

仪征中学 2020 届数学一轮复习补偿训练(8) 11.19

班级_____ 学号_____ 姓名_____ 成绩_____

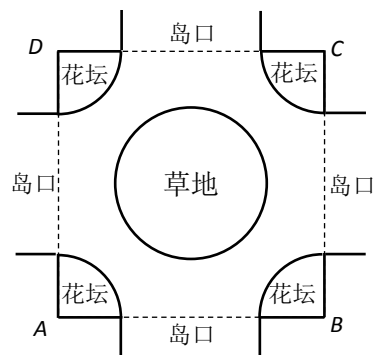
一、填空题：

- 1、在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $CA = 3$ ， $CB = 4$ ，若点 M 满足 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$ ，且 $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CA} = 18$ ，则 $\lambda =$ _____.
- 2、已知正实数 x, y 满足 $x + 2y = 4$ ，则 $\frac{y}{4x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为_____.
- 3、将函数 $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{4})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $y = g(x)$ 的图象，则函数 $y = g(x)$ 在 $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ 上的最小值为_____.
- 4、若关于 x 的方程 $kx + 1 = \ln x$ 有解，则实数 k 的取值范围是_____.
- 5、双曲线 C_1 与椭圆 C_2 的公共焦点 F_1, F_2 在 x 轴上，点 A 是 C_1, C_2 在第一象限的公共点. 若 $F_1F_2 = F_1A$ ， C_2 的离心率是 $\frac{2}{3}$ ，则双曲线 C_1 的渐近线方程是_____.
- 6、在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C 的方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 4$ ， P 为圆 C 上一点. 若存在一个定圆 M ，过 P 作圆 M 的两条切线 PA, PB ，切点分别为 A, B ，当 P 在圆 C 上运动时，使得 $\angle APB$ 恒为 60° ，则圆 M 的方程为_____.

二、解答题：

7、如图，现要在边长为 100 m 的正方形 $ABCD$ 内建一个交通“环岛”. 以正方形的四个顶点为圆心，在四个角分别建半径为 x m (x 不小于 9) 的扇形花坛，以正方形的中心为圆心建一个半径为 $\frac{1}{5}x^2$ m 的圆形草地. 为了保证道路畅通，岛口宽不小于 60 m，绕岛行驶的路宽均不小于 10 m. (1) 求 x 的取值范围；(运算中 $\sqrt{2}$ 取 1.4)

(2) 若中间草地的造价为 a 元/ m^2 ，四个花坛的造价为 $\frac{4}{33}ax$ 元/ m^2 ，其余区域的造价为 $\frac{12a}{11}$ 元/ m^2 ，当 x 取何值时，可使“环岛”的整体造价最低？



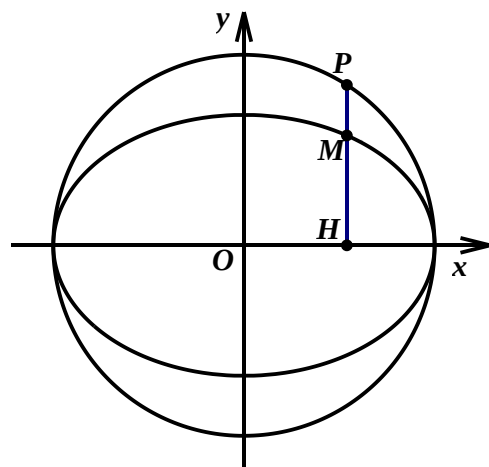
8、已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点到其右准线的距离为 1，到右顶点的距离

为 $\sqrt{2} - 1$ ，圆 $O: x^2 + y^2 = a^2$ ， P 为圆 O 上任意一点.

(1) 求 a, b ;

(2) 过点 P 作 $PH \perp x$ 轴，垂足为 H ，线段 PH 与椭圆交点为 M ，求 $\frac{MH}{PH}$;

(3) 过点 P 作椭圆 E 的一条切线 l ，直线 m 是经过点 P 且与切线 l 垂直的直线，试问：直线 m 是否经过一定点？如果是，请求出此定点坐标；如果不是，请说明理由.



仪征中学 2020 届数学一轮复习补偿训练(8)^{11.19}

答案

一、填空题：

- 1、 $-\frac{1}{2}$ 2、1 3、 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4、 $(-\infty, \frac{1}{e^2}]$ 5、 $y = \pm\sqrt{3}x$ 6、 $(x-1)^2 + y^2 = 1$

二、解答题：

7、解：(1) 由题意得，
$$\begin{cases} x \geq 9, \\ 100 - 2x \geq 60, \\ 100\sqrt{2} - 2x - 2 \times \frac{1}{5}x^2 \geq 2 \times 10, \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} x \geq 9, \\ x \leq 20, \\ -20 \leq x \leq 15, \end{cases} \quad \text{即 } 9 \leq x \leq 15$$

(2) 记“环岛”的整体造价为 y 元，则由题意得

$$\begin{aligned} y &= a \times \pi \times \left(\frac{1}{5}x^2\right)^2 + \frac{4}{33}ax \times \pi x^2 + \frac{12a}{11} \times (10^4 - \pi \times \left(\frac{1}{5}x^2\right)^2 - \pi x^2) \\ &= \frac{a}{11} \left[\pi \left(-\frac{1}{25}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 12x^2 \right) + 12 \times 10^4 \right], \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

令 $f(x) = -\frac{1}{25}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 12x^2$ ，则 $f'(x) = -\frac{4}{25}x^3 + 4x^2 - 24x = -4x\left(\frac{1}{25}x^2 - x + 6\right)$ ，

由 $f'(x) = 0$ ，解得 $x = 10$ 或 $x = 15$ ，\dots\dots\dots 12 \text{ 分}

列表如下：

x	9	(9,10)	10	(10,15)	15
$f'(x)$		—	0	+	0
$f(x)$		\searrow	极小值	\nearrow	

所以当 $x = 10$ ， y 取最小值.

答：当 $x = 10 \text{ m}$ 时，可使“环岛”的整体造价最低.\dots\dots\dots 14 \text{ 分}

8、【解析】(1)
$$\begin{cases} \frac{a^2}{c} - c = 1, \\ a - c = \sqrt{2} - 1, \end{cases}$$

解得： $a = \sqrt{2}$ ， $c = 1$ ， $b = 1$ 。\dots\dots\dots 3 \text{ 分}

(2) 设 $P(x_0, y_0)$, $M(x_0, y_1)$, 则 $\frac{x_0^2}{2} + y_1^2 = 1$, $\because x_0^2 + y_0^2 = 2$,

$$\text{得 } y_1^2 = 1 - \frac{x_0^2}{2} = 1 - \frac{2 - y_0^2}{2} = \frac{y_0^2}{2}, \therefore \frac{MH}{PH} = \sqrt{\frac{y_1^2}{y_0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(3) 方法 1: ①当 $x_0 \neq \pm 1$ 且 $y_0 \neq 0$ 时, 设切线 $l: y - y_0 = k(x - x_0)$, 代入椭圆方程,

$$x^2 + 2[kx - (kx_0 - y_0)]^2 = 2, \text{ 整理得 } (1 + 2k^2)x^2 - 4k(kx_0 - y_0)x + 2(kx_0 - y_0)^2 - 2 = 0, \text{ 由}$$

$$\Delta = 0 \text{ 得, } (kx_0 - y_0)^2 - 2k^2 - 1 = 0, \text{ 即: } (x_0^2 - 2)k^2 - 2x_0y_0k + y_0^2 - 1 = 0,$$

$$\text{又 } x_0^2 + y_0^2 = 2, \text{ 故有 } y_0^2k^2 + 2x_0y_0k + x_0^2 = 1, \text{ 所以 } k = \frac{-x_0 \pm 1}{y_0}, \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{当 } k = \frac{x_0 + 1}{-y_0} \text{ 时, 直线 } m: y - y_0 = \frac{y_0}{x_0 + 1}(x - x_0), \text{ 得 } y = \frac{y_0}{x_0 + 1}(x - 1) \text{ 过定点 } (1, 0);$$

$$\text{当 } k = \frac{x_0 - 1}{-y_0} \text{ 时, 直线 } m: y - y_0 = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x - x_0), \text{ 得 } y = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x + 1) \text{ 过定点 } (-1, 0).$$

①当 $x_0 \neq \pm 1$ 时, 直线 m 为 x 轴, 经过定点 $(1, 0)$ 或 $(-1, 0)$.

②当 $y_0 = 0$ 时, 直线 m 为 $x = 1$ 或 $x = -1$, 经过定点 $(1, 0)$ 或 $(-1, 0)$.

综上所述, 直线 m 经过定点 $(1, 0)$ 或 $(-1, 0)$. $\dots\dots\dots 16 \text{ 分}$

方法 2: 假设直线 m 经过定点 D , 由对称性知, 点 D 在 x 轴上,

$$\text{同方法 1, 当 } x_0 \neq \pm 1 \text{ 且 } y_0 \neq 0 \text{ 时, } (x_0^2 - 2)k^2 - 2x_0y_0k + y_0^2 - 1 = 0,$$

$$\therefore 2x_0y_0k = (x_0^2 - 2)k^2 + y_0^2 - 1,$$

$$\text{直线 } m: y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0), \text{ 令 } y = 0 \text{ 得 } x = ky_0 + x_0,$$

$$\therefore x^2 = k^2y_0^2 + 2kx_0y_0 + x_0^2 = k^2y_0^2 + (x_0^2 - 2)k^2 + y_0^2 - 1 + x_0^2$$

$$= k^2(x_0^2 + y_0^2) - 2k^2 + x_0^2 + y_0^2 - 1 = 1, \text{ 得 } x = \pm 1,$$

即直线 m 经过定点 $(1, 0)$ 或 $(-1, 0)$. 当 $x_0 \neq \pm 1$ 或 $y_0 = 0$ 时, 同方法 1.