2020—2021学年度第二学期期初调研测试试题

高 三 数 学

2021.02

（全卷满分150分，考试时间120分钟）

一、单项选择题(本大题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的选项中，只有一项符合要求).

1．已知集合 $A=\{x\mid x^2-4<0\},B=\{x\mid \log_3 x<1\}$，则 $A\bigcap B=$（　　）

A. $(-2,3)$　　B. $(-2,2)$　　C. $(0,3)$　　D. $(0,2)$

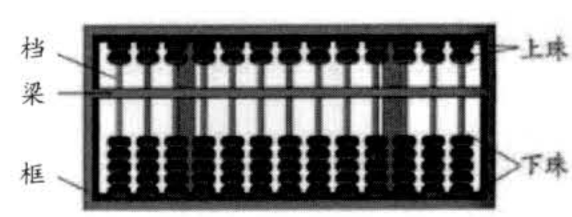
2．已知复数 $z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-\sqrt{3}i}$，其中 i 为虚数单位，则 $|z|=$（　　）

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

3．已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2,\vec{b}=(1,1),\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$，则 $\cos<\vec{a},\vec{a}+\vec{b}>=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4．如图，我国古代算盘每个档(挂珠的杆)上有7颗算珠，用梁隔开，梁上面2颗叫上珠，上珠每颗代表数值5，下面5颗叫下珠，下珠每颗代表数值1，现从某一档的7颗算珠中任取4颗（这4颗算珠最小表示数值4，最大表示数值12），则所取的算珠表示的数值是8的概率为（　　）



A. $\dfrac{5}{7}$　　B. $\dfrac{4}{7}$　　C. $\dfrac{3}{7}$　　D. $\dfrac{2}{7}$

5．已知点 F 是抛物线 $x^2=2py\left(p>0\right)$ 的焦点，O 为坐标原点，若以 F 为圆心，$|FO|$ 为半径的圆与直线 $\sqrt{3}x-y+3=0$ 相切，则抛物线的准线方程为（　　）

A．$y=-1$　　B．$y=-2$　　C．$x=-1$　　D．$x=-2$

6．我国古代数学家提出的“中国剩余定理”又称“孙子定理”，它是世界数学史上光辉的一页，定理涉及的是整除问题. 现有这样一个整除问题：将2到2021这2020个整数中被3除余1且被5除余1的数、按从小到大的顺序排成一列构成数列 $\{a_n\}$，那么此数列的项数为（　　）

A．133　　B．134　　C．135　　D．136

7．已知 $\alpha\in[0,\pi]$，$\beta\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$，$\lambda\in\mathrm{R}$，且 $\alpha^3-\cos\alpha-\lambda=0$，$\left(\dfrac{\pi}{2}-2\beta\right)^3-2\sin\beta\cos\beta-\lambda=0$，若 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，则 $\tan\beta=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 3

8. 十八世纪早期，英国数学家泰勒发现了公式

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,$$

（其中 $x\in R$，$n\in N^*$，$n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$，$0!=1$）. 现用上述公式求

$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-2)!}+\cdots$ 的值，下列选项中与该值最接近的是（　　）

A. $\sin30^\circ$　　B. $\sin33^\circ$　　C. $\sin36^\circ$　　D. $\sin39^\circ$

二、多项选择题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分)

9. 在 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^7$ 的展开式中，下列说法中正确的有（　　）

A. 所有项的二项式系数和为128　　B. 所有项的系数和为0

C. 系数最大的项为第4项和第5项　　D. 存在常数项

10. 已知 $x>0$，$y>0$，且 $2x+y=2$，则下列说法中正确的有（　　）

A. xy 的最大值为 $\frac{1}{2}$　　B. $4x^2+y^2$ 的最大值为 2

C. 4^x+2^y 的最小值为 4　　D. $\frac{2}{x}+\frac{x}{y}$ 的最小值为 4

11. 已知函数 $f(x)=|\sin x|+\sqrt{3}|\cos x|$，则下列说法中正确的有（　　）

A. 函数 $f(x)$ 的值域为 $[1,2]$

B. 直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴

C. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π

D. 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{9\pi}{10},\frac{10\pi}{9}\right]$ 上是增函数

12. 我们把所有棱长都相等的正棱柱（锥）叫“等长正棱柱（锥）”，而与其所有棱都相切的球称为棱切球，设下列“等长正棱柱（锥）”的棱长都为 1，则下列说法中正确的有（　　）

A. 正方体的棱切球的半径为 $\sqrt{2}$

B. 正四面体的棱切球的表面积为 $\frac{\pi}{2}$

C. 等长正六棱柱的棱切球的体积为 $\frac{4\pi}{3}$

D. 等长正四棱锥的棱切球被棱锥 5 个面（侧面和底面）截得的截面面积之和为 $\frac{7\pi}{12}$

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知一个圆锥的侧面积为6π，它的侧面展开图是一个半圆，则此圆锥的体积为________.

14. 已知$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，且$P(X>0)+P(X\ge -2)=1$，则$\mu=$________.

15. 一颗彗星的运行轨迹是以太阳为焦点，且靠近该焦点的双曲线的一支，当太阳与这颗彗星的距离分别是6（亿千米）和3（亿千米）的时候，这颗彗星与太阳的连线所在直线与双曲线的实轴所在直线夹角分别为$\dfrac{\pi}{2}$和$\dfrac{\pi}{3}$，则这颗彗星与太阳的最近距离是________（亿千米）.

16. 已知函数$y=kx+b$与函数$y=e^{x-1}-e^{1-x}$的图象交于A,B,C，且$|AB|=|BC|=\sqrt{e^2+\dfrac{1}{e^2}-1}$，则实数$k=$______.

四、解答题（本大题共 6 小题，计 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）

已知平面四边形$ABCD$中，$AB//DC,\angle BAC=\dfrac{\pi}{4},\angle ABC=\dfrac{\pi}{3},AB=\sqrt{3}+1,BD=\sqrt{7}$.

（1）求BC的长；

（2）求ΔBCD的面积.

【解析】（1）在ΔABC中，$\angle BAC=\dfrac{\pi}{4},\angle ABC=\dfrac{\pi}{3},AB=\sqrt{3}+1$，则$\angle ACB=\dfrac{5\pi}{12}$，

由正弦定理得$\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}$，

所以$BC=\dfrac{AB\cdot\sin\angle BAC}{\sin\angle ACB}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{5\pi}{12}}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=2$. ....4 分

（2）因为$AB//DC$，所以$\angle BCD=\dfrac{2\pi}{3}$，

在ΔBCD中，由余弦定理得$BD^2=BC^2+CD^2-2\cdot BC\cdot CD\cdot\cos\angle BCD=CD^2+2CD+4$，

即$CD^2+2CD+4=7$即$CD^2+2CD-3=0$，则$CD=1$， ....8 分

所以$S_{\Delta BCD}=\dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot CD\cdot\sin\angle BCD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ....10 分

18. （本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，________________.

条件①: $a_{n+1}=a_n+2^{n-1}$；条件②: $S_n+1=a_{n+1}$

请在上面的两个条件中任选一个, 补充在上面的横线上, 完成下列两问的解答:

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=log_2a_{2n}+1$，记数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前n项和为T_n，求T_n.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

【解析】选条件①：因为$a_{n+1}=a_n+2^{n-1}$，

所以$a_n-a_{n-1}=2^{n-2}$, $a_{n-1}-a_{n-2}=2^{n-3}$，……，$a_3-a_2=2^1$，$a_2-a_1=2^0$，

累加得$a_n-a_1=2^{n-2}+2^{n-1}+\cdots+2^1+2^0=2^{n-1}-1$，所以$a_n=2^{n-1},(n\ge 2)$， ....4 分

当$n=1$时，$a_1=1$也满足上式；

所以$a_n=2^{n-1}$ ……………6 分

选条件②：因为$S_n+1=a_{n+1}$，所以当$n\geq 2$时，$S_{n-1}+1=a_n$，

两式相减得$a_n=a_{n+1}-a_n(n\geq 2)$，即$a_{n+1}=2a_n(n\geq 2)$， ……………4 分

当$n=1$时，$a_2=S_1+1=2$，故$a_2=2a_1$，

所以$a_{n+1}=2a_n,(n\geq 1)$，又$a_n\neq 0$，所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2,(n\geq 1)$，所以数列$\{a_n\}$是等比数列，

所以$a_n=2^{n-1}$ ……………6 分

（2）$b_n=\log_2 2^{2n-1}+1=2n$， ……………7 分

记$c_n=a_n\cdot b_n$，则$c_n=n\cdot 2^n$，所以$T_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n-1)\times 2^{n-1}+n\times 2^n$；

故$2T_n=1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+(n-1)\times 2^n+n\times 2^{n+1}$

两式相减得$-T_n=1\times 2^1+1\times 2^2+1\times 2^3+\cdots+1\times 2^n-n\times 2^{n+1}=2^{n+1}-2-n\times 2^{n+1}$，

所以$T_n=(n-1)\times 2^{n+1}+2$. ……………12 分

19.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱锥$A-BCD$中，ΔABD与ΔBCD都为等边三角形，平面$ABD\perp$平面BCD，M,O分别为AB,BD的中点，$AO\cap DM=G$，N在棱CD上且满足$2CN=ND$，连接MC,GN.

（1）证明：$GN//$平面ABC；

（2）求直线AC和平面GND所成角的正弦值.

【解析】（1）在ΔABD中，因为M,O分别为AB,BD的中点，$AO\cap DM=G$，

所以G为重心，所以$\frac{DG}{GM}=2$，又$\frac{ND}{CN}=2$，所以$GN//MC$ ……………2 分

又$\because GN\not\subset$平面ABC，$MC\subset$平面ABC，

$\therefore GN//$平面ABC. ……………4 分

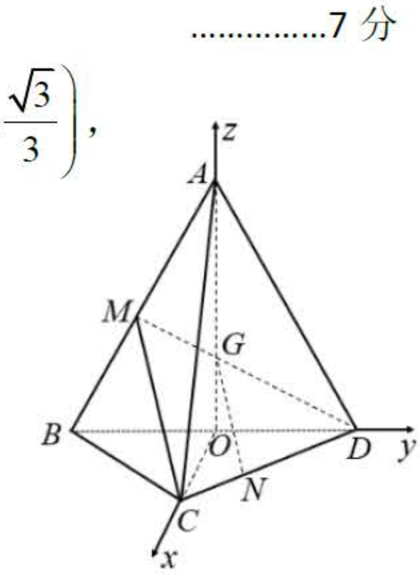
（2）**方法 1：（向量法）**因为平面$ABD\perp$平面BCD，$AO\perp BD$，

平面$ABD\cap$平面$BCD=BD$，$AO\subset$平面ABD，所以$AO\perp$平面BCD， ……………6 分

连结OC，则$OC\perp OD$，以$\left\{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}\right\}$为正交基底，

建立如图所示空间直角坐标系$O-xyz$， ……………7 分

不妨设$AB=2$，则$C\left(\sqrt{3},0,0\right)$，$D(0,1,0)$，$A\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，$G\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，



从而$\overrightarrow{CD}=\left(-\sqrt{3},1,0\right)$，$\overrightarrow{DG}=\left(0,-1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{CA}=\left(-\sqrt{3},0,\sqrt{3}\right)$

设平面GND的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0\\-y+\frac{\sqrt{3}}{3}z=0\end{cases}$，取$x=1$，则$y=\sqrt{3}$，$z=3$，

所以平面GND的一个法向量$\vec{n}=\left(1,\sqrt{3},3\right)$ ……………10 分

$\therefore \cos\left\langle \overrightarrow{CA},\vec{n}\right\rangle = \dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\vec{n}\right|} = \dfrac{\sqrt{26}}{13}$ ……………11 分

$\therefore$ AC 和平面 GND 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{26}}{13}$. ……………12 分

方法 2（综合法）提示：即求 AC 和平面 MCD 所成角的正弦值，可用体积法求出 A 到平面 MCD 的距离

20. （本小题满分 12 分）

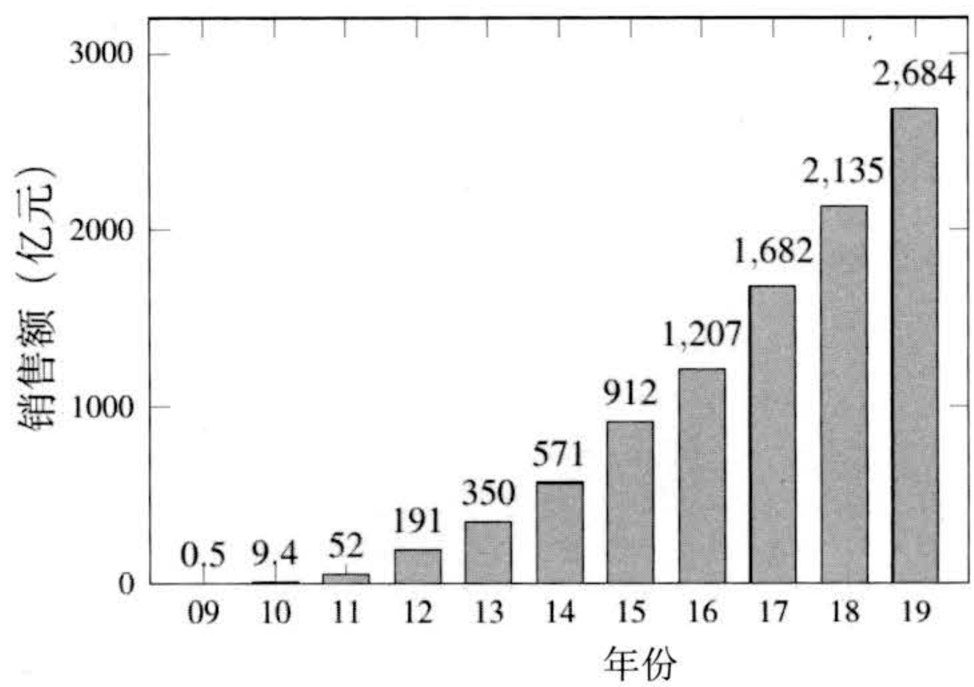
某研究性学习小组收集了某网络销售平台近五年"双十一"当天成交额的数据，并制成如下表格：

年份 x	2015	2016	2017	2018	2019
成交额 y（百亿元）	9	12	17	21	27

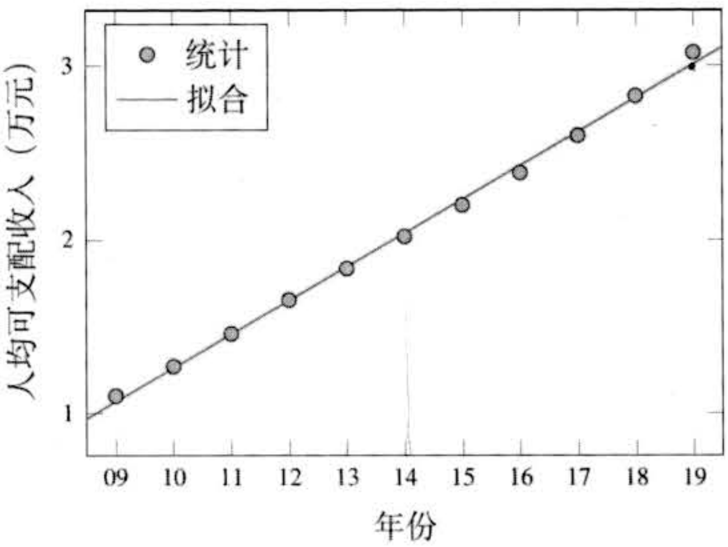
（1）小组成员小明准备用线性模型 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 刻画 y 与 x 的关系，请帮助小明求出线性回归方程；

参考公式：线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中的 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

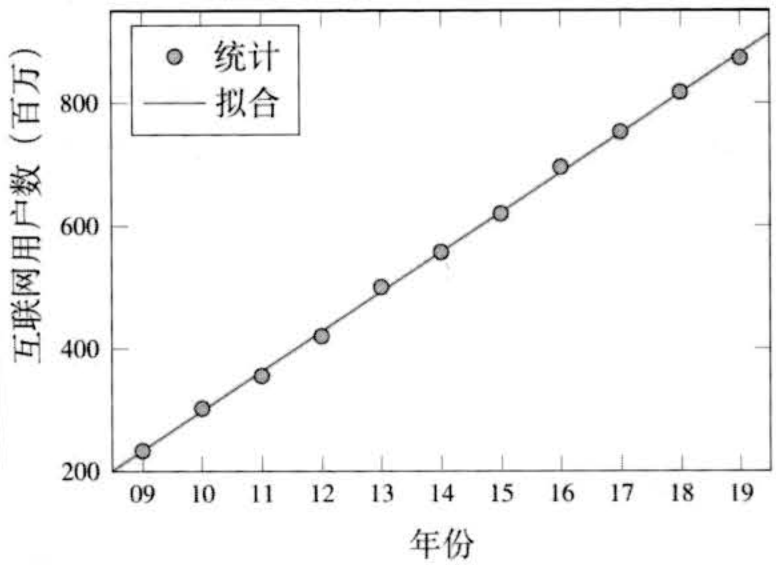
（2）小组成员小王收集了更多的数据信息，借助计算机整理得到下图：



小王提出，从上图来看，刻画 y 与 x 的关系选用线性模型明显不合理，而二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a,b,c\in R,a\neq 0)$ 模型或指数函数 $y=a\cdot b^x+c(a,b,c\in R,b>0,\ b\neq 1)$ 模型均有可能. 已知中国人均可支配收入 y_1 与中国互联网用户人均该平台消费额 y_2 呈正线性相关，请你依据以下图表中的信息，帮助小王选择一个合理的函数模型，并简要说明理由（不需要求出 a,b,c ）.



中国人均可支配收入与年份关系图



中国互联网用户数与年份关系图

（3）"双十一"活动中，顾客可以享受优惠；也可能会冲动消费，导致所购物品闲置（闲置物品全部在某二手平台上以原标价的 50%售出）.某商户对标价为 100 元的某种商品采取了 3 种销售形式促销：普通购物，秒杀购物，直播购物.该小组收集了相关信息整理得下表：

	普通购物	秒杀购物	直播购物
销售量占比	70%	10%	20%
折扣率	5%	20%	15%
所购物品闲置率	20%	40%	30%

用频率估计概率，从数学期望的角度，判断顾客购买该商品是否划算？

注：折扣率 $=\dfrac{\text{标价}-\text{售价}}{\text{标价}}\times 100\%$；所购物品闲置率 $=\dfrac{\text{所购物品闲置总数}}{\text{所购物品购买总数}}\times 100\%$

【解析】（1）$\overline{x}=\dfrac{2015+2016+2017+2018+2019}{5}=2017$

$\overline{y}=\dfrac{9+12+17+21+27}{5}=\dfrac{86}{5}=17.2$, ……………1 分

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=(-2)\times(-8.2)+(-1)\times(-5.2)+0\times(-0.2)+1\times 3.8+2\times 9.8$$
$$=16.4+5.2+3.8+19.6=45$$

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2=10$$

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{45}{10}=4.5$ ……………3 分

所以 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=17.2-4.5\times 2017=-9059.3$

所以线性回归方程为 $\hat{y}=4.5x-9059.3$ ……………4 分

（2）选二次函数 $y=ax^2+bx+c(a,b,c\in R,a\neq 0)$ 模型， ……………5 分

理由如下：

该平台消费额=中国互联网用户人数×中国互联网用户人均该平台消费额.

由中国互联网用户数与年份关系图可看出：散点分布在一条直线附近，

可认为中国互联网用户数与年份线性相关，可用一次函数模型刻画.

由中国人均可支配收入和年份关系图可看出：散点分布在一条直线附近，可认为中国人均可支配收入与年份线性相关，又因为中国人均可支配收入与中国互联网用户人均该平台消费额呈正线性相关，因此中国互联网用户人均该平台消费额与年份线性相关，可用一次函数模型刻画.

因为一次函数与一次函数的乘积为二次函数，所以应该选择二次函数模型. ……………7 分

注：只要考生提到“一次函数与一次函数的乘积为二次函数”即可

（3）记顾客购买一件该商品花费金额为 X 元，则

普通购物中，$X=95+0.2(95-50)=104$ 元；

秒杀购物中，$X=80+0.4(80-50)=92$ 元；

直播购物中，$X=85+0.3(85-50)=95.5$ 元； ……………8 分

所以概率分布为：

X	104	92	95.5
P	0.7	0.1	0.2

……………11 分

所以 $E(X)=104\times0.7+92\times0.1+95.5\times0.2=101.1>100$

所以，顾客购买该商品不划算. ……………12 分

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x(x^2+mx+m^2)$，$g(x)=ax^2+x+ax\ln x$.

（1）若函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取极小值，求实数 m 的值；

（2）设 $m=0$，若对任意 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x)\ge g(x)$ 恒成立，求实数 a 的值.

【解析】（1）$f'(x)=e^x[x^2+(m+2)x+m^2+m]$，

由题意得 $f'(-1)=0$，即 $m=\pm1$， ……………2 分

当 $m=1$ 时，$f'(x)=e^x(x+1)(x+2)$，此时 $f(x)$ 在 $(-2,-1)$ 上递减，在 $(-1,+\infty)$ 上递增，所以符合要求；

当 $m=-1$ 时，$f'(x)=e^x(x+1)x$，此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上递增，在 $(-1,+\infty)$ 上递减，所以不符合要求.

综上得，$m=1$ ……………4 分

（2）方法 1：直接研究差函数的最小值，需借助隐零点

由 $f(x)\ge g(x)$ 得不等式 $xe^x\ge a(x+\ln x)+1$ 恒成立，

令 $h(x)=xe^x-1-a(x+\ln x),(x>0)$，求导得 $h'(x)=(x+1)(e^x-\dfrac{a}{x})$，

当 $a\le0$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $h(\dfrac{1}{e})=\dfrac{1}{e}e^{\frac{1}{e}}-1+a(1-\dfrac{1}{e})<\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}-1+a(1-\dfrac{1}{e})<0$，所以不符合题意； ……………5 分

当 $a>0$ 时，令 $\phi(x)=xe^x-a,(x\ge0)$，则 $\phi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，

又 $\phi(0)=-a<0$，$\phi(a)=ae^a-a>0$，且 $\phi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，

所以存在唯一 $x_0\in(0,a)$，使得 $\phi(x_0)=x_0e^{x_0}-a=0$， ……………7 分

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，故 $h(x)$ 递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时 $h'(x)>0$，故 $h(x)$ 递增.

所以 $h(x)_{\min}=h(x_0)=x_0e^{x_0}-1-a(x_0+\ln x_0)=a-a\ln a-1$ ……………9 分

所以 $a-a\ln a-1\ge0$，即 $\ln a+\dfrac{1}{a}-1\le0$，

令 $\varphi(a)=\ln a+\frac{1}{a}-1$，则 $\varphi'(a)=\frac{a-1}{a^2}$，所以 $\varphi(a)$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，

又 $\varphi(1)=0$，所以 $a=1$ ……………12 分

方法 2：指数化、换元处理

由 $f(x)\ge g(x)$ 得 $xe^x-1-a(x+\ln x)\ge 0$，指数化得不等式 $e^{x+\ln x}-1-a(x+\ln x)\ge 0$ 恒成立，

令 $x+\ln x=t$，则 $\forall t\in R$，不等式 $e^t-at-1\ge 0$ 恒成立，……………5 分

令 $h(t)=e^t-at-1,(t\in R)$，则 $h'(x)=e^t-a$，

当 $a\le 0$ 时，$h(-1)=\frac{1}{e}+a-1<0$，所以不符合题意；……………7 分

当 $a>0$ 时，$h(t)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(t)_{\min}=h(\ln a)=a-a\ln a-1$，……………9 分

所以 $a-a\ln a-1\ge 0$，即 $\ln a+\frac{1}{a}-1\le 0$，

令 $\varphi(a)=\ln a+\frac{1}{a}-1$，则 $\varphi'(a)=\frac{a-1}{a^2}$，所以 $\varphi(a)$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，

又 $\varphi(1)=0$，所以 $a=1$ ……………12 分

22.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，右准线方程为 $x=2\sqrt{2}$.

（1）求椭圆的方程；

（2）设 $P(0,1)$，A、B 为椭圆的左右顶点，过 A 作斜率为 k_1 的直线交椭圆于 E，连接 EP 并延长交椭圆于 F，记直线 BF 的斜率为 k_2，若 $k_1=3k_2$，求直线 EF 的方程.

【解析】（1）由题意得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\\ \frac{a^2}{c}=2\sqrt{2}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{2}\end{cases}$，所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

……………3 分

（2）方法 1：显然直线 EF 的斜率存在，故设其方程为 $y=kx+1$，

由 $\begin{cases}y=kx+1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 消去 y 得 $(2k^2+1)x^2+4kx-2=0$，显然 $\Delta>0$，

设 $E(x_1,y_1),F(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{-4k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{-2}{1+2k^2}$. ……………5 分

因为 $k_1=3k_2$，所以 $\frac{y_1}{x_1+2}=\frac{3y_2}{x_2-2}$，（下面给出两种处理方案）

方案 1： $\frac{kx_1+1}{x_1+2}=\frac{3(kx_2+1)}{x_2-2}$，即 $2kx_1x_2+(2k+3)x_1+(6k-1)x_2+8=0$

因为 $2kx_1x_2=\frac{-4k}{1+2k^2}=x_1+x_2$，所以上式即 $(k+2)x_1+3kx_2+4=0$，……………6 分

即 $(k+2)x_1+3k(\frac{-4k}{1+2k^2}-x_1)+4=0$，即 $(1-k)(x_1+\frac{2k+2}{1+2k^2})=0$ ……………10 分

所以 $1-k=0$ 或 $x_1+\frac{2k+2}{1+2k^2}=0$（舍去）， 所以 $k=1$.

所以直线 EF 的方程为 $y=x+1$ ……………12 分

方案 2：平方得 $\frac{y_1^2}{(x_1+2)^2}=\frac{9y_2^2}{(x_2-2)^2}$ ①

又因为 $E(x_1,y_1),F(x_2,y_2)$ 在椭圆上，所以 $y_1^2=\frac{1}{2}(4-x_1^2),y_2^2=\frac{1}{2}(4-x_2^2)$ ②

将②代入①可得：$\frac{2-x_1}{2+x_1}=\frac{9(2+x_2)}{2-x_2}$，即 $2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8=0$， ……………9 分

所以 $\frac{-4}{1+2k^2}+\frac{20k}{1+2k^2}+8=0$，即 $4k^2-5k+1=0$，解得 $k=1$ 或 $k=\frac{1}{4}$（舍去）.

所以直线 EF 的方程为 $y=x+1$ ……………12 分

方法 2：

直线 AE 的方程为 $y=k_1(x+2)$，由 $\begin{cases} y=k_1(x+2) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 消去 y 得 $(2k_1^2+1)x^2+8k_1^2x+8k_1^2-4=0$，

因为此方程有一根为 -2，所以由韦达定理可得 $x_E=\frac{2-4k_1^2}{2k_1^2+1}$，故 $y_E=\frac{4k_1}{2k_1^2+1}$

所以 $E(\frac{2-4k_1^2}{2k_1^2+1},\frac{4k_1}{2k_1^2+1})$， ……………5 分

同理可得 $F(\frac{4k_2^2-2}{2k_2^2+1},\frac{-4k_1}{2k_2^2+1})$， 因为 $k_1=3k_2$，所以 $F(\frac{4k_1^2-18}{2k_1^2+9},\frac{-12k_1}{2k_1^2+9})$ ……………6 分

由 E，F,P 三点共线得 $\dfrac{\frac{4k_1}{2k_1^2+1}-1}{\frac{2-4k_1^2}{2k_1^2+1}}=\dfrac{\frac{-12k_1}{2k_1^2+9}-1}{\frac{4k_1^2-18}{2k_1^2+9}}$，

即 $4k_1^4+8k_1^3+12k_1-9=0$， ……………8 分

即 $(2k_1^2+3)(2k_1^2+4k_1-3)=0$，所以 $2k_1^2+4k_1-3=0$， ……………10 分

所以直线 EF 的斜率为 $\dfrac{\frac{4k_1}{2k_1^2+1}-1}{\frac{2-4k_1^2}{2k_1^2+1}}=\frac{4k_1-2k_1^2-1}{2-4k_1^2}=\frac{8k_1-4}{8k_1-4}=1$，

所以直线 EF 的方程为 $y=x+1$ ……………12 分