追得适时　问出精彩
——以“数列中一类存在性问题”复习课为例

练育宏　(江苏省扬州市江都区教育局教研室　225200)

1　问题提出

适时追问是问题式教学法的一种,也是一种提问技巧,即课堂上教师提出问题,学生思考回答后,教师根据回答的结果,找准时机,进行有针对性的“二次提问”.这种适时追问可以使学生的思路得到指引,歧义的说法得到修正,错误的结果找到根源,独特的见解成为精彩的课堂生成,从而构建一个更加真实、开放、灵动、高效的数学课堂.然而不少教师不注重科学问答,漠视课堂追问,造成学生对知识的理解不够深入.那么课堂上如何进行有效的适时追问呢?笔者在参加高三教学视导中听了一节微专题复习课——“数列中一类存在性问题”,教师通过适时追问拓展了学生思维的广度和深度,引领学生对知识的理解从肤浅走向深入.现将该课的实践与思考分享给同行.

2　教学片断展示

2.1　追问在疑难处

不少数学知识系统性、逻辑性强,抽象、难懂.在课堂教学中,教师可在学生感到“似懂非懂”处追问,有效促进学生深度思考,使其理解知识与方法的“真谛”,克服思维的程序化、模式化,使思路逐步清晰化.

教学片断 1

例 1　已知数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=2^n$,是否存在正整数 $p,q,r(p<q<r)$,使得 a_p,a_q,a_r 成等差数列?并说明理由.

学生动手操作后投影生 1 的不完整的过程:

解:假设存在正整数使得三项成等差数列,即 $2a_q=a_p+a_r$,则 $2^{q+1}=2^p+2^r$.

教师:到了这一步,下面我们要解决一个什么问题?

生 1:方程问题.

教师:以往我们碰到的方程通常有 1 个未知数,而这里有 3 个,能否减少?

生 2:我在等式两边同除以 2^p 后做出来了.

(投影生 2 的部分过程)

$2^{q+1-p}=1+2^{r-p}$,因为 $p<q<r$,且 p,q,r 为正整数,所以 $q+1-p>1,r-p>0$.左边为偶数,右边是奇数,产生矛盾,故不存在.

教师追问:你怎么会想到两边同除以 2^p 呢?

生 2:感觉上除以 2^p 后好做一些,我也不知道为什么.

教师追问:为什么好做一些呢?

(学生展开讨论,然后在积极探究、合作交流的基础上,教师派小组代表发言,停顿时长 2 分钟.)

生 3:这个方程有三个变量,通过除以 2^p 可减少变量.

教师追问:除以 2^p 后变量并没有减少呀?

生 3:把 $q+1-p,r-p$ 看成一个整体也即相当于从三元减少为二元.

教师追问:很好!这体现了什么思想?

生 3:整体思想、消元思想.

点评　针对生 1、生 2 的解题过程,教师在疑难处设置了追问环节,其目的是激发学生深度思考并挖出解题方法的来源及方法背后隐含的思想.面对生 1、生 2 的困惑,授课教师并没有立即说出缘由,而是把时间留给学生去思考、探究、讨论,通过适时的追问让学生找到了解法的依据.这里的探究、合作讨论环节很重要,少了这个环节,学生就很难有“顿悟”,也就形成不了解法的“自觉”.

2.2　追问在错误处

学生在学习的过程中难免出现错误,没有错误出现的课堂是不现实的,也是不完美的.在课堂教学过程中,当学生出现错误时,教师不应去批评、责怪学生,而要巧妙利用错误,化“误”为“悟”,使之成为宝贵的教学资源.在学生的错误处进行追问,帮助学生找出错因,加深对所学知识的理解.[1]

教学片断 2

教师追问:两边除以的量为何选择 2^p,而不选择其他?

生 2:因为 p 最小,这样保证了指数部分都是正整数.

教师追问:有一定道理,那么除以其他量是否可行呢?

生 3:也可以除以 2^r.

教师:你的胆识不小,除以了一个最大的量,动手试试看.

投影展示生 3 过程:$2^{q+1-r}=2^{p-r}+1$,因为 $p<q<r$,所以 $q-r+1<1,p-r<0$,左边小于 2,右

边也小于 2.

生 3:左右两边都小于 2,发现不了矛盾.

教师:题中还有什么条件没用到?(稍作停顿)

生 3:p,q,r 是正整数.

教师追问:考虑这个条件,指数部位的范围有变化吗?(停顿片刻)

生 3:$q-r\leqslant -1$,$q-r+1\leqslant 0$,$p-r\leqslant -2$.

教师追问:在这样的范围下我们能否有新的发现?请动手操作一下.(停顿片刻)

投影展示学生 3 的过程:

因为 $q+1-r\leqslant 0$,$p-r\leqslant -2$,所以 $0<2^{q+1-r}\leqslant 1$,$1<1+2^{p-r}\leqslant \frac{5}{4}$,两边范围产生矛盾.

教师追问:很好!之前产生不了矛盾的原因是什么?

生 3:对于 p,q,r 的条件考虑不全导致等式两边范围大了.

教师:很好!其实质是等式两边函数定义域过大导致值域过大,以致两边值域不同.

点评　生 3 所犯的错误具有一定的代表性,教师并没有立即纠正到位,而是通过追问让学生在反思中辨析、修正错误并揭示错误的根源.学生易犯错的地方往往是教学的重点与难点,教师抓住这一错误时机进行追问,适当给学生留有反思自悟的空间,学生对于错误的理解才会更加深刻,这远比教师直接告知更有效.

2.3　追问在“独特”处

每个学生理解题目的方法、途径及深度都有所差异,教学中教师应充分尊重这种差异,关注一些“元认知”问题,追根溯源,照顾到多数学生的所思所想,而不只是个别“优等生”的想法.有时哪怕是一个“笨”的思路,教师也应顺着学生的思路耐心走下去,因势利导,不断优化思路.教学中既要关注“一题多解”,更要重视“方法来源”“方法优化”“通性通法”“多解归一”“道中有道”,通过适时追问让学生的思维经历一个从“发散”到“优化”再到“收敛”的过程.

(1)追问在“多解、归一”处

教学片断 3

教师追问:刚才选择的最大和最小的量都能导致矛盾,那么选择中间的量能否产生矛盾呢?请大家动手操作.(停顿片刻)

投影展示生 4 的部分过程:

因为 $2^{p-q}+2^{r-q}=2$,又 $p<q<r$,且 p,q,$r\in \mathbf{N}^*$,所以 $p-q\leqslant -1$,$r-p\geqslant 1$,$2^{r-p}\geqslant 2$,$0<2^{p-q}\leqslant \frac{1}{2}$,故左边大于 2,右边等于 2,产生矛盾.

教师追问:这位同学还是通过范围产生矛盾的,还有别的产生矛盾的方式吗?(稍作停顿)

生 5:左边是分数,右边是整数,也产生矛盾.

教师追问:很棒!回顾以上三条路径,你认为它们有何共性呢?

(学生展开讨论,然后在积极探究、合作交流的基础上,教师派小组代表发言.)

生 6:两边都要同除以一个变量,其目的一样,都是消元.矛盾形式虽不同,但都与范围相关.

教师追问:为何都和范围有关?

生 7:奇偶数、整分数都要通过观察两边的范围才能发现.

教师:很棒!下面请大家回顾总结以上过程与方法.(停留较长时间,学生自主归纳总结,填在导学案上的“方法总结”处.)

教师板书(图 1):

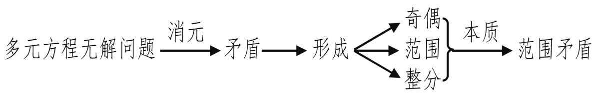

图 1

点评　在生 2 的解法基础上,教师通过适时追问、留白产生了处理这类问题的三条路径及其联系.试想,如果缺少了这个环节,就很难照顾到大多数学生的想法,也不能体现这类问题矛盾产生的多样性.当然,这里教师设置问题的精准性及给学生适当的思考空间也很关键.整个教学过程有“放”有“收”,既让学生品尝到成功的喜悦,又适度培养了学生思维的广阔性与概括性.

(2)追问在“思源、优思”处

教学片断 4

例 **2**　已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{n}{2n+1}$,是否存在正整数 m,$n(1<m<n)$,使得 a_1,a_m,a_n 成等比数列?若存在,求出所有 m,n 的值;若不存在,请说明理由.

学生动手操作后投影生 8 的不完整的解题过程.

解:假设存在正整数 m,n 使得三项成等比数列,则 $a_m^2=a_1a_n$,即 $\left(\frac{m}{2m+1}\right)^2=\frac{1}{3}\times\frac{n}{2n+1}$.

教师:这位同学到了这一步碰到了困难,大家相互讨论一下,想想办法.(稍作停顿)

生 9:直接研究等式两边的范围.

教师:可以,动手试试!

(投影生 9 的部分过程)

$\left(\frac{2m+1}{m}\right)^2=\frac{6n+3}{n}$,因为 $m\geqslant 2$,$\left(\frac{2m+1}{m}\right)^2\in$

$\left(4,\frac{25}{4}\right]$，$n\geqslant 3$，$\frac{6n+3}{n}\in(6,7]$.

教师追问：能不能找到矛盾？

生 9：两边范围有公共部分，说明有解，但不太好求.

教师：不错！和例 1 不同了，这是研究"有解"问题.还有别的思路吗？

生 10：可以用 m 的表达式表示 n.

教师追问：怎么想到的？

生 10：我联想到函数的表示形式.

教师追问：这样表示有什么好处？

生 10：这样只需考虑等式一边的范围，另一边显然.

教师追问：想法不错，那为什么不用 n 去表示 m 呢？

生 10：用 n 表示 m 要开方运算，表达式复杂，不太方便.

教师：很棒！大家可以动手试一试.

（停顿片刻，教师投影了一位学生的过程）

$n(2m+1)^2=(6n+3)m^2$，$n[(2m+1)^2-6m^2]=3m^2$，$n=\frac{3m^2}{-2m^2+4m+1}$.

教师：有了这个结果后，下面该怎么办呢？

生 11：我用的是列举的方法，m 代入 2 满足，m 代入 3，4，5，6 后发现等式右边都是负数，所以 $m=2$，$n=12$.

教师追问：这样解有没有问题？（稍作停顿）

生 12：有问题，$m\geqslant 7$ 时成立与否不清楚.

教师追问：能完善一下他的解法吗？

生 12：可以求一下 $m\geqslant 7$ 时分母的范围，说明分母都是负数.

教师：非常棒！先列举再证明可以解决.还有别的想法吗？

生 13：可以先把 m 的范围缩小后再取值.

教师追问：如何缩小呢？

生 13：由 $n>0$ 得 $-2m^2+4m+1>0$，进而缩小了 m 的范围.

教师追问：怎么想到的？

生 13：等式两边的变量是相互牵制的，这里可以用 n 的范围限制 m 的范围.

教师追问：这里 n 仅仅是大于 0 的限制吗？

生 13：应该是 $n>m$，但本题只需考虑 $n>0$，就可以把范围缩得够小了.

教师板书：

思路 1：列举法 → 证明；

思路 2：缩小变量范围 → 路径 1：$\frac{3m^2}{-2m^2+4m+1}=n$，路径 2：$-2m^2+4m+1>0$.

教师：请大家动手把思路 1 和 2 操作一下.

（投影了一位学生的部分过程）

法 1：当 $m=2$ 时，$n=12$；当 $m\geqslant 3$ 时，因为 $-2m^2+4m+1\leqslant -5$，所以 $\frac{3m^2}{-2m^2+4m+1}<0$，不满足.

法 2：由 $-2m^2+4m+1>0$ 解得 $m\in\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2},1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，因为 $m>1$，$m\in\mathbf{N}^*$，所以 $m=2$，$n=12$.

教师追问：以上两种方法你认为哪个更好？

生 14：差不多，方法 1 稍简单一点.

教师追问：哪个方法功能更强大？（停顿片刻）

生 15：我认为方法 2 更强大，如果本题中的 m 是个较大的数，那列举就很麻烦.

教师：很棒！思考有深度，方法 2 是通法.

点评　教师针对生 8 的不完整的过程，在运算路径、解题思路及来源、方法优化等关键步骤上设置了一系列的问题，通过适时追问，让学生明晰运算方向，清楚"分离"的好处，知道各种"思路"的来源，掌握这类问题的基本方法.整个教学过程层层递进、环环相扣，学生的思维逐步升级.这里的适时追问有效地培养了学生思维的发散性与灵活性.

（3）追问在"题中习道""道中有道"处

变式训练：数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$，数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=\frac{a_n}{a_n+t}$，问：是否存在正整数 t，使得 b_1，b_2，b_m（$m\geqslant 3$，$m\in\mathbf{N}^*$）成等差数列？若存在，求出 t 和 m 的值；若不存在，请说明理由.

学生动手操作后，投影生 16 的解题过程：

解：假设存在正整数 t 使得三项成等差数列，即 $2b_2=b_1+b_m$，则有 $\frac{6}{t+3}=\frac{1}{t+1}+\frac{2m-1}{2m-1+t}$，即 $\frac{5t+3}{(t+3)(t+1)}=\frac{2m-1}{2m-1+t}$，得 $\frac{(t+3)(t+1)}{5t+3}=\frac{2m-1+t}{2m-1}=1+\frac{t}{2m-1}$，$m=\frac{3t+1}{t-1}$，所以 $m=3+\frac{4}{t-1}$.因为 $m\geqslant 3$，所以 $t-1$ 是 4 的正约数，$t-1=1,2,4$，则有 $\begin{cases}t=2,\\m=7,\end{cases}\begin{cases}t=3,\\m=5,\end{cases}\begin{cases}t=5,\\m=4.\end{cases}$

教师追问：到了 $m=\frac{3t+1}{t-1}$ 这一步，为何不用例 2 的思路求解？

生 16：$t>1$ 时，$\frac{3t+1}{t-1}\geqslant 3$ 恒成立，说明通过范

围限制逼不出 t 值.

教师追问:怎么想到从整除角度去研究的?

生16:由例1矛盾形式中有整、分的矛盾,想到了从数的属性角度来限制.

教师:非常漂亮!这位同学能活学活用,给这类问题又增加了一条求解途径.

教师追问:类比例1矛盾的形式,你还有什么想法?(停顿片刻)

(教师随机请2位学生回答,但答不上来)

教师追问:例1的三种矛盾形式最终都可以归结到范围上的矛盾,这里能否类比一下?

生16:“整除”的限制其本质上讲还属于范围的限制.

教师:很好!例2及变式研究的是一类什么问题?这类问题一般怎么解决?(停顿片刻)

生17:多元方程有整数解问题,通常可先分离变量,后用一个变量的范围去限制另一个变量的范围.

教师追问:这类问题中变量本可以无限取值,通过一个变量对另一变量的限制最后变成有限组解,这里实现了一个怎样的飞跃?

生17:从“无限”到“有限”的飞跃.

教师:很棒!下面请大家回顾总结以上过程与方法.(停留较长时间,学生自主归纳总结,填在导学案上的“方法总结”处)

教师板书图2:

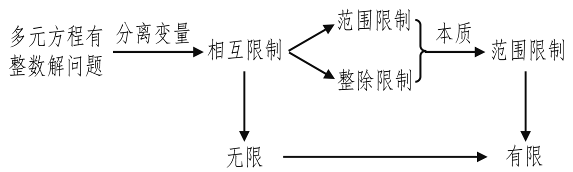

图2

点评 针对生16的解法,教师通过追问让学生感悟到例1中的“道”可以迁移到本题中的“道”上,在这类问题中的“道”中隐含了更深的“道”.这里的适时追问有效地培养了学生思维的深刻性与创造性.

3 教学反思

3.1 教学设置及效果从“无”到“有”

数列的存在性问题一直是江苏高考压轴位置的热点题型,也是教学的难点.面对此类问题,很多学生都“望而却步”.而通过本节课的学习,学生普遍认为受益颇多.本节课紧扣一类不定方程的求解问题,切口小,生态好,难度适中.整节课的教学设计从“无解”到“有解”,从“无限”到“有限”,通过教者在关键处的追问,攻克了一个个思维上的难点,实现了“从无到有”“从有到优”“从优到精”的过程.

3.2 追问要“适时”,也要“适度”

课堂教学过程中,把握好追问的时机很重要.超前则没到火候,滞后则又冷却了.在学生思维混沌状态处追问,能起到“柳暗花明又一村”的效果;在“临界状态”处追问,能使学生的思维在临界点上产生顿悟,发生质的飞跃;在“僵持状态”处追问,能突破思维的瓶颈;在“定势状态”处追问,能够拓宽思维的视角,跳出窠臼,识得庐山真面目.[2] 另外追问也要把握好“度”,追问不等于滥问、乱问,有时教师频繁的追问会打乱学生正常的思维.例2的教学中,有个别追问的意义不大,如“这里 n 仅仅是大于0的限制吗?”此处仅是一个“细节”问题,细枝末节强调过多,就可能会冲淡主题.例2的变式教学中,教师提出“类比例1矛盾的形式,你还有什么想法?”这个问题指向不太明确,以致学生无从回答.

3.3 适时追问体现了教师的教学素养

追问不同于一般的提问,因为它是对原有问题的再一次或更多次的提问,不能一味靠预设,而是要根据学习者的实际情况灵活多变.这就需要教师有足够的教学水平和能力以及教学机智来应对各种现场的生成.本课例2教学中,生11的思路是教师事先没有预设到的,此时,教师并没有强拉回来,而是顺势而为,逐步优化完善他的思路,最终产生一个意外的方法.在适时追问教学中一旦出现意外事件时,教师应静下心来听听学生的想法,他们的思考过程比正确的答案更重要,只有我们多给学生解释的机会,课堂上才有可能产生“层层波浪”,灵光乍现.在追问教学中教师要善于抓住意外事件,多角度去看问题,多给学生展示的时间,这样方能成就一番课堂上意外的精彩.

当然,适时追问本身不是目的,而是引导学生更为正确深入地理解学科知识本原的一种教学手段.通过长期的适时追问教学,学生获得的将不仅是扎实的基础知识、过硬的基本技能,还会有能力的形成、创新意识的培养,以及对个性品质的锤炼.在课堂教学中教师要具有追问意识,更要具有追问的精神,敢于追问和善于追问,问出质量,问出品位,问出智慧.这样,课堂才会充满活力,学生的思维才会被点燃,学生的智慧才会得到最大限度的开发.[2]

参考文献

[1] 陈国林,有效追问,巧妙提升[J].内蒙古教育,2016(20):81.

[2] 金海鑫.有效追问——优化小学数学课堂教学的策略[J].中学课程辅导(教学研究),2017(25):28,32.