2021 届高三年级六校十月份联考

高三数学试题

第Ⅰ卷（共 60 分）

一、单选题：本大题共 8 个小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.设 $U=R$，集合 $A=\left\{x\left|\dfrac{x}{x-1}>0\right.\right\}$， $B=\{x\,|\,-1<x<1\}$，则 $\left(C_uA\right)\cap B$ =（　　）

A. $\left(0,1\right]$　　B. $\left[0,1\right)$　　C. $\left(0,1\right)$　　D. $\left[0,1\right]$

2.函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3x-1}+\dfrac{1}{\ln(2-x)}$ 的定义域为（　　）

A. $\left[\dfrac{1}{3},1\right)\mathrm{U}\left(1,+\infty\right)$　　B. $\left[\dfrac{1}{3},2\right)$　　C. $\left[\dfrac{1}{3},1\right)\mathrm{U}\left(1,2\right)$　　D. $\left(0,2\right)$

3.在 ΔABC 中，已知 $A=45^{\circ},B=30^{\circ},c=\sqrt{2}$，则 $a=$（　　）

A. $\sqrt{6}+\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{6}-\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}-1$　　D. $\sqrt{3}+1$

4.若 $\exists x\in[-1,2]$，使得不等式 $x^2-2x+a<0$ 成立，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $a<-3$　　B. $a<0$　　C. $a<1$　　D. $a>-3$

5.“开车不喝酒，喝酒不开车．”公安部交通管理局下发《关于 2019 年治理酒驾醉驾违法犯罪行为的指导意见》，对综合治理酒驾醉驾违法犯罪行为提出了新规定，根据国家质量监督检验检疫总局下发的标准，车辆驾驶人员饮酒后或者醉酒后驾车血液中的酒精含量阈值见表．经过反复试验，一般情况下，某人喝一瓶啤酒后酒精在人体血液中的变化规律的“散点图”如下图，且该图表示的函数模型

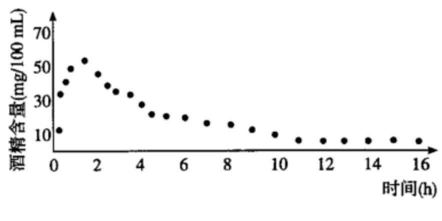
$$f\left(x\right)=\begin{cases}40\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)+13,0\le x<2\\ 90\cdot \mathrm{e}^{-0.5x}+14,x\ge 2\end{cases}$$

，则该人喝一瓶啤酒后至少经过（　　）小时才可以驾车？

（参考数据：$\ln 15\approx 2.71$，$\ln 30\approx 3.40$）

车辆驾驶人员血液酒精含量阈值

驾驶行为类别	阈值（$\mathrm{mg/100mL}$）
饮酒后驾车	≥ 20，<80
醉酒后驾车	≥ 80

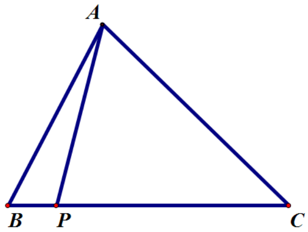


A．5　　B．6　　C．7

6. 已知函数 $f\left(x\right)=x^3-px^2-qx$ 的图像与 x 轴切于点 $(1,0)$，则 $f(x)$ 的极值为（　）

A. 极大值为 $\dfrac{4}{27}$，极小值为 0　　　B. 极大值为 0，极小值为 $-\dfrac{4}{27}$

C. 极小值为 $-\dfrac{5}{27}$，极大值为 0　　　D. 极小值为 0，极大值为 $\dfrac{5}{27}$



7. 如右图，在 ΔABC 中，$BC=4$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=4$，点 P 为边 BC 上的一动点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最小值为（　　）

A. 0　　B. -2　　C. $-\dfrac{9}{4}$　　D. -3

8. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\omega x(\omega>0)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 内有且仅有 3 个零点，则 ω 的取值范围是（　　）

A. $\left[\dfrac{8}{3},\dfrac{11}{3}\right)$　　B. $\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{11}{3}\right]$　　C. $\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{13}{3}\right]$　　D. $\left[\dfrac{10}{3},\dfrac{13}{3}\right)$

二、多选题（本大题共 4 个小题,每小题 5 分,共 20 分，每题有两个或以上的选项正确，全选对得 5 分，少选但没有错选得 3 分，有错选或全不选得 0 分）

9. 若函数 $y=a^x+b-1$（$a>0$，且 $a\neq1$）的图像不经过第二象限，则需同时满足（　　）

A. $a>1$　　B. $0<a<1$　　C. $b>0$　　D. $b\leq0$

10. 下列函数中，最小值是 4 的函数有（　　）

A. $f(x)=x^2+\dfrac{4}{x^2}$；　　B. $f(x)=\cos x+\dfrac{4}{\cos x}(0\leq x<\dfrac{\pi}{2})$；

C. $f(x)=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}$；　　D. $f(x)=3^x+\dfrac{4}{3^x}$.

11. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}kx+1, x\leq0\\ \log_2 x, x>0\end{cases}$，下列是关于函数 $y=f\left[f\left(x\right)\right]$ 的零点个数的判断，其中正确的是（　　）

A. 当 $k>0$ 时，有 3 个零点　　B. 当 $k<0$ 时，有 2 个零点

C. 当 $k>0$ 时，有 4 个零点　　D. 当 $k<0$ 时，有 1 个零点

12. 意大利著名数学家斐波那契在研究兔子繁殖问题时，发现有这样一列数：1，1，2，3，5，…．，其中从第三项起，每个数等于它前面两个数的和，后来人们把这样的一列数组成的数列$\{a_n\}$称为“斐波那契数列”，记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，则下列结论正确的是（　　）

A． $a_6=8$

B． $S_9=54$

C． $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2019}=a_{2020}$

D． $\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_{2019}^2}{a_{2019}}=a_{2020}$

第Ⅱ卷（共 90 分）

三、填空题（每题 5 分，满分 20 分，将答案填在答题纸上）

13. 已知向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$60°$，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，则$|3\vec{a}+2\vec{b}|=$____________.

14. 公元前 6 世纪，古希腊的毕达哥拉斯学派通过研究正五边形和正十边形的作图，发现了黄金分割值约为0.618，这一数值也可以表示为$m=2\sin 18°$. 若$m^2+n=4$，则$\dfrac{1-2\cos^2 153°}{m\sqrt{n}}=$____________.

15. 等差数列$\{a_n\}$中，S_n为其前n项和，若$S_5=2015, S_{2015}=5$，则$S_{2020}=$____________.

16. 若存在两个正实数x, y使等式$x+m(y-x)(\ln y-\ln x)=0$成立，（其中$e=2.71828\ldots$）则实数m的取值范围是____________.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. **(本小题满分 10 分)(注意：在试题卷上作答无效)**

在①$\sin B-\sin C=\sin(A-C)$　②$\dfrac{\sqrt{3}c}{a\cos B}=\tan A+\tan B$　③$2a\cos A=b\cos C+c\cos B$这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求出$b+c$的最大值；若问题中的三角形不存在，请说明理由.（若选择多个，则按第一个条件评分）

问题：已知ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$a=2$，____________，求$b+c$的最大值.

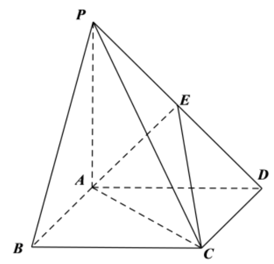
18. **(本小题满分 12 分)(注意：在试题卷上作答无效)**

数列$\{a_n\}$中，S_n为其前n项和，且$a_1+\sqrt{S_n}=n+1$.

（Ⅰ）求S_n，a_n；（Ⅱ）若$b_n=a_n\cdot 2^{\sqrt{S_n}}$，求数列$\{b_n\}$的其前$n$项和$T_n$.

19. **(本小题满分 12 分)(注意：在试题卷上作答无效)**

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，E 为 PD 的中点.



（Ⅰ）证明：$PB//$ 平面 AEC；

（Ⅱ）设 $PA=1, \angle ABC=60^{\circ}$，三棱锥 $E-ACD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$，求二面角 $D-AE-C$ 的余弦值.

20. **(本小题满分 12 分)(注意：在试题卷上作答无效)**

已知函数 $f\left(x\right)=\log_4\left(4^x+1\right)-mx$ 是偶函数，函数 $g\left(x\right)=\frac{4^x+n}{2^x}$ 是奇函数.

（Ⅰ）求 $m+n$ 的值；

（Ⅱ）设 $h\left(x\right)=f\left(x\right)+\frac{1}{2}x$，若 $g\left[h(x)\right]>h\left[\log_4\left(2a+1\right)\right]$ 对任意 $x\geq\log_4 3$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

21. **(本小题满分 12 分)(注意：在试题卷上作答无效)**

已知直线 l_1 与圆 O：$x^2+y^2=9$ 相切，动点 M 到 $E\left(-2,0\right)$ 与 $F\left(2,0\right)$ 两点的距离之和等于 E、F 两点到直线 l_1 的距离之和.

（Ⅰ）求动点 M 的轨迹 C 的方程；

（Ⅱ）过点 F 的直线 l_2 交轨迹 C 于不同两点 A、B，交 y 轴于点 N，已知 $\overrightarrow{NA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{NB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$，试问 $\lambda_1+\lambda_2$ 是否等于定值，并说明理由.

22. **(本小题满分 12 分)(注意：在试题卷上作答无效)**

已知函数 $f(x)=ax-\ln(x+1)$

（Ⅰ）若 $a=1$，求函数 $f(x)$ 的最小值；

（Ⅱ）若函数 $f(x)>0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，求正实数 a 的最值范围；

（III）求证：$\forall n\in N_+$，$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}<e$.（$e$ 为自然对数的底数）

答　　案

第一部分：选择题（每题 5 分，共 60 分）9-12 多选题：全选对得 5 分，少选但没有错选得 3 分，有错选或全不选得 0 分

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	C	B	C	B	A	C	A	AD	ACD	BC	ACD

13. $6\sqrt{3}$

14． $-\frac{1}{2}$

15. -2020

16． $(-\infty,0)$

17.（10 分）解：若选择条件①

$$\sin B-\sin C=\sin(A-C)$$
$$\Rightarrow \sin(A+C)-\sin C=\sin(A-C)$$
$$\Rightarrow 2\cos A\sin C=\sin C$$
$$\because \sin C>0 \therefore \cos A=\frac{1}{2} \therefore A=\frac{\pi}{3}$$

…………5 分

若选择条件②

$$\frac{\sqrt{3}c}{a\cos B}=\tan A+\tan B$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}\sin C}{\sin A\cos B}=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}\sin C}{\sin A\cos B}=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}=\frac{\sin C}{\cos A\cos B}$$
$$\because \sin C>0 \therefore \frac{\sqrt{3}}{\sin A}=\frac{1}{\cos A}\Rightarrow \tan A=\sqrt{3}$$

…………5 分

$$\therefore A=\frac{\pi}{3}$$

若选择条件③

$$2a\cos A=b\cos C+c\cos B$$
$$\Rightarrow 2\sin A\cos A=\sin B\cos C+\sin C\cos B$$
$$\Rightarrow 2\sin A\cos A=\sin(B+C)=\sin A$$
$$\because \sin A>0 \therefore \cos A=\frac{1}{2} \therefore A=\frac{\pi}{3}$$

…………5 分

由余弦定理可知

$$b^2+c^2-2bc\cos A=a^2$$
$$\Rightarrow b^2+c^2-bc=4\Rightarrow (b+c)^2-3bc=4$$
$$\Rightarrow (b+c)^2-4=3bc\le 3\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow \frac{(b+c)^2}{4}\le 4\Rightarrow b+c\le 4$$

当且仅当$b=c$时等号成立综上$(b+c)_{\max}=4$

............10 分

18.（12 分）解：

(1)当$n=1$时，$a_1+\sqrt{a_1}=2$，则$a_1=1$，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$2分

则$S_n=n^2$，当$n\ge 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$4分

当$n=1$时，$a_1=1$适合上式，则$a_n=2n-1$，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$5分

(2)由(1)可知，$b_n=(2n-1)2^n$

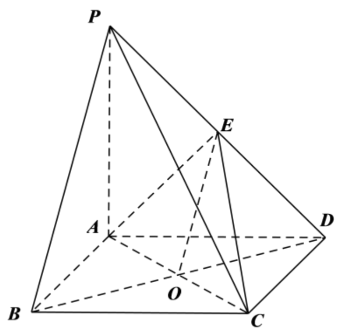
则$T_n=1\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+(2n-1)2^n$

$2T_n=1\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+(2n-1)2^{n+1}$

两式相减得$-T_n=2+2(2^2+\cdots\cdots+2^n)-(2n-1)2^{n+1}$，

$\therefore T_n=(2n-3)2^{n+1}+6$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$12分

19．（12 分）（Ⅰ）证明见解析；（Ⅱ）$\frac{1}{4}$.



解：（Ⅰ）连接BD交AC于点O，连接OE，则O为BD中点，

E为PD的中点，所以$PB//OE$，

$OE\subset$平面ACE, $PB\not\subset$平面ACE，

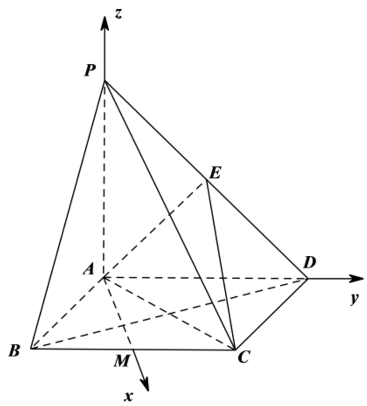
所以$PB//$平面AEC；　　　　　　............5 分

（Ⅱ）设菱形$ABCD$的边长为a，

$V_{P-ABCD}=2V_{P-ACD}=4V_{E-ACD}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{\text{Y}ABCD}\cdot PA=\frac{1}{3}\times\left(2\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)\times 1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则

$a=2$.　　　　　　............7 分



取BC中点M，连接AM.

以点A为原点，以AM方向为x轴，以AD方向为y轴，

以 AP 方向为 z 轴，建立如图所示坐标系.

$D(0,2,0)$，$A(0,0,0)$，$E\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，$C\left(\sqrt{3},1,0\right)$

$\overrightarrow{AE}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{3},1,0\right)$，

设平面 ACE 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，

由 $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{AE},\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{AC}$，

得 $\begin{cases} y+\frac{1}{2}z=0 \\ \sqrt{3}x+y=0 \end{cases}$，令 $x=\sqrt{3}$，则 $y=-3,z=6$

$\therefore \overrightarrow{n_1}=\left(\sqrt{3},-3,6\right)$，

平面 ADE 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(1,0,0)$

$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+9+36}}=\frac{1}{4}$，即二面角 $D-AE-C$ 的余弦值为 $\frac{1}{4}$. …………12 分

20. （12 分）解：（1）由于 $g(x)$ 为奇函数，且定义域为 R，

$\therefore g(0)=0$，即 $\frac{4^0+n}{2^0}=0\Rightarrow n=-1$，

经检验，$n=-1$ 符合题意；

$\because f(x)=\log_4\left(4^x+1\right)-mx$，$\therefore f(-x)=\log_4\left(4^{-x}+1\right)+mx=\log_4\left(4^x+1\right)+(m-1)x$

$\because f(x)$ 是偶函数，

$\therefore f(-x)=f(x)$，得 $-mx=(m-1)x$ 恒成立，故 $m=\frac{1}{2}$

综上所述，可得 $m+n=-\frac{1}{2}$ …………6 分

（2）$\because h(x)=f(x)+\frac{1}{2}x=\log_4\left(4^x+1\right)$，

$\therefore h\left[\log_4(2a+1)\right]=\log_4(2a+2)$

又 $\because h(x)=\log_4\left(4^x+1\right)$，在区间 $[\log_4 3,+\infty)$ 上是增函数且 $h(x)\geq h(\log_4 3)=1$

$\because g\left(x\right)=\dfrac{4^x-1}{2^x}=2^x-2^{-x}$在区间$[1,+\infty)$上是增函数，

$\therefore g\left[h(x)\right]_{\min}=g\left[h(\log_4 3)\right]=g(1)=\dfrac{3}{2}$

由题意，得

$$\begin{cases}2a+2<4^{\frac{3}{2}}\\2a+2>0\\2a+1>0\end{cases}\Rightarrow -\frac{1}{2}<a<3$$

因此实数a的取值范围是：$(-\dfrac{1}{2},3)$. …………12 分

21.（12 分）解（1）设E、O、F三点到直线l_1的距离分别为d_1、d、d_2，O为EF的中点，则

$\because$直线l_1与圆O：$x^2+y^2=9$相切，$\therefore d=3$

$\therefore |ME|+|MF|=d_1+d_2=2d=6>4$

$\therefore$动点M的轨迹是以E、F为焦点，长轴长为 6 的椭圆

$\therefore 2a=6,a=3,c=2,b^2=a^2-c^2=5$

所以动点M的轨迹C：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ …………5 分

（2）方法一：①当l_2斜率为 0 时，$N(0,0)$，$F\left(2,0\right)$，不妨取$A(-3,0)$，$B(3,0)$，

$\therefore \overrightarrow{NA}=(-3,0)$，$\overrightarrow{AF}=(5,0)$，则$\lambda_1=-\dfrac{3}{5}$，

$\overrightarrow{NB}=(3,0)$，$\overrightarrow{BF}=(-1,0)$，则$\lambda_2=-3$，$\therefore \lambda_1+\lambda_2=-\dfrac{18}{5}$． …………7 分

②当l_2斜率不为 0 时，

设l_2：$ty=x-2(t\neq 0)$，$A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,\ y_2)$，则$N\left(0,-\dfrac{2}{t}\right)$．

则$\overrightarrow{NA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}\Rightarrow\left(x_1,y_1+\dfrac{2}{t}\right)=\lambda_1(2-x_1,-y_1)\Rightarrow\lambda_1=-1-\dfrac{2}{ty_1}$

由$\overrightarrow{NB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$，同理可得$\lambda_2=-1-\dfrac{2}{ty_2}$

由$\begin{cases} x=ty+2, \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1, \end{cases}$得$\left(5t^2+9\right)y^2+20ty-25=0$，

$\therefore y_1+y_2=-\dfrac{20t}{5t^2+9}$，$y_1y_2=-\dfrac{25}{5t^2+9}$，　　　　…………9 分

$\therefore \lambda_1+\lambda_2=-2-\left(\dfrac{2}{ty_1}+\dfrac{2}{ty_2}\right)=-2-\dfrac{2}{t}\cdot\dfrac{y_1+y_2}{y_1y_2}=-2-\dfrac{2}{t}\cdot\dfrac{20t}{25}=-\dfrac{18}{5}$

综上，$\lambda_1+\lambda_2=-\dfrac{18}{5}$为定值．　　　　…………12 分

方法二：设$N(0,n)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

$\overrightarrow{NA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}\Rightarrow(x_1,y_1-n)=\lambda_1(2-x_1,-y_1)\Rightarrow\begin{cases} x_1=\dfrac{2\lambda_1}{1+\lambda_1} \\ y_1=\dfrac{n}{1+\lambda_1} \end{cases}$

由于点A在轨迹C上，$\therefore \dfrac{4\lambda_1{}^2}{9(1+\lambda_1)^2}+\dfrac{n^2}{5(1+\lambda_1)^2}=1$

整理，得$\dfrac{5}{9}\lambda_1{}^2+2\lambda_1+1-\dfrac{n^2}{5}=0$

由$\overrightarrow{NB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$同理可得$\dfrac{5}{9}\lambda_2{}^2+2\lambda_2+1-\dfrac{n^2}{5}=0$

$\therefore \lambda_1,\lambda_2$方程关于$\lambda$的方程$\dfrac{5}{9}\lambda^2+2\lambda+1-\dfrac{n^2}{5}=0$的两根

故$\lambda_1+\lambda_2=-\dfrac{18}{5}$为定值．　　　　…………12 分

22.（12 分）　解：（Ⅰ）当$a=1$时，由题意$x\in(-1,+\infty)$

$f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}=0\Rightarrow x=0$

x	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以当$x=0$时，$f(x)_{\min}=f(0)=0$　　　　…………4 分

（Ⅱ）由$f'(x)=a-\dfrac{1}{1+x}$

当 $a\ge 1$ 时，$\frac{1}{1+x}\in(0,1)$，$\therefore f'(x)=a-\frac{1}{1+x}>0$ 恒成立，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)>f(0)=0$ 恒成立，符合

当 $0<a<1$ 时，$f'(x)=\frac{ax-(1-a)}{x+1}=\frac{a}{x+1}(x-\frac{1-a}{a})$，当 $x\in(0,\frac{1-a}{a})$，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $x\in(0,\frac{1-a}{a})$ 上单调递减，此时 $f(x)<f(0)=0$，不符合

综上：$a\ge 1$ …………8 分

说明：此问分离变量结合洛必达法则，酌情给分.

（III）由（Ⅱ）知，$a=1$ 时，$x>\ln(1+x)$，$x\in(0,+\infty)$

取 $x=\frac{1}{k},k\in N_+$，则 $\ln(1+\frac{1}{k})<\frac{1}{k},k=1,2,\cdots,n$

即 $1+\frac{1}{k}<e^{\frac{1}{k}}\Rightarrow\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<e\Rightarrow\left(\frac{k+1}{k}\right)^k<e,k=1,2,\cdots,n$

上式 n 个式子相乘得：$\left(\frac{2}{1}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<e^n$

即 $\frac{(n+1)^n}{n!}<e^n$ 所以 $\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}<e$ …………12 分