $4a\leqslant a+b\leqslant 6a+4$，由 $4a\leqslant 6a+4$，得 $-2\leqslant a<0$，

所以 $a+b$ 的取值范围为 $[-8,0)$.

综上 $a+b$ 的取值范围 $[-8,0)\cup(0,12]$.

20. 解：（1）$\{a_n\}$ 不是“封闭数列”. 因为 $a_1=2,\ d=3$，所以 $a_n=3n-1$，

若存在正整数 k，使得 $a_k=a_1a_2=10=3k-1$，则 $k=\dfrac{11}{3}\notin\mathbf{N}^*$，矛盾.

所以 $\{a_n\}$ 不是“封闭数列”.

（2）若 $d=0$，则 $a_n=3$，故对任意正整数 k，$a_k=3\neq 3^2=a_ia_j$，这与数列 $\{a_n\}$ 为“封闭数列”矛盾，故 $d\neq 0$.

若 $d<0$，则存在正整数 t，使得 $a_k>a_{k+1}>\cdots>a_t\geqslant 0>a_{t+1}>a_{t+1}>\cdots$，

设 $a_{t+1}a_{t+2}=a_{k_1}$，$a_{t+1}a_{t+3}=a_{k_2}$，$a_{t+1}a_{t+4}=a_{k_3}$，$\cdots$，$a_{t+1}a_{t+1+i}=a_{k_i}$，$\cdots$，$a_{t+1}a_{2t+2}=a_{k_{t+1}}$，

其中 $k_i\in\mathbf{N}^*,i=1,2,\cdots,\ t+1$，

则 $0<a_{k_1}<a_{k_2}<\cdots<a_{k_{t+1}}$，这与数列 $\{a_n\}$ 只有 t 项大于等于零矛盾，故 $d>0$.

设 a_m 是数列 $\{a_n\}$ 中的任意一项，则 a_m+d，a_m+2d 均是数列 $\{a_n\}$ 中的项，

设 $a_{k_1}=a_m(a_m+d)$，$a_{k_2}=a_m(a_m+2d)$，则 $a_{k_2}-a_{k_1}=a_md=(k_2-k_1)d$，因为 $d>0$，

所以 $a_m=k_2-k_1\in\mathbf{Z}$，即数列$\{a_n\}$的每一项均是整数.

由 $a_1>0$， $d>0$，故数列$\{a_n\}$的每一项均是正整数，且 d 为正整数.

由题意知，存在正整数 i，使得 $a_i=a_k(a_k+d)=9+3d$，所以 $a_i-a_k=6+3d=(i-k)d$，

所以 $(i-k-3)d=6$，因为 $i-k-3\in\mathbf{Z}$， $d\in\mathbf{N}^*$，故 $d=1,2,3,6$.

当 $d=1$ 时， $a_1=3-(k-1)>0$，所以 $k=1,a_1=3,a_n=n+2$； $k=2,a_1=2,a_n=n+1$；

$k=3,a_1=1,a_n=n$；

当 $d=2$ 时， $a_1=3-2(k-1)>0$，所以 $k=1,a_1=3,a_n=2n+1$； $k=2,a_1=1,a_n=2n-1$；

当 $d=3$ 时， $a_1=3-3(k-1)>0$，所以 $k=1,a_1=3,a_n=3n$；

当 $d=6$ 时， $a_1=3-6(k-1)>0$，所以 $k=1,a_1=3,a_n=6n-3$.