江苏省仪征中学2019届高三上学期数学(理)周末限时训练3（2018.9.22）

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、复数、直线和圆

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共70分.

1、已知全集U＝R，集合A={x|x＋3≤0}，B={x|x－5＜0}，那么集合$(\complement_U A)\cap B$等于________.

2、命题："$\exists x>0$，使得x^2－2＜0"的否定形式为______________________.

3、已知i是虚数单位，计算$\dfrac{(2+\mathrm{i})^2}{3-4\mathrm{i}}$的结果是__________.

4、命题"$x=\pi$"是"$\sin x=0$"的__________条件.（填"充分不必要"、"必要不充分"、"充要"、"既不充分也不必要"）

5、已知圆心在x轴上，半径为$\sqrt{2}$的圆C位于y轴的右侧，且与直线x＋y＝0相切，则圆C的标准方程为__________________.

6、已知函数$f(x)=\begin{cases}2x+a, & x\le 1\\ bx-2a, & x>1\end{cases}$,其中$a,b$是常数,若对$\forall x\in R$,都有$f(1-x)=f(1+x)$,则$a+b=$_________.

7、已知$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的夹角为60°，$|\overrightarrow{OA}|$＝2，$|\overrightarrow{OB}|$＝$2\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，若$\lambda+\sqrt{3}\mu=2$，则$|\overrightarrow{OP}|$的最小值为________.

8、若函数$y=x^3-3ax+a$在(1,2)内有极小值，则实数a的取值范围是________.

9、从原点O向圆C：$x^2+y^2-12y+27=0$作两条切线，则该圆被两切点所分成的劣弧与优弧长之比为________.

10、已知直线$y=a$与函数$f(x)=e^x$和$g(x)=x-1$分别交于M，N两点，则线段MN长度的最小值为________.

11、实数x,y满足$x^2+y^2=1$，若$|x+2y+a|+|3-x-2y|$的取值与x,y均无关，则实数a的取值范围是__________.

12、已知$\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{2},\cos\alpha+\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$则$\cos(2\alpha-2\beta)$=_________.

13、已知 O 为△ABC 的垂心，且 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 A 角的值为__________.

14、已知 $f(x)$是定义域为（0，＋∞）的单调函数，若对任意的 x∈（0，＋∞），都有 $f[f(x)+\log_{\frac{1}{3}} x]=4$，且关于 x 的方程$|f(x)-3|=x^3-6x^2+9x-4+a$ 在区间（0，3]上有两解，则实数 a 的取值范围是________.

二、解答题：本大题共 6 小题，共 90 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15、(本小题满分 14 分) 已知函数 $f(x)=\sin x\cdot\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2},(x\in R)$.

（1）求 $f(x)$的最小正周期；

（2）求 $f(x)$的单调递增区间；

（3）求 $f(x)$图象的对称轴方程和对称中心的坐标.

16、(本小题满分 14 分) 在锐角△ABC 中，a、b、c 分别为角 A、B、C所对的边，且 $\sqrt{3}a=2c\sin A$.

(1)求角 C 的大小：

(2)若 c＝$\sqrt{7}$，且△ABC 的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，求 $a+b$ 的值.

17、（本小题满分 14 分）已知函数 $f(x)=\ln(1+x)+a\ln(1-x)(a\in R)$ 的图象关于原点对称.

（1）求定义域；

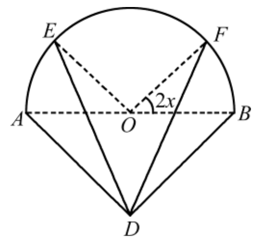
（2）求 a 的值；

（3）若 $g(x)=e^{f(x)}-\dfrac{1-m}{2+m}$ 有零点，求 m 的取值范围.

18、(本小题满分 16 分) 某广告公司为在我市枣林湾举办的江苏省第十届园艺博览会设计了一种霓虹灯，样式如图中实线部分所示．其上部分是以 AB 为直径的半圆，点 O 为圆心，下部分是以 AB 为斜边的等腰直角三角形，DE、DF 是两根支杆，其中 $AB=2m$，$\angle EOA=\angle FOB=2x(0<x<\dfrac{\pi}{4})$．现在弧 EF、线段 DE 与线段 DF 上装彩灯，在弧 AE、弧 BF、线段 AD 与线段 BD 上装节能灯．若每种灯的“心悦效果”均与相应的线段或弧的长度成正比，且彩灯的比例系数为 $2k$，节能灯的比例系数为 $k(k>0)$，假定该霓虹灯整体的“心悦效果” y 是所有灯“心悦效果”的和．

(1) 试将 y 表示为 x 的函数；

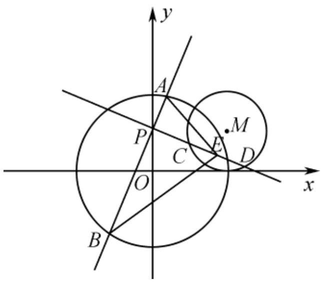
(2) 试确定当 x 取何值时，该霓虹灯整体的“心悦效果”最佳？



19、(本小题满分 16 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，过点 $P(0，1)$且互相垂直的两条直线分别与圆 O：$x^2+y^2=4$ 交于点 A，B，与圆 M：$(x-2)^2+(y-1)^2=1$ 交于点 C，D．

(1) 若 $AB=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$，求 CD 的长；

(2) 若 CD 的中点为 E，求$\triangle ABE$ 面积的取值范围．



20、(本小题满分 16 分) 已知函数 $f(x)=a(2-x)\mathrm{e}^x$， $g(x)=(x-1)^2$．

(1)若曲线 $y=g(x)$ 的一条切线经过点 $M(0,-3)$，求这条切线的方程.

(2)若关于的方程 $f(x)=g(x)$ 有两个不相等的实数根 x_1，x_2.

①求实数 a 的取值范围；

②证明：$x_1+x_2<2$.

江苏省仪征中学2018届高三上学期数学(理)周末限时训练3答案

1、$\{x|-3<x<5\}$；　2、$\forall x>0$，都有 $x^2-2\geq 0$；　3、$-\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i$；　4、充分不必要；

5、$(x-2)^2+y^2=2$；　6、$-\frac{10}{3}$；　7、$2\sqrt{3}$；　8、$(1,4)$；　9、$\frac{1}{2}$；　10、2；

11、$a\geq\sqrt{5}$；　12、$-\frac{7}{32}$；　13、$\frac{\pi}{4}$；　14、（0，5].

15、解: $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\sqrt{3}\frac{\cos 2x+1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2},(x\in R)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，

……………………………………………………………………………………………4分

（1）$T=\pi$；……………………………………………………………………………6分

（2）由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq 2x-\frac{\pi}{3}\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in z)$，……………………………………8分

可得 $f(x)$ 单调增区间 $[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5}{12}\pi]$（$k\in z$）.………………………………10分

（3）由 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 得对称轴方程为 $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in z)$，……………………12分

由 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi$ 得对称中心坐标为 $(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},0)(k\in z)$.　14分

16、解（1）由 $\sqrt{3}a=2c\sin A$ 及正弦定理得，$\frac{a}{c}=\frac{2\sin A}{\sqrt{3}}=\frac{\sin A}{\sin C}$，……………………2分

$\because\sin A\neq 0,\therefore\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，…………………………………………………………………4分

$\because\Delta ABC$ 是锐角三角形，$0<C<\frac{\pi}{2}$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$.………………………………………7分

（2）解法1：$\because c=\sqrt{7},C=\frac{\pi}{3}$.由面积公式得，

$\frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,即$ab=6$　①

由余弦定理得 $a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{3}=7$,即$a^2+b^2-ab=7$　②　…………………11分

由②变形得$(a+b)^2=25$,故$a+b=5$.………………14分

17、解:(1)函数 $f(x)=ln(x+1)+aln(1-x)$ 有意义,

必有: $\begin{cases}x+1>0\\1-x>0\end{cases}$,解得 $x\in(-1,1)$

函数的定义域为: $(-1,1)$...(3分)

(2)函数 $f(x)=ln(x+1)+aln(1-x)(a\in R)$ 的图象关于原点对称,函数是奇函数,

函数的定义域为: $(-1,1)$,

所以 $f(x)=-f(-x)$,即 $ln(x+1)+aln(1-x)=-ln(-x+1)-aln(1+x)$

$\therefore a=-1$　...(8分)

(3) $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ ，

由题意：$e^{f(x)}-\frac{1-m}{2+m}=0,$ 在 $x\in(-1,1)$ 上有解，即：$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1-m}{2+m},3x=-2m-1,$

$\therefore x=-\frac{2}{3}m-\frac{1}{3}\in(-1,1),-1<-\frac{2}{3}m-\frac{1}{3}<1,\therefore -2<m<1,$

$\therefore m\in(-2,1)$……………………………………………14 分

18、解：(1)∵∠EOA=∠FOB=2x，

∴弧 EF、AE、BF 的长分别为 π-4x，2x，2x.

连接 OD，则由 OD=OE=OF=1，得 $\angle FOD=\angle EOD=2x+\frac{\pi}{2}$,

$\therefore DE=DF=\sqrt{1+1-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{2+2\sin 2x}=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$,

$\therefore y=2k(2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+\pi-4x)+k(2\sqrt{2}+4x)$

$=2k(2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-2x+\sqrt{2}+\pi)$.

(2)由 $y'=4k(\sqrt{2}(\cos x-\sin x)-1)=0$，得 $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$， 即 $x=\frac{\pi}{12}$.

又当 $x\in\left(0,\ \frac{\pi}{12}\right)$时，y'>0，此时 y 在$\left(0,\ \frac{\pi}{12}\right)$上单调递增；

当 $x\in\left(\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{4}\right)$时，y'<0，此时 y 在$\left(\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{4}\right)$上单调递减.

故当 $x=\frac{\pi}{12}$时，该霓虹灯整体的“心悦效果”最佳.

19、解：(1) 由题可知，直线 AB 斜率显然存在，设为 k，则直线 AB：$y=kx+1$.

因为 O 点到直线 AB 的距离 $d_1=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$，$\therefore\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2=4$，$\therefore AB=2\sqrt{\frac{4k^2+3}{k^2+1}}$.(3 分)

由 $2\sqrt{\frac{4k^2+3}{k^2+1}}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$得 $k^2=15$.

因为直线 AB 与直线 CD 互相垂直，则直线 CD：$y=-\frac{1}{k}x+1$，

$\therefore$M 点到直线 CD 的距离 $d_2=\frac{-\frac{2}{k}+1-1}{\sqrt{1+\left(-\frac{1}{k}\right)^2}}$,

$\therefore\left(\frac{CD}{2}\right)^2=1-\left[\frac{-\frac{2}{k}+1-1}{\sqrt{1+\left(-\frac{1}{k}\right)^2}}\right]^2$，$CD=2\sqrt{1-\frac{4}{k^2+1}}=2\sqrt{1-\frac{4}{15+1}}=\sqrt{3}$.(6 分)

(2) 当直线 AB 的斜率不存在时，△ABE 的面积 $S=\frac{1}{2}\times4\times2=4$；

当直线 AB 的斜率存在时，设为 k，则直线 AB：$y=kx+1$，$k\neq0$，直线 CD：$y=-\frac{1}{k}x+1$.

由$\frac{\left|-\frac{1}{k}2-1+1\right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{k}\right)^2+1}}<1$ 得 $k^2>3$，(8 分)

所以 $k\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$．因为$\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2=4$，所以 $AB=2\sqrt{\frac{4k^2+3}{k^2+1}}$.

因为 E 点到直线 AB 的距离即 M 点到直线 AB 的距离 $d=\frac{|2k-1+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}}$,

所以△ABE 的面积 $S=\frac{1}{2}AB\,d=2\sqrt{\frac{(4k^2+3)k^2}{(k^2+1)^2}}=2\sqrt{\frac{4+\frac{3}{k^2}}{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^2}}$.(12 分)

令 $4+\frac{3}{k^2}=t(4<t<5)$，则 $S=6\sqrt{\frac{t}{(t-1)^2}}=6\sqrt{\frac{1}{t+\frac{1}{t}-2}}\in\left(\frac{3\sqrt{5}}{2},4\right)$.

综上，△ABE 面积的取值范围是$\left(\frac{3\sqrt{5}}{2},4\right]$.(16 分)

20、解:(1)解法一　设经过点 $M(0,-3)$ 的切线与曲线 $y=g(x)$ 相切于点 $Q(t,(t-1)^2)$，

由 $g(x)=(x-1)^2$ 得 $g'(x)=2(x-1)$，

所以该切线方程为 $y-(t-1)^2=2(t-1)(x-t)$，　　　……………………（2 分）

因为该切线经过 $M(0,-3)$，所以 $-3-(t-1)^2=2(t-1)(-t)$，解得 $t=\pm2$，

所以切线方程为 $2x-y-3=0$ 或 $6x+y+3=0$.　　　……………………（3 分）

解法二　由题意得曲线 $y=g(x)$ 的切线的斜率一定存在，设所求的切线方程为 $y=kx-3$，

由 $\begin{cases} y=kx-3 \\ y=(x-1)^2 \end{cases}$，得 $x^2-(2+k)x+4=0$，　　　……………………（2 分）

因为切线与抛物线相切，所以△=$(2+k)2-16=0$，解得 $k=2,-6$，

所以所求的切线方程为 $2x-y-3=0$ 或 $6x+y+3=0$.　……………………　（4 分）

（2）①由 $f(x)=g(x)$，得 $g(x)-f(x)=0$.

设 $h(x)=g(x)-f(x)=a(x-2)e^x+(x-1)^2$，

则 $h'(x)=a(x-1)\mathrm{e}^x+2(x-1)=(x-1)(a\mathrm{e}^x+2)$，

由题意得函数 $h(x)$ 恰好有两个零点.　　　……………………　（5 分）

（i）当 $a=0$，则 $h(x)=(x-1)^2$，

$h(x)$ 只有一个零点 1.　　　……………………（6 分）

（ii）当 $a>0$ 时，由 $h'(x)<0$ 得 $x<1$，由 $h'(x)>0$ 得 $x>1$，

即 $h(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上为减函数，在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，

而 $h(1)=-ae<0$,　 $h(2)=1$，

所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有唯一零点，且该零点在 $(1,2)$ 上.

取 $b<0$, 且 $b<\ln\frac{1}{2a}$，则 $h(b)>\frac{1}{2}(b-2)+(b-1)^2=b(b-\frac{3}{2})>0$

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上有唯一零点，且该零点在 $(b,1)$ 上，

所以 $a>0, h(x)$ 恰好有两个零点.　　　……………………（8 分）

（iii）当 $a<0$ 时，由 $h'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $\ln(-\frac{2}{a})$，

若 $a=-\frac{2}{\mathrm{e}}$，$h'(x)=-\frac{2}{\mathrm{e}}(x-1)(\mathrm{e}^x-\mathrm{e})\leqslant0$，所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上至多有一个零点.

若 $a<-\frac{2}{\mathrm{e}}$，则 $\ln(-\frac{2}{a})<1$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，即 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

又 $h(1)=-ae>0$，所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上至多有一个零点.

当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$h(x)$ 在 $(\ln(-\frac{2}{a}),1)$ 上单调递增，在 $(-\infty,\ln(-\frac{2}{a}))$ 上为减函数，

又 $h[\ln(-\frac{2}{a})]=-2[\ln(-\frac{2}{a})-2]+[\ln(-\frac{2}{a})-1]^2=[\ln(-\frac{2}{a})-2]^2+1>0$，

所以 h(x)在 $(-\infty,\ln(-\frac{2}{a}))$ 上无零点. ……………………… （10 分）

若 $a>-\frac{2}{\mathrm{e}}$，则 $\ln(-\frac{2}{a})>1$，又当 $x\leq 1$ 时，$h(x)\geqslant h(1)=-ae>0$，

所以 $h(x)$ 不存在零点. $h(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上无零点

故当 $x\in(1,\ln(-\frac{2}{a}))$ 时，$h(x)>0$；当 $x\in(\ln(-\frac{2}{a}),+\infty)$ 时，$h'(x)>0$.

因此 $f(x)$ 在 $(1,\ln(-\frac{2}{a}))$ 上单调递增，在 $(\ln(-2a),+\infty)$ 上单调递减.

又 $h[\ln(-\frac{2}{a})]=-2[\ln(-\frac{2}{a})-2]+[\ln(-\frac{2}{a})-1]^2=[\ln(-\frac{2}{a})-2]^2+1>0$。

所以 $h(x)$ 在 $(1,\ln(-\frac{2}{a}))$ 无零点，在 $(\ln(-2a),+\infty)$ 至多有一个零点. ………………（11 分）

综上，的取值范围为 $(0,+\infty)$. ……………………… （12 分）

②不妨设 $x_1<x_2$，

由①知 $x_1\in(-\infty,1),x_2\in(1,+\infty)$，$2-x_2\in(-\infty,1)$，且 $a>0$，$h(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递减，

所以 $x_1+x_2<2$ 等价于 $h(x_1)>h(2-x_2)$，即 $h(2-x_2)<0$.

由于 $h(2-x_2)=-ax_2\mathrm{e}^{2-x_2}+(x_2-1)^2$，

且 $h(x_2)=a(x_2-2)\mathrm{e}^{x_2}+(x_2-1)^2=0$，所以

$$\begin{aligned}h(2-x_2)&=a[-x_2\mathrm{e}^{2-x_2}-(x_2-2)\mathrm{e}^{x_2}]\\&=-a[x_2\mathrm{e}^{2-x_2}+(x_2-2)\mathrm{e}^{x_2}]\end{aligned}.$$ ……………………… （14 分）

设 $\varphi(x)=xe^{2-x}+(x-2)e^x$,其中 $x>1$.，则 $\varphi'(x)=(x-1)(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2-x})$，

当 $x>1$ 时，$\mathrm{e}^x>e,\mathrm{e}^{2-x}<e$，所以 $\varphi'(x)>0$.而 $\varphi(1)=0$，故当 $x>1$ 时，$\varphi(x)>0$.

从而 $f(2-x_2)=-a\varphi(x_2)<0$，故 $x_1+x_2<2$. ……………………… （16 分）