

江苏省仪征中学 2019 届高三考前数学热身练 6

一、填空题

1. 一个算法的流程图如图所示，则输出的 a 的值为_____.

2. 函数 $f(x) = \ln(4 - x^2)$ 的定义域为_____.

3. 一根绳子长为 5 米，若将其任意剪为两段，则剪成的两段绳子的长度有一段大于 3 米的概率为_____.

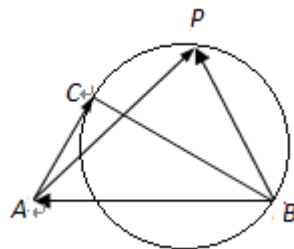
4. 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，则该双曲线的焦距为_____.

5. 某长方体的长、宽、高分别为 2 cm，2 cm，4 cm，则该长方体的体积与其外接球的体积之比为_____.

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_4 = 4$ ，且 a_1, a_2, a_4 成等比数列，则 a_3 的所有值为_____.

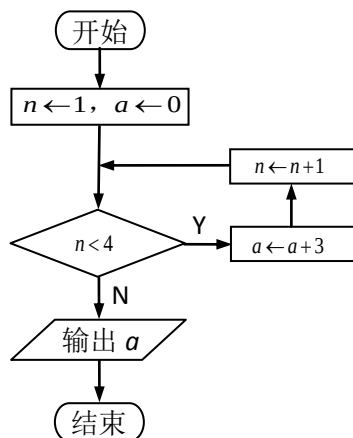
7. 在平面直角坐标系 xOy 中，设点 P 为圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 4$ 上的任意一点，点 $Q(2a, a-3) (a \in \mathbb{R})$ ，则线段 PQ 长度的最小值为_____.

8. 如图，在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $AB = 4$. 以 BC 为直径向 $\triangle ABC$ 外作半圆，点 P 在半圆弧 BC 上，且满足 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BA} = 6$ ，则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP}$ 的值为_____.



9. 已知 x, y 均为正数， $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ ，且满足 $\frac{\sin \theta}{x} = \frac{\cos \theta}{y}$ ， $\frac{\cos^2 \theta}{x^2} + \frac{\sin^2 \theta}{y^2} = \frac{10}{3(x^2 + y^2)}$ ，则 $\frac{x}{y}$ 的值为_____.

10. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 AB 边上的中线 $CM = 1$ ，且 $\frac{1}{\tan A}, \frac{1}{\tan C}, \frac{1}{\tan B}$ 成等差数列，则 AB 的长为_____.



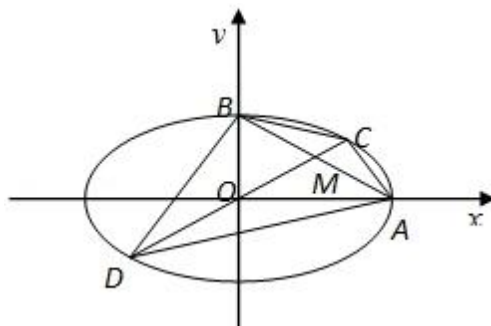
(第 1 题)

二、解答题：

11、如图，设 A, B 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右顶点和上顶点，过原点 O 作直线交线段 AB 于点 M (异于点 A, B)，交椭圆于 C, D 两点 (点 C 在第一象限内)， $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 的面积分别为 S_1 与 S_2 。

(1) 若 M 是线段 AB 的中点，直线 OM 的方程为 $y = \frac{1}{3}x$ ，求椭圆的离心率；

(2) 当点 M 在线段 AB 上运动时，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值。



12、已知 a 为正的常数，函数 $f(x) = |ax - x^2| + \ln x$.

(1) 若 $a=2$ ，求函数 $f(x)$ 的单调增区间；

(2) 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ，求函数 $g(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最小值.

三、附加题

1、在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $A(0,1)$ ， $B(0,-1)$ ， $C(t,0)$ ， $D(\frac{3}{t},0)$ ，其中 $t \neq 0$ 。

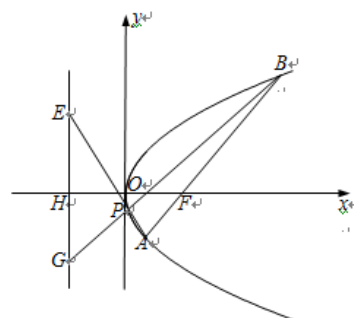
设直线 AC 与 BD 的交点为 P ，求动点 P 的轨迹的参数方程（以 t 为参数）及普通方程。

2、已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F ，过 F 且斜率为 $\frac{4}{3}$ 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B

两点， B 在 x 轴的上方，且点 B 的横坐标为 4。

(1) 求抛物线 C 的标准方程；

(2) 设点 P 为抛物线 C 上异于 A, B 的点，直线 PA 与 PB 分别交抛物线 C 的准线于 E, G 两点， x 轴与准线的交点为 H ，求证： $HG \cdot HE$ 为定值，并求出定值。



(第 23 题)

江苏省仪征中学 2019 届高三考前数学热身练 6 答案

1、9 2、(-2,2) 3、 $\frac{4}{5}$ 4、4 5、 $\sqrt{6}:3\pi$ 6、3,4 7、 $\sqrt{5}-2$

8、7 解析： $\angle ACB=90^\circ$ ， $\angle BAC=60^\circ$ ， $AB=4$ ，则 $AC=2$ ， $BC=2\sqrt{3}$ ， $\angle BDC=90^\circ$ ，

设 BC 为直径的圆交 AB 于 D，则 $\angle ABC=30^\circ$ ，以 D 为原点建立平面直角坐标系，

则 $CD=\sqrt{3}$ ， $BD=3$ ， $AD=1$ ，A (-1,0)，B (3,0)，C (0, $\sqrt{3}$)，设 P (x, y)，

$\overrightarrow{BP}=(x-3,y)$ ， $\overrightarrow{BA}=(-4,0)$ ， $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BA}=-4x+12=6$ ，解得： $x=\frac{3}{2}$ ，又 BC 为直角，

所以， $\angle BPC=90^\circ$ ，所以， $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PB}=0$ ，即 $(-\frac{3}{2}, \sqrt{3}-y)(\frac{3}{2}, -y)=0$ ，

即 $y^2 - \sqrt{3}y - \frac{9}{4} = 0$ ，解得： $y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，所以，P ($\frac{3}{2}$, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$)，

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP} = (1, \sqrt{3}) (\frac{5}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}) = \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = 7$

9、 $\sqrt{3}$

解： $\because \frac{\cos^2 \theta}{x^2} + \frac{\sin^2 \theta}{y^2} = \frac{10}{3(x^2+y^2)}$ ， $\therefore (x^2+y^2) (\frac{\cos^2 \theta}{x^2} + \frac{\sin^2 \theta}{y^2}) = \frac{10}{3}$ ，化为

$\frac{y^2 \cos^2 \theta}{x^2} + \frac{x^2 \sin^2 \theta}{y^2} = \frac{7}{3}$ ，(*) $\therefore \frac{\sin \theta}{x} = \frac{\cos \theta}{y}$ ，

$\therefore \frac{x}{y} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ ， $\frac{y}{x} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ ，代人 (*) 得 $\frac{\cos^4 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\sin^4 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{7}{3}$ ，化为 $\frac{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{7}{3}$ ，

$\therefore \cos^6 \theta + \sin^6 \theta = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta) = 1 \times [(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 - 3\sin^2 \theta \cos^2 \theta] = 1 - 3\sin^2 \theta \cos^2 \theta$ ， $\therefore \frac{1 - 3\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{7}{3}$ ，化为 $\sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{3}{16}$ ，与 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 联立

$\begin{cases} \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{3}{16} \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} \sin^2 \theta = \frac{1}{4} \\ \cos^2 \theta = \frac{3}{4} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \sin^2 \theta = \frac{3}{4} \\ \cos^2 \theta = \frac{1}{4} \end{cases}$ 。由 $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 得

$0 < \cos \theta < \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \theta < 1$ 。故取 $\begin{cases} \sin^2 \theta = \frac{3}{4} \\ \cos^2 \theta = \frac{1}{4} \end{cases}$ 。解得 $\begin{cases} \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ ， $\therefore \frac{x}{y} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sqrt{3}$ 。

故答案为 $\sqrt{3}$.

10、 $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 解析:，根据中线长公式 $CM = \frac{\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}{2}$ ，得 $a^2+b^2 = \frac{c^2}{2} + 2$ 。

由 $\frac{1}{\tan A}$ ， $\frac{1}{\tan C}$ ， $\frac{1}{\tan B}$ 成等差数列，得 $\frac{2}{\tan C} = \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B}$ ，从而

$$2 = \frac{\sin C}{\cos C} \left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} \right) = \frac{\sin C \sin(A+B)}{\cos C \sin A \sin B} = \frac{\sin^2 C}{\sin A \sin B \cos C} = \frac{c^2}{ab \times \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}},$$

解得， $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

11、(1) 由题设，得 A (a, 0)，B (0, b)，则点 M ($\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$)。

因为点 M 在直线 $y = -\frac{x}{3}$ 上，所以 $\frac{b}{2} = -\frac{\frac{a}{2}}{3}$ ，则 $b = -\frac{a}{3}$ 。从而 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{9}} = \frac{2\sqrt{2}a}{3}$ ，

故椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 。

(2) 设 C (x_0 , y_0) ($x_0 > 0$, $y_0 > 0$)，则 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ ，D ($-x_0$, $-y_0$)。

由题设，直线 AB 的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ，即 $ax + by - ab = 0$ 。因为点 C 在直线 AB 的上方，

所以点 C 到直线 AB 的距离 $h_c = \frac{|bx_0 + ay_0 - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{bx_0 + ay_0 - ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。

同理可得点 D 到直线 AB 的距离 $h_D = \frac{|-bx_0 - ay_0 - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|bx_0 + ay_0 + ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{bx_0 + ay_0 + ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。

因为 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ ，即 $b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2$ ，且 $bx_0 > 0$ ， $ay_0 > 0$ 。

所以 $bx_0 + ay_0 \leq 2\sqrt{\frac{b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2}{2}} = 2\sqrt{\frac{a^2 b^2}{2}} = \sqrt{2}ab$ 。

当且仅当 $bx_0 = ay_0$ 时等号成立。

由 $\begin{cases} b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2 \\ bx_0 = ay_0 \end{cases}$ ，得 $\begin{cases} x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}b \end{cases}$ 。

因此, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{h_C}{h_D} = \frac{bx_0 + ay_0 - ab}{bx_0 + ay_0 + ab} = 1 - \frac{2ab}{bx_0 + ay_0 + ab} \leq 1 - \frac{2ab}{\sqrt{2ab} + ab} = 3 - 2\sqrt{2}.$

所以, 当 $\begin{cases} x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}b \end{cases}$ 时, $\frac{S_1}{S_2}$ 取得最大值, 最大值为 $3 - 2\sqrt{2}.$

12、

解答: 解: (1) 由 $a=2$, 得 $f(x) = |2x - x^2| + \ln x (x > 0).$

当 $0 < x < 2$ 时, $f(x) = 2x - x^2 + \ln x$, $f'(x) = 2 - 2x + \frac{1}{x} = \frac{-2x^2 + 2x + 1}{x}.$

由 $f'(x) = 0$, 得 $-2x^2 + 2x + 1 = 0$, 解得 $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, 或 $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ (舍去).

当 $0 < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 时, $f'(x) > 0$; $\frac{1+\sqrt{3}}{2} < x < 2$ 时, $f'(x) < 0.$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$, $(2, +\infty).$

当 $x > 2$ 时, $f(x) = x^2 - 2x + \ln x$, $f'(x) = 2x - 2 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x}.$

由 $f'(x) = 0$, 得 $2x^2 - 2x + 1 = 0.$

$f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上为增函数.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$, $(2, +\infty).$

(2) $g(x) = \frac{f(x)}{x} = |x - a| + \frac{\ln x}{x}, x \in [1, e].$

① 若 $a \leq 1$, 则 $g(x) = x - a + \frac{\ln x}{x}$. 则 $g'(x) = 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2}.$

$\because x \in [1, e], \therefore 0 \leq \ln x \leq 1, 1 - \ln x \geq 0, x^2 + 1 - \ln x \geq 0, \therefore g'(x) > 0.$

$\therefore g(x)$ 在 $[1, e]$ 上为增函数, $\therefore g(x)$ 的最小值为 $g(1) = 1 - a.$

② $a \geq e$, 则 $g(x) = a - x + \frac{\ln x}{x}$, 则 $g'(x) = -1 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{-x^2 + 1 - \ln x}{x^2}.$

令 $h(x) = -x^2 + 1 - \ln x$, 则 $h'(x) = -2x - \frac{1}{x} < 0.$

所以 $h(x)$ 在 $[1, e]$ 上为减函数, 则 $h(x) \leq h(1) = 0.$

所以 $g(x)$ 在 $[1, e]$ 上为减函数, 所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(e) = a - e + \frac{1}{e}.$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } 1 < a < e, \quad g(x) = \begin{cases} x - a + \frac{\ln x}{x}, & x \in (a, e] \\ a - x + \frac{\ln x}{x}, & x \in [1, a] \end{cases},$$

由①, ②知 $g(x)$ 在 $[1, a]$ 上为减函数, 在 $[a, e]$ 上为增函数,

$\therefore g(x)$ 的最小值为 $g(a) = \frac{\ln a}{a}$.

$$\text{综上得 } g(x) \text{ 的最小值为 } g(a) = \begin{cases} 1 - a, & a \leq 1 \\ \frac{\ln a}{a}, & 1 < a < e \\ a - e + \frac{1}{e}, & a \geq e \end{cases}$$

三、附加题

1、直线 AC 的方程为 $\frac{x}{t} + y = 1$, 直线 BD 的方程为 $\frac{x}{\frac{3}{t}} - y = 1$, 得到点 P 的轨迹的参数方程为

$$\begin{cases} x = \frac{6t}{t^2 + 3} \\ y = \frac{t^2 - 3}{t^2 + 3} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数, 且 } t \neq 0), \text{ 普通方程为 } \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 (x \neq 0)$$

2、(1) 由题意得: $F(\frac{p}{2}, 0)$, 因为点 B 的横坐标为 4, 且 B 在 x 轴的上方, 所以 $B(4, \sqrt{8p})$,

因为 AB 的斜率为 $\frac{4}{3}$, 所以 $\frac{\sqrt{8p}}{4 - \frac{p}{2}} = \frac{4}{3}$, 整理得: $p + 3\sqrt{2}\sqrt{p} - 8 = 0$,

即 $(\sqrt{p} - \sqrt{2})(\sqrt{p} + 4\sqrt{2}) = 0$, 得 $p = 2$, 抛物线 C 的方程为: $y^2 = 4x$.

(2) 由 (1) 得: $B(4, 4)$, $F(1, 0)$, 准线方程 $x = -1$, 直线 l 的方程: $y = \frac{4}{3}(x - 1)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{4}{3}(x - 1) \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{ 解得 } x = \frac{1}{4} \text{ 或 } x = 4, \text{ 于是得 } A(\frac{1}{4}, -1).$$

设点 $P(\frac{n^2}{4}, n)$, 又题意 $n \neq 1$ 且 $n \neq -4$,

所以直线 PA: $y + 1 = \frac{4}{n - 1}(x - \frac{1}{4})$, 令 $x = -1$, 得 $y = -\frac{n + 4}{n - 1}$,

$$\text{即 } HE = \left| -\frac{n + 4}{n - 1} \right|, \quad \text{同理可得: } HG = \left| \frac{4n - 4}{n + 4} \right|,$$

$$HG \cdot HE = \left| -\frac{n + 4}{n - 1} \right| \cdot \left| \frac{4n - 4}{n + 4} \right| = 4.$$