

午练半小时

训练1 导数的概念

一、选择题

1. 一物体的运动方程是 $S=3+t^2$ ，则在一小段时间 $[2, 2.1]$ 内相应的平均速度为()

- A. 0.41 B. 3
C. 4 D. 4.1

答案 D

解析 $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(2.1) - S(2)}{2.1 - 2} = \frac{(3 + 2.1^2) - (3 + 2^2)}{0.1} = \frac{0.41}{0.1} = 4.1$.

2. 已知函数 $y=2x^2-1$ 的图象上一点 $(1, 1)$ 及邻近一点 $(1+\Delta x, 1+\Delta y)$ ，则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 等于()

- A. 4 B. $4x$
C. $4+2\Delta x$ D. $4+2(\Delta x)^2$

答案 C

解析 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2(1+\Delta x)^2 - 1 - 1}{\Delta x} = 4 + 2\Delta x$.

3. 如果函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在点 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，那么 x_0 的值是()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{2}$
C. 1 D. 3

答案 A

解析 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$,

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$,

所以 $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $x_0 = \frac{3}{4}$.

4. 曲线 $y=2x^2+1$ 在点 $P(-1, 3)$ 处的切线方程为()

- A. $y=-4x-1$
B. $y=-4x-7$
C. $y=4x-1$
D. $y=4x+7$

答案 A

解析 由题意知, $\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}=\frac{-4\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x}=-4+2\Delta x$,

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $f'(-1)=-4$, 即切线的斜率 $k=-4$,

所以切线方程为 $y-3=-4(x+1)$,

即 $y=-4x-1$.

5.若抛物线 $y=x^2-x+c$ 上一点 P 的横坐标是 -2 , 抛物线在点 P 处的切线恰好过坐标原点, 则 c 的值为()

A.3 B.4 C.-3 D.-4

答案 B

解析 设在点 P 处切线的斜率为 k ,

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(-2+\Delta x)^2 - (-2+\Delta x) + c - (6+c)}{\Delta x} = -5 + \Delta x,$$

$$\therefore \text{当 } \Delta x \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow -5,$$

抛物线在点 P 处的切线斜率 $k=-5$,

$\therefore$ 切线方程为 $y=-5x$.

$\therefore$ 点 P 的纵坐标为 $y=-5 \times (-2)=10$,

将 $P(-2, 10)$ 代入 $y=x^2-x+c$, 得 $c=4$.

二、填空题

6.若函数 $f(x)=x^2-c$ 在区间 $[1, m]$ 上的平均变化率为 3, 则 $m=$ _____.

答案 2

解析 由题意得 $\frac{(m^2-c)-(1^2-c)}{m-1}=3$,

所以 $m=2$ ($m=1$ 舍去).

7.一物体做加速直线运动, 假设 t s 时的速度为 $v(t)=t^2+3$, 则 $t=2$ 时物体的加速度为_____.

答案 4

解析 因为 $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t)^2+3-t^2-3}{\Delta t} = 2t+\Delta t$.

所以当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow 2t$.

所以 $t=2$ 时物体的加速度为 4.

8.已知函数 $f(x)=\frac{1}{x+1}$, 则 $f'(2)=$ _____.

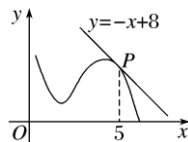
答案 $-\frac{1}{9}$

解析 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x+\Delta x+1} - \frac{1}{x+1}}{\Delta x} = \frac{-1}{(x+\Delta x+1)(x+1)},$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{-1}{(x+1)^2}$,

所以 $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$, 故 $f'(2) = \frac{-1}{3^2} = -\frac{1}{9}$.

9. 如图, 函数 $y=f(x)$ 的图象在点 P 处的切线方程是 $y=-x+8$, 则 $f(5)+f'(5)=$ _____.



答案 2

解析 $\because$ 点 P 在切线上,

$$\therefore f(5) = -5 + 8 = 3, f'(5) = k = -1,$$

$$\therefore f(5) + f'(5) = 3 - 1 = 2.$$

10. 曲线 $y=x^2-3x$ 的一条切线的斜率为 1, 则切点坐标为_____.

答案 (2, -2)

解析 设切点坐标为 (x_0, y_0) ,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) - (x_0^2 - 3x_0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2 + 2x_0\Delta x - 3\Delta x}{\Delta x} = \Delta x + 2x_0 - 3,$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 2x_0 - 3$, 即 $k = 2x_0 - 3 = 1$,

$$\text{解得 } x_0 = 2, y_0 = x_0^2 - 3x_0 = 4 - 6 = -2.$$

故切点坐标为 $(2, -2)$.

三、解答题

11. 已知抛物线 $y=2x^2+1$ 分别满足下列条件, 求出切点的坐标.

(1) 切线的倾斜角为 45° ;

(2) 切线平行于直线 $4x-y-2=0$;

(3) 切线垂直于直线 $x+8y-3=0$.

解 设切点坐标为 (x_0, y_0) , 切线斜率为 k ,

$$\text{则 } \Delta y = 2(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - 2x_0^2 - 1 = 4x_0 \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2, \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x_0 + 2\Delta x,$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 4x_0$, 即 $f'(x_0) = 4x_0$.

(1) $\because$ 抛物线的切线的倾斜角为 45° ,

$$\therefore k = \tan 45^\circ = 1, \text{ 即 } f'(x_0) = 4x_0 = 1,$$

$$\text{解得 } x_0 = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{切点坐标为 } \left(\frac{1}{4}, \frac{9}{8}\right).$$

(2)∵抛物线的切线平行于直线 $4x-y-2=0$,

∴ $k=4$, 即 $f'(x_0)=4x_0=4$, 解得 $x_0=1$,

∴切点坐标为(1, 3).

(3)∵抛物线的切线与直线 $x+8y-3=0$ 垂直,

∴ $k\left(-\frac{1}{8}\right)=-1$, 即 $k=8$,

∴ $f'(x_0)=4x_0=8$, 解得 $x_0=2$,

∴切点坐标为(2, 9).