

$$y=EF$$

$$=\sqrt{x^2 + \left(\frac{100}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{100}{x} \cdot \cos 120^\circ}$$

$$=\sqrt{x^2 + \frac{10\,000}{x^2} + 100}.$$

当 $0 \leq x < 10$ 时, 点 F 在线段 CD 上,

$$\text{由 } S_{\text{四边形}EBCF} = \frac{1}{2}(x+CF) \cdot 10 \cdot \sin 60^\circ = 25\sqrt{3}, \text{ 得}$$

$$CF = 10 - x,$$

当 $BE \geq CF$ 时, $EF =$

$$\sqrt{10^2 + (2x-10)^2 - 2 \cdot 10 \cdot (2x-10) \cdot \cos 120^\circ},$$

当 $BE < CF$ 时, $EF =$

$$\sqrt{10^2 + (10-2x)^2 - 2 \cdot 10 \cdot (10-2x) \cdot \cos 60^\circ},$$

化简均为 $y = EF = 2\sqrt{x^2 - 5x + 25}$.

$$\text{综上, } y = \begin{cases} 2\sqrt{x^2 - 5x + 25}, & 0 \leq x < 10, \\ \sqrt{x^2 + \frac{10\,000}{x^2} + 100}, & 10 \leq x \leq 20. \end{cases}$$

$$(3) \text{ 当 } 0 \leq x < 10 \text{ 时, } y = 2\sqrt{x^2 - 5x + 25} =$$

$$2\sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{75}{4}}, \text{ 于是当 } x = \frac{5}{2} \text{ 时, } y_{\min} = 5\sqrt{3},$$

$$\text{此时 } CF = 10 - x = \frac{15}{2};$$

$$\text{当 } 10 \leq x \leq 20 \text{ 时, } y = \sqrt{x^2 + \frac{10\,000}{x^2} + 100} \geq$$

$$\sqrt{2\sqrt{x^2 \cdot \frac{10\,000}{x^2} + 100} = 10\sqrt{3} > 5\sqrt{3}.$$

故当 E 距点 B 2.5 m, F 距点 C 7.5 m 时, EF 的长度最短, 且为 $5\sqrt{3}$ m.

训练四

1. $\frac{3}{5}$ 【解析】不妨依次将节点标为 1, 2, 3, 4, 5, 则满

足条件的节点应为 2, 3, 4, 故所求概率为 $P = \frac{3}{5}$.

2. $a_n = 2^{n-1}$ 【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$, 由已知得 $2a_7 + a_7q = a_7q^2$, 解得 $q = 2$, 所以 $b_n = \log_2(a_1 \cdot 2^{n-1}) = \log_2 a_1 + n - 1$, 则其前 10 项和为 $10(\log_2 a_1 - 1) + (1 + 2 + \dots + 10) = 45$, 故 $\log_2 a_1 = 0$, 所以 $a_1 = 1$, 所以 $a_n = 2^{n-1}$.

3. $5\sqrt{2}$ 【解析】由已知圆的半径为 $\frac{AB}{2} = \sqrt{13}$, 圆心

为 $(1, 1)$, 且圆心到弦 MN 的距离 $d = \frac{|1 - (1+1)|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $MN = 2\sqrt{13 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 5\sqrt{2}$.

4. 6 【解析】因为 $3^x + 9^y = 3^x + 3^{2y} \geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{2y}} = 2\sqrt{3^{x+2y}}$, 又 $x + 2y = 2$, 所以 $3^x + 9^y \geq 2\sqrt{3^{x+2y}} = 2\sqrt{3^2} = 6$, 当且仅当 $3^x = 3^{2y}$, 即 $x = 1, y = \frac{1}{2}$ 时取等号.

5. 8 【解析】因为点 A 是对称中心, 则点 A 的坐标是 $(2, 0)$, 所以点 A 是线段 BC 的中点, 所以 $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA}$, 所以 $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OA}^2 = 2 \times 4 = 8$.

6. $[-4, 0) \cup (1, 28]$ 【解析】设函数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + a$, 则 $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$, $x \in [-2, 2]$. 令 $f'(x) > 0$, 得 $x \in [-2, 0) \cup (1, 2]$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $x \in (0, 1)$. 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $[-2, 0)$, $(1, 2]$ 上单调递增. 因为 $f(-2) = -28 + a$, $f(0) = a$, $f(1) = -1 + a$, $f(2) = 4 + a$, 所以 $-28 + a \leq 0 < -1 + a$ 或 $a < 0 \leq 4 + a$, 解得 $a \in [-4, 0) \cup (1, 28]$.

7. (1) 由题知 $A = 2$, $\frac{T}{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 所以 $T = \pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$, 所以 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$. 又 $f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{5\pi}{12}, 2\right)$, 所以 $\sin\left(\frac{5\pi}{6} + \varphi\right) = 1$, 所以 $\frac{5\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 则 $\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$. 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

$$(2) \text{ 由(1)得 } f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{因为 } f(\alpha) = 1, \text{ 所以 } \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } \alpha \in \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}\right), \text{ 所以 } 2\alpha - \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

$$\text{所以 } 2\alpha - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}, \text{ 所以 } 2\alpha = \frac{7\pi}{6},$$

$$\text{所以 } \cos 2\alpha = \cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$