命题工作富有挑战性、富有开创性，是艰辛而漫长创造的过程.教师应该学会赏析试题，学习命制试题.可谓，解题难，命题更难，且做且珍惜！

一道质检试题的命制心路与随想

福建省安溪第一中学　　王志良（362400）
福建省泉州第五中学　　杨苍洲（362000）

“从特殊到一般，再从一般到特殊”是常见的数学试题命制方法，也就是说从一些特例归纳出一般性结论，再从一般性结论出发构造特例问题. 笔者参与了泉州市 2014 届高中毕业班质检的命题工作，在一道创新型试题的命制历程中，感触颇深. 下面谈谈该试题的命制心路与感想，与同行们交流探讨.

1　试题内容再现

1.1　题目

如图 1，对于曲线Γ所在平面内的点O，若存在以O为顶点的角α，使得$\alpha \geq \angle AOB$对于曲线Γ上的任意两个不同的点A,B恒成立，则称角α为曲线Γ的相对于点O的“界角”，并称其中最小的“界角”为曲线Γ的相对于点O的“确界角”. 已知曲线C：$y=\begin{cases}\sqrt{1+9x^2}\,(x\leq 0),\\ xe^{x-1}+1(x>0)\end{cases}$（其中$e=2.71828\cdots$是自然对数的底数），$O$为坐标原点，则曲线$C$的相对于点$O$的“确界角”为（　　）

A. $\dfrac{\pi}{3}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{3\pi}{4}$

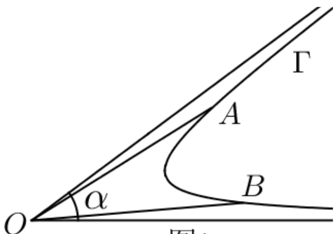

图1

1.2　解析

由“确界角”的定义可知，曲线C相对于点O的“确界角”的两边所在直线就是它的渐近线或经过点O曲线的切线.

（1）当$x\leq 0$时，方程$y=\sqrt{1+9x^2}$可化为$y^2-9x^2=1$，所对应的曲线是双曲线的一部分，其渐近线为直线$y=-3x$，设其倾斜角为α，则$\tan\alpha=-3$；

（2）当$x>0$时，曲线$y=xe^{x-1}+1$存在过点O的切线，设切点$P(x_0,x_0e^{x_0-1})$，则

又$y'=(x+1)e^{x-1}$，

所以$(x_0+1)e^{x_0-1}=\dfrac{x_0e^{x_0-1}+1}{x_0}$，整理得${x_0}^2e^{x_0-1}-1=0$.

令 $f(t)=t^2e^{t-1}-1(t>0)$，则 $f'(t)=(t^2+2t)e^{t-1}>0$，

所以 $f(t)=t^2e^{t-1}-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，且 $f(1)=0$，

从而关于 x_0 的方程 ${x_0}^2e^{x_0-1}-1=0$ 的根为 $x_0=1$.

所以过点 O 曲线 $y=xe^{x-1}+1$ 的切线的斜率 $k=2$. 设切线的倾斜角为 β，则 $\tan\beta=2$，

因为曲线 C 相对点 O 的“确界角”的大小 $\theta=\alpha-\beta$，且 $\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{-3-2}{1+6}=1$.

又由 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，

所以曲线 C 相对点 O 的“确界角”的大小 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，所以答案是 B.

2　试题命制心路

2.1　归纳——从具体到抽象，从特殊到一般

笔者在命题过程中，考虑到试卷的权重，需要一个考查有关双曲线的试题，计划安排在选择题的最后一题，具有一定的“压轴”效果. 左思右想，分析了双曲线的性质与图形特征，注意到双曲线的渐近线刻画了其“开口”的大小，从而产生一个想法，以渐近线的这个几何特征下一个有关角的新定义，以这个定义为基础考查双曲线与其它知识融合交汇.

通过研究，发现如果一条曲线在由一个定点引出的角的内部，则这样的角有无数多个，而且必定存在一个最小角. 此时，突然想到这个最小角的特征与数学中的“上确界”的概念类似，从而引入了“确界角”的概念，初步作如下定义.

如图 1，若曲线 Γ 在顶点为 O 的角 α 的内部，A，B 分别是曲线 Γ 上相异的任意两点，且 $\alpha\ge\angle AOB$，我们把满足条件的最小角 α 叫做曲线 Γ 相对于点 O 的“确界角”.

2.2　演绎——从抽象到具体，从一般到特殊

2.2.1　类比双曲线，构造“新”的曲线

作为具有压轴作用的试题，应该具有较高度的知识交汇，因此设想以分段函数的图象为背景，构造曲线，其中曲线的一部分是双曲线，另一部分也是存在渐近线的曲线. 首先进入脑海的是函数 $y=ax+\dfrac{b}{x}(a,b>0)$. 从而考虑在“确界角”的概念基础上，结合双曲线和函数 $y=ax+\dfrac{b}{x}(a,b>0)$ 命制试题，得到题目 1.

题目 1　如图 1，若曲线 Γ 在顶点为 O 的角 α 的内部，A，B 分别是曲线 Γ 上相异的任意两点，且 $\alpha\ge\angle AOB$，我们把满足条件的最小角 α 叫做曲线 Γ 相对于点 O 的“确界角”. 已知 O 为坐标原点，曲线 C 的方程为 $y=\begin{cases}\sqrt{1+\dfrac{x^2}{3}}(x\le 0)\\ x+\dfrac{1}{x+1}(x>0)\end{cases}$，那么它相对点 O 的“确界角”等于（　　）

A. $\dfrac{\pi}{3}$　　B. $\dfrac{5\pi}{12}$　　C. $\dfrac{7\pi}{12}$　　D. $\dfrac{2\pi}{3}$

2.2.2　变换曲线形式，加大试题难度

考虑到基础较好的学生可能很熟悉上述曲线的方程形式，达不到压轴的效果，因此，设想将曲线

$y=\begin{cases}\sqrt{1+\dfrac{x^2}{3}}(x\le 0)\\ x+\dfrac{1}{x+1}(x>0)\end{cases}$ 变换为关于直线 $y=x$ 对称的曲线，得到形式较新的曲线 $x=\begin{cases}\sqrt{1+\dfrac{y^2}{3}}(y\le 0)\\ y+\dfrac{1}{y+1}(y>0)\end{cases}$，同时也考查了化归与转化思想，以及学生思维的灵活性，得到题目 2.

题目 2 如图 1，若曲线 Γ 在顶点为 O 的角 α 的内部，A，B 分别是曲线 Γ 上相异的任意两点，且 $\alpha\ge\angle AOB$，我们把满足条件的最小角 α 叫做曲线 Γ 相对于点 O 的"确界角". 已知 O 为坐标原点，曲线 C 的方程为 $x=\begin{cases}\sqrt{1+\dfrac{y^2}{3}}(y\le 0)\\ y+\dfrac{1}{y+1}(y>0)\end{cases}$，那么它相对点 O 的"确界角"等于（　　）

A. $\dfrac{\pi}{3}$　　B. $\dfrac{5\pi}{12}$　　C. $\dfrac{7\pi}{12}$　　D. $\dfrac{2\pi}{3}$

2.2.3 研读考试说明，变换考查内容

研讨考试说明，笔者和命组老师认为考查"对勾"函数有超纲嫌疑，应该考查主干知识. 因此我们设想从圆和二次函数两个角度构造曲线，从而得到了题目 3 和题目 4.

题目 3 如图 1，若曲线 Γ 在顶点为 O 的角 α 的内部，A，B 分别是曲线 Γ 上相异的任意两点，且 $\alpha\ge\angle AOB$，我们把满足条件的最小角 α 叫做曲线 Γ 相对于点 O 的"确界角". 已知 O 为坐标原点，曲线 C 的方程为 $y=\begin{cases}\sqrt{1+x^2}(x\ge 0)\\ 2-\sqrt{1-x^2}(x<0)\end{cases}$，那么它相对点 O 的"确界角"等于（　　）

A. $\dfrac{\pi}{3}$　　B. $\dfrac{5\pi}{12}$　　C. $\dfrac{7\pi}{12}$　　D. $\dfrac{2\pi}{3}$

设计意图： 考查双曲线、直线与圆以及直线的斜率与倾斜角等知识；考查函数与方程思想、数形结合思想、分类与整合思想、化归与转化思想、特殊与一般思想及有限与无限思想等；考查推理论证能力、运算求解能力、创新意识等.

题目 4 如图 1，若曲线 Γ 在顶点为 O 的角 α 的内部，A，B 分别是曲线 Γ 上相异的任意两点，且 $\alpha\ge\angle AOB$，我们把满足条件的最小角 α 叫做曲线 Γ 相对于点 O 的"确界角". 已知 O 为坐标原点，曲线 C 的方程为 $y=\begin{cases}\sqrt{4+\dfrac{x^2}{3}}(x\le 0)\\ 2x^2-3x+2(x>0)\end{cases}$，那么它相对点 O 的"确界角"等于（　　）

A. $\dfrac{\pi}{3}$　　B. $\dfrac{5\pi}{12}$　　C. $\dfrac{7\pi}{12}$　　D. $\dfrac{2\pi}{3}$

设计意图： 考查双曲线、二次函数、导数、直线的斜率与倾斜角等知识，可利用导数或方程思想解决切线问题，让学生在求解时多一点思维空间. 考查函数与方程思想、数形结合思想、分类与整合思想、化归与转化思想、特殊与一般思想及有限与无限思想等；考查推理论证能力、运算求解能力、创新意识等.

2.2.4 定位思想方法，加大试题难度

题目 3 和题目 4 虽然在知识与方法的考查上定位在主干知识上，但在难度方面有所欠缺. 因此，笔者又想到在考查知识的基础上，注意思想方法的考查，使该题具有压轴的"份量". 于是，设想设置"确界角"的两边所在的直线的倾斜角为"一般角"，且"确界角"为特殊角，同时也要考虑方程的"形式美"，使得一个试题不但具有考查价值，而且具有欣赏价值. 基上以上设想，笔者努力地探寻一个凹（凸）函数 $y=g(x)$，它满足：① $g(0)$ 是一个整数；② $g'(1)$ 也是一个整数；③ $y=g(x)$ 的图象在点 $(1,g(1))$ 的切线

恰好过原点.通过对不断地探究，发现$g(x)=xe^{x-1}+1$具备以上条件.从而最终得到题目.

2.2.5　推敲文字表述，规范“确界角”的概念

在确定试题承载的曲线后，笔者再仔细地推敲文字表述，感觉对“确界角”的定义表述不够通顺简洁，“确界角”的概念应明确顶点和大小，所以对“新定义”的表述形式作了修正，最终成题.

3　试题编命制后随想

3.1　试题的评价功能

本题考查了双曲线的渐近线、导数的几何意义、直线的斜率与倾斜角、三角函数等知识；考查数形结合思想、函数与方程思想、分类与整合思想、化归与转化思想、特殊与一般思想、有限与无限思想及创新意识等；考查了学生的数学素养等.具有一定的难度，能够起到“压轴”的效果.

3.2　试题的导向功能

3.2.1　重视数学的本质

数学的学习应重视数学的本质，试题的命制源于双曲线，“高于”双曲线.试图从双曲线的渐近线本质特征出发，“自然地”抽象出“确界角”的概念，达到“青出于蓝而胜于蓝”的效果.

3.2.2　重视基本数学思想

试题考查了数形结合思想、函数与方程思想、分类与整合思想、化归与转化思想及创新意识等数学思想与方法，体现了“多思少算”的高考命题理念.

3.2.3　重视创新意识与自学能力

试题中提出了“确界角”的新概念，学生在作答时首先必须准确理解这一新概念，并利用新概念进行解题.从而引导我们在教学活动中应培养学生的创新意识与自学能力.

3.3　试题的命制方法

命题是数学老师们平时教学活动的一个重要环节，也是艰辛而又富有挑战性的工作.一份好的试卷或一个好的题倘若能发挥出其应有的功能，往往对提高教学的有效性是大有裨益的.那么，试题的命制有什么一般的方法吗？从以上试题的命制实例中，可以看出，充分利用并挖掘教材，“从特殊到一般，再从一般到特殊”，这是常用的试题命制方法之一.也就是说，我们往往先研究某类对象，从中抽象这类对象的特征，得到一般性结论，再将一般性结论具体化或特殊化，编制出新的试题.

——发表于《中学数学教学参考》2014 年第 5 期

作者联系方式：

姓　名	通讯地址	电　　话	邮　　箱
王志良	福建省安溪第一中学（362400）	13959938111	zlwang@163.com
杨苍洲	福建省泉州第五中学（362000）	13489816667	yang_c_z@126.com