高三数学微专题复习课到底怎么上?*

——以“隐形圆”为例

●丁永刚　(徐州市第一中学,江苏 徐州　221000)

摘　要:高三数学微专题复习课,教师如何上才更高效?首先,教师要选好题,把好“选题关”,通过层层递进、环环相扣的“问题串”驱动探究;其次,教师要引导学生善提炼、寻通法、关注“多题一解”;再次,教学设计要关注知识背景、知识衔接、概念生成过程、思维深度、数学计算、学生活动.

关键词:微专题;复习课;问题串;多题一解;思维深度

中图分类号:O123.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1003-6407(2020)10-0031-04

1　教学分析

高三一轮复习后,大多数学生基本扫清了基础知识的盲区.二轮微专题如何复习才能更高效,笔者认为要突出重点知识的横向联系和纵向拓展,重点训练学生的思维能力.此时,教师要选择具有代表性、典型性、示范性的试题进行课堂教学或综合练习,给学生提供合理的“营养搭配”.除此之外,还需要加上“高超的烹饪技术”——归纳类比、提炼共性、领悟通法,通过对“形异质同,多题一解”的研究,异中求同,挖掘出一些共性的内容和相通的本质,这对学生积累和提升思维能力十分有益.

2008 年,江苏省数学高考考查了“阿波罗尼斯圆”(以下简称“阿氏圆”),此后一类与“阿氏圆”相关的试题便反复出现于各大试卷,成了命题的热点.就像细胞会变异一样,“阿氏圆”也开始慢慢地演化,9 年后的 2017 年江苏省数学高考悄无声息地考查了一类“隐形圆”问题.大量研究表明:有一些看似与“圆”无关的“伪装”题,如果深入挖掘题目中的隐含条件或潜在信息,分解转化,便能使之现出原型,从而化隐为显,化难为易.以下是笔者指导开设省级公开课“隐形圆”微专题复习的教学设计,与各位同行分享并探讨“微专题复习课该怎么上”.

2　教学过程

2.1　以案导学,查知学情

教师精心设计 4 个小题的导学案,提前发到学生手中,课前收集学生的解答,便于了解学情.

问题 1　求满足下列条件动点的轨迹方程:

1)定点 $A(2,0)$,$PA=5$;

2)定点 $A(-2,0)$,$B(2,0)$,且满足 $PA=\sqrt{5}PB$;

3)定点 $A(-2,0)$,$B(2,0)$,且满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=5$;

4)定点 $A(-2,0)$,$B(2,0)$,且满足 $PA^2+PB^2=20$.

生 1:代入坐标化简计算可得问题 1)~4)中动点 P 的轨迹方程都是圆.

2.2　自主深化,创设情境

师:以上 4 个小题中的圆都是隐藏在解题过程中,称为“隐形圆”.经过 4 个小题的训练,同学们初步了解了隐形圆发现的一般路径.如何发现隐形圆(显性圆)的方程是关键,请大家归纳有哪些途径可以发现隐形圆?

生 2:利用圆的定义确定隐形圆,如问题 1);已知两个定点 A,B,动点 P 满足 $PA=\lambda PB$(其中 $\lambda\neq 1$)确定隐形圆(即阿氏圆),如问题 2);已知两个定点 A,B,动点 P 满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\lambda$ 确定隐形圆,如问题 3);已知两个定点 A,B,动点 P 满足 PA^2+PB^2 是定值确定隐形圆,如问题 4).

2.3　精讲点拨,学会提升

师:生 2 通过 4 个小题归纳出隐形圆的一般发现路径,是否具有代表性,让我们通过例题来验证他的结论.

问题 2　在 $\triangle ABC$ 中,若 $AB=2$,$AC=\sqrt{2}BC$,求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

(2008 年江苏省数学高考试题第 13 题)

生 3(给出解法 1):在 $\triangle ABC$ 中,$c=2$,$b=\sqrt{2}a$,

* 收文日期:2020-04-09;修订日期:2020-05-09

基金项目:教育部基础教育课程教材发展中心 2019 年课题(20190527)

作者简介:丁永刚(1976—),男,江苏宿迁人,中学正高级教师.研究方向:数学教育.

由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{3a^2-4}{2\sqrt{2}a^2}$,从而

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{3a^2-4}{2\sqrt{2}a^2}\right)^2}=$$

$$\frac{\sqrt{-(a^2-12)^2+128}}{2\sqrt{2}a^2},$$

于是 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}a^2\cdot\frac{\sqrt{-(a^2-12)^2+128}}{2\sqrt{2}a^2}=$$

$$\frac{\sqrt{-(a^2-12)^2+128}}{4},$$

当 $a=2\sqrt{3}$ 时,$(S_{\triangle ABC})_{\max}=2\sqrt{2}$.

师:生 3 借助余弦定理和三角形面积公式求三角形面积,计算量很大,有没有更为简洁的解法?

生 4(给出解法 2):以线段 AB 的中点为坐标原点、AB 所在的直线为 x 轴建立直角坐标系. 设 $A(-1,0)$,$B(1,0)$,$C(x,y)$,由 $AC=\sqrt{2}BC$ 得

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2},$$

化简得 $(x-3)^2+y^2=(2\sqrt{2})^2$(其中 $y\neq 0$),

故 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot|y_C|\leqslant\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

师:生 4 借助动点轨迹是隐形圆,借助图形直观简洁地给出了解答. 请思考求动点轨迹的一般步骤.

生 5:建(建系)、设(设点设直线)、限(找限制条件)、代(代入点的坐标)、化(化简),是求动点轨迹方程的 5 个步骤.

师:生 4 是怎么提前知道动点 C 的轨迹是一个“隐形圆”的呢?

生 4:由 $AC=\sqrt{2}BC$ 得动点 C 的轨迹是一个“隐形圆”

师:根据生 4 所给的解法 2,将问题 2 中的条件和结论交换得到如下问题 3.

问题 3 已知定点 $A(-1,0)$,点 P 是圆 $x^2+y^2=4$ 上任意一点,问:x 轴上是否存在不同于点 A 的定点 B,使 $\dfrac{PA}{PB}$ 都为常数? 若存在,试求出所有满足条件的点 B 坐标;若不存在,请说明理由.

生 6(给出解法 1):设 $B(a,0)$,$P(x,y)$,$\dfrac{PA}{PB}=\lambda$(其中 $\lambda\neq 1$),$A(-1,0)$,则

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}=\lambda,$$

整理得 $$x^2+y^2-\frac{2(1+a\lambda^2)}{\lambda^2-1}x+\frac{\lambda^2a^2-1}{\lambda^2-1}=0,$$

将 $x^2+y^2=4$ 代入上式,得

$$\frac{2(1+a\lambda^2)}{\lambda^2-1}x-\frac{\lambda^2(a^2+4)-5}{\lambda^2-1}=0.$$

由 $\begin{cases}\dfrac{2(1+a\lambda^2)}{\lambda^2-1}=0,\\ \dfrac{\lambda^2(a^2+4)-5}{\lambda^2-1}=0,\end{cases}$ 解得 $a=-1$(舍去),$a=-4$,从而 $\lambda=\dfrac{1}{2}$,于是存在定点 $B(-4,0)$,使得 $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{1}{2}$.

师:生 6 设定点坐标,设比值,通过多项式恒等得出待定系数 a,λ,计算量较大. 若点 P 是圆上任意一点,则是否有更简洁的解法?

生 7(给出解法 2):设 $B(a,0)$,$P_1(-2,0)$,$P_2(2,0)$,$A(-1,0)$,由 $\dfrac{P_1A}{P_1B}=\dfrac{P_2A}{P_2B}$ 得 $a=-1$(舍去),$a=-4$. 当点 B 的坐标为$(-4,0)$时,设 $P(x,y)$,则

$$\frac{PA}{PB}=\frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+4)^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2+2x+1+4-x^2}}{\sqrt{x^2+8x+16+4-x^2}}=$$

$$\frac{\sqrt{2x+5}}{\sqrt{8x+20}}=\frac{1}{2},$$

因此存在定点 $B(-4,0)$,使得 $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{1}{2}$.

师:生 7 是如何想到这个解法的呢?

生 7:由点 P 的轨迹是一个圆及 $\dfrac{PA}{PB}$ 为常数知:点 A 和 B 都是定点,逆向使用“阿氏圆”的知识求解.

师:生 7 根据比值为定值这一特点,先通过两个特殊位置 $P_1(-2,0)$,$P_2(2,0)$,计算出点 B 的坐标,然后代入证明点 B 的坐标符合一般情况,由特殊到一般的思维过程值得大家学习与借鉴.

问题 4 在平面直角坐标系 xOy 中,$A(-3,0)$,$B(1,4)$,$C(3,5)$,动点 P 满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-4$,求 $|\overrightarrow{PC}|$ 的取值范围.

生 8:设 $P(x,y)$,则

$$\overrightarrow{PA}=(-3-x,-y),\quad \overrightarrow{PB}=(1-x,4-y),$$

从而 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-3-x)(1-x)+(-y)(4-y)=-4$,

化简得 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$,

可知圆心 $M(-1,2)$,半径 $R=2$,则由

$$CM-R\leqslant|\overrightarrow{PC}|\leqslant CM+R,$$

得 $$3\leqslant|\overrightarrow{PC}|\leqslant 7.$$

师:生 8 是怎么知道点 P 的轨迹是"隐形圆"的呢?

生 8:由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-4$ 可知点 P 的轨迹是"隐形圆".

师:借助坐标求出点 P 的轨迹是隐形圆,将圆上动点到定点的最值问题转化为圆心到定点的最值加减半径问题. 若将数量积等式变形为不等式,将隐形圆变为显圆,则可求动点相关问题.

问题 5　在平面直角坐标系 xOy 中,$A(-12,0)$,$B(0,6)$,点 P 在$\odot O$:$x^2+y^2=50$ 上. 若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\leqslant 20$,求点 P 的横坐标取值范围.

(2017 年江苏省数学高考试题第 13 题)

生 9:设 $P(x,y)$,则

$$\overrightarrow{PA}=(-12-x,-y),\quad \overrightarrow{PB}=(-x,6-y),$$

从而 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-12-x)(-x)+(-y)(6-y)\leqslant 20.$

将 $x^2+y^2=50$ 代入上式得

$$2x-y+5\leqslant 0,$$

由 $\begin{cases}2x-y+5\leqslant 0,\\ x^2+y^2=50,\end{cases}$ 并结合图形得 $-5\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 1$.

问题 5 是隐形圆方程的一种应用,将数量积为定值变为数量积的平方是定值,可得:

问题 6　在平面直角坐标系 xOy 中,已知$\odot C$:$(x-a)^2+[y-(a-2)]^2=1$,点 $A(0,2)$,若$\odot C$ 上存在点 M,满足 $MA^2+MO^2=10$,求实数 a 的取值范围.

生 10:设 $M(x,y)$,则

$$MA^2+MO^2=x^2+(y-2)^2+x^2+y^2=10,$$

化简得 $$x^2+(y-1)^2=4.$$

由点 M 在$\odot C$ 上也在圆 $x^2+(y-1)^2=4$ 上可得

$$1\leqslant\sqrt{a^2+(a-3)^2}\leqslant 3,$$

解得 $1\leqslant a\leqslant 3$.

师:生 10 是如何知道点 M 的轨迹是隐形圆的呢?

生 10:由 $MA^2+MO^2=10$ 可得点 M 的轨迹是隐形圆.

师:若将 $MA^2+MO^2=10$ 改为平方差是定值,情况如何?

问题 7　在平面直角坐标系 xOy 中,已知$\odot C$:$(x-a)^2+[y-(a-2)]^2=1$,点 $A(0,2)$,若$\odot C$ 上存在点 M,满足 $MA^2-MO^2=10$,求实数 a 的取值范围.

生 11:设 $M(x,y)$,则

$$MA^2-MO^2=x^2+(y-2)^2-(x^2+y^2)=10,$$

化简得 $$y=-\frac{3}{2},$$

由点 M 在直线 $y=-\frac{3}{2}$ 上也在$\odot C$:$(x-a)^2+[y-(a-2)]^2=1$ 上可得

$$\left|(a-2)-\left(-\frac{3}{2}\right)\right|\leqslant 1,$$

解得 $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$.

师:由 $MA^2-MO^2=10$ 可知点 M 的轨迹是直线,问题 5~7 的结论虽然不一样但存在通法,你知道通法是什么吗?

生 12:设动点坐标,求其轨迹方程是解决此类问题的通法.

2.4　即练即评,当堂达成

问题 8　在平面直角坐标 xOy 中,已知点 $A(1,0)$,$B(4,0)$,若直线 $x-y+m=0$ 上存在点 P 使得 $PA=\frac{1}{2}PB$,求实数 m 的取值范围.

问题 9　已知点 $A(2,3)$,$B(6,-3)$,点 P 在直线 $3x-4y+3=0$ 上,若满足等式 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}+2\lambda=0$ 的点 P 有两个,求实数 λ 的取值范围.

3　教后反思

3.1　选题精准高效,提升能力

选题前教师要先下"题海",分析试题考查的知识与方法[1]. 本节课笔者选题由浅入深,具有明显的层次性,所选的题目以及引导学生进行探究的问题,都力求做到"把问题定位在学生认知的最近发展区". 教师通过对问题的引申、层层递进,将对问题的讨论引向深入,重点突出、分析到位,学生对隐形圆的认识不断深化,思维深刻性、灵活性、广阔性得到了很好的提升,教学实现了预期目标.

选题实现了从关注育分价值到关注育人价值的转变,不仅关注学生知识的掌握,而且关注学生思维品质的培养以及意志品质的磨练. 在问题 3 中,教师连续多次追问学生,旨在鼓励其探寻解题入口,归纳数学方法,从而实现育人,关注育人就是关注核心素养.

3.2　问题驱动探究,训练思维

本节课教师精心设问,问题 1 以 4 个小题探路,让学生初步了解隐形圆,通过问题串探究隐形圆的发现路径. 问题 2 是 2008 年江苏省数学高考试题,本题一题多解,既考虑了学生的最近发展区,使用三角形面积公式和余弦定理求三角形面积,又恰当提升难度用解析法求动点的轨迹方程,再借助图形的直观求面积的最值. 由学生板演过程,既有

代数的严谨(去掉了隐形圆上的两个杂质点),又有几何的直观(几何画板演示图形),问题2逆向思维得到问题3,其中解法1突出通性通法的教学,训练了学生严谨的逻辑推理素养. 借助教师适当点拨得出解法2,通过特殊位置、特殊点先猜出结果,然后再证明一般结论,训练了由特殊到一般的推理模式. 问题4一题多变,由向量的数量积等式变为数量积不等式得到问题5,即2017年江苏省数学高考试题第13题;由向量的数量积为负数变为正数,由向量的数量积为定值变为问题6向量的平方和为定值,然后变为问题7向量的平方差是定值;最后转化为问题8和问题9直线和隐形圆位置关系判定的问题,问题层层递进,思维螺旋上升.

在过程性问题的变式中,学生不经意间学到了一个动点和两个定点的数量积为定值时,动点轨迹是隐形圆;一个动点和两个定点向量的平方和为定值时,动点轨迹是隐形圆;然后通过探究归纳出常见隐形圆发现的4种路径,总结提升阶段,提出除了4种路径,还有其他的发现隐形圆的方法,就是通过"建系、设点、限制条件、代入坐标、化简"得出所有求动点轨迹的一般方法,即所谓的通法,此时实现了多题一解. 既有合理有效的思维定势通性通法的训练,也有发散思维的培养. 整节课,师生互动、生生互动、学生体验解题的历程,这对于提高学生的思维品质具有很强的意义.

3.3 师生互动充分,关注全面

"满堂灌"的教学方式已被多数教师摒弃,"满堂问"形似启发,实则为"教师牵着学生"的鼻子走. 基于以上考虑,笔者使用"问题—探究"师生互动开展教学,学生们的知识获得不再是简单的"师传生受",而是学生依据自己已有知识和经验主动建构. 纵观本节课,教师做到了以下6个关注:

1)关注知识背景,提高归纳能力:本课学习重点是如何发现隐形圆,课堂伊始,教师通过问题1的4个小题的设置,帮助学生对隐形圆轨迹常见发生路径做了一个回顾,从而提高学生的归纳能力.

2)关注知识衔接,提升整体认识:为使新知学习符合学生的认知规律,教师立足学生已有的知识背景,从显圆的产生路径已经掌握出发,提出隐圆产生的路径同样可以掌握,促进学生对所学知识的整体认识.

3)关注概念生成,训练想象能力:数学教师要善于利用学生乐于参与的心理,引导学生"做数学",在"做数学"中学数学,并获得对数学精神、数学思想方法的体验. 运用几何画板技术,借助显圆生成的动态画面帮助学生直观想象,引导学生感悟隐形圆的产生过程,训练了学生的空间想象能力.

4)关注思维深度,培养数学抽象:本课教师教学的重心锁定在核心概念和思想方法上,通过问题驱动,层层深入,引导学生深度思维. 设置的问题均为"探究性水平",例如"坐标法求轨迹方程的步骤是什么",要求学生抽象为"建设限代化"以及"有哪些常见的发现隐形圆的路径",鼓励学生发现常见的4种关系式,通过高认知的问题帮助学生探究发现隐形圆的路径和求轨迹方程的一般方法,避免问题设置的碎片化和浅问浅答,从而培养学生的数学抽象能力.

5)关注数学运算,夯实运算能力:问题1的4个小题皆由学生独立完成,问题2、问题3的多种解法皆出自学生之手,问题4~7的解题思路也都来自学生,所有问题的复杂运算都是学生当堂完成,夯实了学生的数学运算能力.

6)关注学生活动,提升核心素养:在问题3中,教师通过阅读题中关键词引导鼓励学生用特殊位置、特殊点先猜后证,体验探究性问题研究的一般步骤,学生通过反思问题解决的过程,从"学会"逐步过渡到"会学". 教师引导学生独立思考与同伴互助相结合,有助于学生形成正确的价值观念,培养成才必备品格和发展关键能力,从而在无形中提升了学生的学科核心素养.

总之,本节课教师借助导学案实现每位学生的"真学习"即真实学习,学生做到了听中学、看中学、说中学、做中学、教中学、悟中学[3],教师做到了精选题、细分析、善提炼. 教师课堂上的6个关注是高三数学微专题复习课教学的一次有益尝试.

参 考 文 献

[1] 许兴霞. 把握核心环节,让高三数学试卷评讲课更有效[J]. 中学数学教学参考,2015(9):37-40.

[2] 严虹,游泰杰,吕传汉. 对数学教学中"教思考教体验教表达"的认识与思考[J]. 数学教育学报,2017,26(5):26-30.

[3] 崔允漷. 指向深度学习的学历案[J]. 人民教育,2017(20):43-48.