指向素养教学的课堂研修

——在“核心素养背景下数学教师的专业发展”（南京）会议上的发言

陕西师范大学数学系　罗增儒

邮编：710062　电话（微信）：13609297766

E-mail：zrluo@snnu.edu.cn

老师们：下午好.

今天（8 月 20 日）上下午，我们连续欣赏了“导数的综合应用——不等式恒成立问题”（田晓霞）、“点到直线的距离公式”（朱占奎）和“应用题专题复习课——一道课本习题的激活与拓展”（叶琳）三节高考复习课，刚才大家又进行了热烈的讨论．首先，让我们对三位老师的流畅展示表示由衷的感谢与崇高的敬意.

我觉得，本次会议除了一如既往的学术氛围浓浓之外，还有两个值得一提的背景，其一是体现高中新课标的精神，指向素养教学；其二是体现高中课堂的一个兴奋中心，聚焦高考复习．结合这些情况，我的发言标题为“指向素养教学的课堂研修”，有两个关键词：核心素养，课堂研修.

1 “核心素养”的落实线路

关于“核心素养”，明天还会有解读，这里，仅简要回顾一下从顶层设计到底层落实的线路.

1-1　从立德树人到数学核心素养

关于“数学素养”这个词大家应该并不陌生，因为 2003 年高中数学课程标准（实验稿）中至少出现 10 次、2011 年的义务教育数学课程标准中至少出现 4 次，但无论是课标还是课标解读都没有对数学素养的内涵与外延进行过界定，在教学实践中大家是朦胧的，更关注的是落实数学知识、数学方法、数学能力、数学思想．这种情况的改观始于 2012 年．

（1）2012 年 11 月，党的十八大报告指出：“把立德树人作为教育的根本任务，培养德智体美全面发展的社会主义建设者和接班人．”2017 年 10 月党的十九大会议上，习近平总书记再次强调，“要全面贯彻党的教育方针，落实立德树人根本任务”．

可见，“立德树人”体现了国家的顶层设计．笔者理解，“德”是指以社会主义核心价值观为引领，自然包括中华民族优秀传统美德、社会主义道德等；“立德树人”是指教育事业不仅要注重传授知识、培养能力，还要把社会主义核心价值体系融入国民教育体系之中，引导学生树立正确的世界观、人生观、价值观、荣辱观．

（2）2014 年 3 月，教育部发布《关于全面深化课程改革 落实立德树人根本任务的意见》，要求“把核心素养落实到学科教学中，促进学生全面而有个性的发展．”自此以后，

核心素养就成为教育改革中的一个热门话题．但从国家层面的“立德树人”设计到课堂层面的“核心素养”落实之间，有一个如何操作的现实问题．

（3）2016 年 9 月，教育部正式发布《中国学生发展核心素养》研究成果，明确了核心素养的含义和内容（包括一个核心、三大领域、六种素养和十八个要点等，参见图 1），从中观层面回答了“立什么德、树什么人”的根本问

题．

图 1

《中国学生发展核心素养》成果是对社会主义核心价值观和党的教育方针中所确定的教育培养目标的具体化和细化，是连接宏观教育理念、培养目标与具体教育教学实践的中间环节．社会主义核心价值观和党的教育方针可以通过核心素养这一桥梁，转化为教育教学可运用的、教育工作者

易于理解的具体要求，进而贯彻到各个学段，体现到各个学科，最终落实到学生身上.

接着是，各学科根据“中国学生发展核心素养”的中观设计，研究“学科核心素养”，修订“课程标准”，进行微观落实.

（4）2018 年 1 月，《普通高中数学课程标准（2017 年版）》正式发布，界定了数学核心素养的含义，提出了六个数学核心素养：数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析，并阐述了每个数学核心素养的内涵、价值、表现和目标.

数学核心素养是人才培养所应达到的质量标准在数学学科层面的表达，它是数学学科本质的提取和凝练，旨在使学生通过数学知识、数学方法的学习，数学思想、数学价值的领悟，以及态度、情感的熏陶，形成正确的价值观念、必备品格和关键能力. 数学核心素养是“数学思想”中的 DNA，是核心素养（从而是立德树人）进入数学课堂的一个实施通道.

（5）再下来是，根据《普通高中数学课程标准（2017 年版）》修订高中数学教材，为“教”与“学”活动提供学习主题、基本线索和具体内容，为实现数学课程目标提供发展学生数学核心素养的教学资源，并通过课堂教学和评价体系等方式落实为学生核心素养的发展.

指向数学核心素养的课程实施源于学科知识又超越学科知识，是学生在学习数学课程的过程中所形成的、对数学本质的深刻认识和深度把握，具有持久性和可迁移性，它能够引领学生将习得的数学知识和技能应用到日常生活中去，帮助学生用数学的眼光发现和提出问题、用数学的思维分析和解决问题、用数学的语言表达和交流问题．

（6）关于初中阶段的数学核心素养，初高中课程标准修订组组长史宁中教授说过：义务教育阶段的数学核心素养现在还没有开始正式讨论，但也离不开义务教育数学课程标准中提到的八个核心词：数感、符号意识、推理能力、模型思想、几何直观、空间想象、运算能力、数据分析观念．我们可以这样理解，数学抽象在义务教育阶段主要表现为符号意识和数感，推理能力即逻辑推理，模型思想即数学模型，直观想象在义务教育阶段体现的就是几何直观和空间想象．还有两个超出数学范畴的一般素养，义务教育阶段强调的是应用意识和创新意识，高中阶段则增加了学会学习．（参见文[2]）

冒着过于简单化的风险可以说，《义务教育数学课程标准（2011 年版）》提出的 10 个“核心概念”就是目前初中阶段的数学核心素养，有数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力、模型思想、应用意识和创新意识．

由这个简要的回顾可以看到，从立德树人的顶层设计到核心素养的过渡桥梁、再到学科核心素养的底层落实，有一个由上到下、由宏观到微观、由共性到个性，由理论到实践的清晰线路，现在已经到了接近终点的冲线时刻——由一线教师落实到课堂和学生中去．

“中学数学教学参考”主办的这个会议，是抢先请战的冲线先锋，当很多同行还在等待、一些同行尚感迷茫的时候，三位老师的课堂就“敢为人先”开展起“素养教学”的研究和落实，其中最为自觉的应该是朱占奎老师，他的三条教学目标就是三个数学核心素养，他讲“点到直线的距离公式”就是落实三个数学核心素养：

（1）经历代数、函数、几何视角推导“点到直线的距离公式”的过程，提升逻辑推理素养；

（2）通过分析点到直线的距离的表达式的特征，探究优化求解过程的一些思路，提升数学运算素养；

（3）体悟用代数刻画点与直线的度量关系的一种模型：点到直线的距离公式，提升数学建模素养．

1-2　“数学素养教学”的课堂落实

教师是培养数学核心素养的主体，课堂是培养数学核心素养的主渠道．如何将数学核心素养的教学进入课堂、并最终落实到学生身上呢？《普通高中数学课程标准（2017 年版）》里有很好的“实施建议”，包括教学与评价建议，学业水平

考试与高考命题建议，教材编写建议，地方与学校实施课程标准的建议等．其中教学建议指出：

“在教学活动中，教师应准确把握课程目标、课程内容学业质量的要求，合理设计教学目标，并通过相应的教学实施，在学生掌握知识技能的同时，促进数学学科核心素养的提升及水平的达成．在教学与评价中，要关注学生对具体内容的掌握情况，更要关注学生数学学科核心素养水平的表现；要关注数学学科核心素养各要素的不同特征及要求，更要关注数学学科核心素养的综合性与整体性．教师应结合相应的教学内容，落实“四基”（数学基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验），培养“四能”（指从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力），促进学生数学学科核心素养的形成和发展，达到相应水平的要求，部分学生可以达到更高水平的要求．”

“全面落实立德树人要求，深入挖掘数学学科的育人价值，树立以发展学生数学学科核心素养为导向的教学意识．将数学学科核心素养的培养贯穿于教学活动的全过程．在教学实践中要不断探索和创新教学方式，不仅重视如何教，更要重视如何学，引导学生会学数学，养成良好的学习习惯，要努力激发学生数学学习的兴趣，促使更多的学生热爱数学．”

具体的“教学建议”有：

（1）教学目标制定要突出数学学科核心素养.

（2）情境创设和问题设计要有利于发展数学学科核心素养.

（3）整体把握教学内容，促进数学学科核心素养连续性和阶段性发展.

（4）既要重视教，更要重视学，促进学生学会学习.

（5）重视信息技术运用，实现信息技术与数学课程的深度融合.

这些建议，构成了笔者参加会议、观察课堂、进行研修的指导思想.

2 总体印象：课堂教学的新常态

按照我的习惯，我会首先问三位老师几个问题：

（1）在准备这节课时，你们参阅过几篇文章（或教案、视频）？

（2）想没想过，你的这节课与别人的同类课有什么不同？想没想过，你的这节课要突出哪些数学核心素养？突出哪些数学思想方法？

（3）这节课的教学目标实现了没有？用什么方法实现的？说几个实现了的事实根据.

（4）重点是怎样突出的、突出了没有？难点是怎样突破的、突破了没有？

（5）清不清楚，高考复习如何体现“温故知新”？

下面，我结合课堂生态的实际首先谈对这三节课的总体印象．确实，三位老师扎实的教学功底，饱满的教学热情，可人的教学风度，流畅的教学组织，活跃的课堂气氛等都给我留下了深刻的印象．说体现课堂教学新常态的三点看法．

2-1　重视学生参与，组织合作学习，体现学生在探究活动中的主体地位

（1）大家已经看到了，三位老师都不是直接“奉献”知识内容，而是提出一些事例和问题，组织学生“自主、合作、探究”，通过课堂活动获得（或发现）知识、方法与结论．这是一种什么教学？对，是探究式教学，已构成课堂教学的显著特征（探究式教学优势与局限见文[3]）．

数学探究活动是综合提升数学学科核心素养的载体．我看到，这种探究意识不仅表现在教学行为上，而且铭刻到三位教师的思想里，已在学情分析、或目标确定、或过程设计中有自觉的表达，整堂课，田老师、朱老师、叶老师都不忘有目的地组织学生一起去经历探索的实践．

第一节课不等式恒成立应该属于解不等式，但离不开不等式的证明，或者说关键是不等式的证明，所以，这是一个把推理与演算相结合的课题，田老师从$x+a\geq 0, x\in[1,2]$开始，层层深入，由字母到函数、由具体的函数到抽象的模型进行探究．

第二节课在解析几何学科思想的指导下，反思“点到直线距离公式的证明”，提升三个数学素养.

附解析几何的基本思想：首先创建坐标法，用平面上的一点到两坐标轴的坐标来确定点的位置，构成“点”与“有序实数对”的对应；接着用运动的观点，把曲线看成点的运动轨迹，建立起曲线与方程的对应．从而，几何问题不仅可以转变为代数形式，而且可以通过代数运算来发现几何性质，证明几何性质，这就改变了自古希腊以来代数与几何的千年分家，把“数”与“形”统一了起来，把几何曲线与代数方程结合了起来．这种对应关系的建立，不仅创立了解析几何学，而且标志着变数进入数学，为函数概念和微积分的创立奠定了基础，使数学在思想方法上发生伟大的转折——由常量数学进入变量数学.

解析几何运用坐标法（也叫解析法）可以解决两类基本问题：一类是满足给定条件点的轨迹，通过坐标系建立它的方程；另一类是通过方程的讨论，研究方程所表示的曲线性质．由此引出“解析几何”的核心概念：曲线与方程.

曲线与方程的概念，突出而鲜明地体现了解析几何的学科思想，直接而明确地呈现了解析几何的学科方法，是解析几何的核心概念．因而，解析几何的教学应自始至终都紧紧抓住曲线与方程的关系来展开：

●要明确解析几何的基本方法：坐标法（或解析法），

体会不同的平面直角坐标系对同一曲线方程的影响，体会如何“恰当”地建立平面直角坐标系．（学科方法）

●要明确用代数的方法解决几何问题的基本思想，突出用方程研究曲线，用代数方法研究曲线的几何性质．（学科思想）

●要掌握求曲线方程的基本步骤，能求给定几何特征的曲线方程，会用代数方法确定曲线之间的关系，强调解析几何解决问题的程序性和普适性．（学科方法）

第三节课从一道课本题出发，经历数学建模的过程，探究总结一类问题的解法，提高“发现并提出问题、分析和解决问题”的能力.

（2）中国的中学数学课堂教学一直致力于用“启发式”改造讲授法，产生中国式的“有意义接受学习”，到上世纪 90 年代，用高密度的边讲边问取代教师一讲到底已经成为课堂教学的重要方式．新课改之后，师生互动更加多样化了，动手实践、小组讨论、合作交流普遍展开，谈话式的提问发展为“高密度的边讲、边问、边练、边答”，教学节奏“小步、多练、快进”成为一种新常态．

我这几年听课看到的，基本上都是“小步、多练、快进”，这三节课也是通过“师生对话、生生对话”来快节奏开展探究活动的，也是通过教师的启发讲解和巡视指导来体现学生主体地位与教师主导作用的结合．田老师课上有 14 人次（四

次叫“快速完成”，老师快速完成解答）、朱老师课上有 9 人次、叶老师课上有 17 人次，课堂活动很活跃.

（3）值得注意的是，这种教师主导下的快节奏探究，较少出现学生主动提问的情况（主要是“师问生答”），也难免教师对开放情境的“控制”. 田老师四次叫“快速完成”，老师自己也是快速完成解答的. 朱老师语调慢条斯理，但思维的节奏一点都不慢.

对于单纯的“师问生答”，叶老师的课好像是有意来纠正偏向似的，叶老师“让学生自主提出问题，调动所有学生的探索欲望，积极参与教学过程，尝试解决问题，真正唤起学生主动参与的意识．让学生经历数学模型的形成过程（从长度、点、角度三条途径），真实体验如何通过数学的“眼睛”来观察和分析问题. ”但后面的提出问题比前面更开放、更深刻.

朱老师课上涉及“曲线与方程”与“函数及图像”之间的联系和区别．说三点看法：

看法 1：方程 $F(x,y)=0$ 是含有未知数 x 和 y 的等式，关联法则 F 同时作用于 x 和 y，交换两个未知数的位置时它们之间的关联法则通常会改变，得到的新方程与原方程一般不是同解方程；而函数 $y=f(x)$ 是两个非空数集之间的一个映射，需要区分自变量和因变量，对应法则只作用于自变量，并且一个函数由定义域、值域和对应法则完全确定，与定义域和值

域中的元素用什么字母表示无关，所以，两个概念的原始含义是不同的，但在概念呈现中都使用了“等式”、都含有“两个字母”、都用“两个字母”的“等式”来确定法则却是相同的.

看法 2：由于函数表达式表示的是两个变量之间的一个映射：定义域的每一个x对应唯一的y，在直角坐标系中，图像只是这种映射关系的一个直观呈现；而曲线的方程是从几何特征出发，借用点的集合的方式将一个曲线以代数的形式表现出来,这种曲线的代数表达可以比函数表达式更加广泛，即函数表达式可以转化为曲线的方程，而曲线的方程未必能转化为函数表达式．比如，一次函数$y=kx+b$可以转化为直线方程，而直角坐标系中的直线方程$x=1$不能转化为函数；同样，函数$y=\sqrt{1-x^2}$可以转化为上半平面的单位圆方程$x^2+y^2=1(y\ge 0)$，而单位圆方程$x^2+y^2=1$存在一个x对应两个y的情况，不能转为一个函数表达式.

看法 3：曲线的方程是在坐标系（特别是直角坐标系）下获得的，函数的解析式在直角坐标系下也是一些曲线的代数形式，因而,“曲线与方程”与“函数及图像”都是在“直角坐标系下”的“数形结合”，但体现的侧面有所不同，“曲线与方程”更体现“由形到数”,“函数及图像”更体现“由数到形”.

值得注意的是，利用“曲线与方程”与“函数及图像”

的重叠部分，教师可以贯通函数与解析几何两部分知识的联系，改组学生原有的函数知识结构，重组一个包容性更广、功能性更强的认知结构，提高数学能力，生成数学素养．学生在解决函数或解析几何问题时，内容和方法都可以沟通．

教学实践告诉我们，学生在求曲线的方程时会忽略曲线的范围，根据以上的分析，解决这个问题可以结合充要条件、把曲线的范围与函数的定义域、值域对照起来．

另外，探究式教学是比较费时费事的，所以，有的课都有不同程度的超时（有的用了不下 50 分钟）．

2-2　重视情境创设，进行变式教学，促进学生数学核心素养的鲜活生成

（1）基于核心素养的教学，要求教师抓住知识的本质，创设合适的教学情境（包括现实情境、数学情境、科学情境），启发学生思考，让学生在掌握所学知识技能的同时，感悟知识的本质，积累思维和实践的经验，形成和发展核心素养．大家已经看到，叶老师的课有“在半径为 R 的半圆形钢板上截取一块矩形材料”的现实情景；朱老师、田老师的课有“点到直线的距离”或“导数应用”的数学情境．我们说，核心素养的形成，不是单靠课堂的讲解，而是依赖学生参与其中的数学活动，不是单靠记忆与练习，而是依赖感悟与思维，通过情境提炼“内接矩形”、展开“点到直线的距离”课题

和“导数的应用”可以体现抽象概括能力、推理论证能力、数学建模、运算求解能力和创新意识等．可以体现函数与方程的基本数学思想、数形结合的基本数学思想、分类与整合的基本数学思想、化归与转化的基本数学思想、特殊与一般的基本数学思想、有限与无限的基本数学思想；有助于培养数学抽象、模型思想、逻辑推理、直观想象、数学运算等数学核心素养．

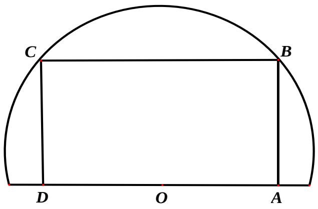
（2）变式教学是我国擅长的、促进有意义学习的一种教学手段，分为概念性变式和过程性变式．概念性变式的教学含义是对概念的形成提供直观材料和多角度的理解，包括正面理解、反面理解、直观理解、字面理解、抽象理解等；过程性变式的教学含义是在教学活动的过程中，通过有层次的推进，使学生逐步形成概念、推演命题或解决问题，从而形成多层次的活动经验系统（变式教学参见文[4]）．这三节课主要是有层次推进的过程性变式，

第一节课不等式恒成立，田老师从$x+a\geq 0, x\in[1,2]$开始，由字母到函数、由具体的函数到抽象的模型，是有层次的推进.

第二节课反思“点到直线距离公式的证明”，三种方法、五个问题的推进，渗透解析几何学科思想、提升数学核心素养，是有层次的推进．

第三节课从一道课本题出发，三个图形的深化，探讨数

学建模的过程，是有　　　　　　　　　层次的推进.



（图 2）

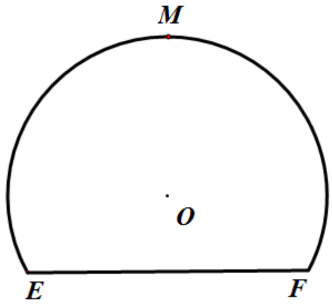
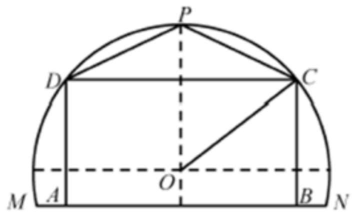


图 3



这实际上是新课程理念与启发式教学优良传统的有机结合，是变式教学、数学思想方法教学、关注课堂教学中的数学本质等中国特色的现代发展．我的感觉是，这种现代发展已经成为我国数学教学的新常态、至少是优秀教师上公开课的常态．

2-3　重视积极评价，体现人文熏陶，激励学生数学积极体验的良性发展

（1）帮助学生在数学学习中获得积极的体验正在为越来越多的老师所身体力行，一线教师的通常做法是：积极评价，人文熏陶．大家看到，三位老师对学生的发言与表现都会有积极的评价，帮助学生认识自我、建立信心、促进发展．当学生回答不准确或不正确时，教师也多是积极诱导、正面启发、肯定当中的合理成分．（有学生说来不及看；解析几何学科思想的表达不够清晰，教师启发而包容）

（2）数学文化是指数学的思想、精神、语言、方法、观点，它们的形成和发展；还包括数学在人类生活、科学技术、社会发展中的贡献和意义，以及与数学相关的人文活动．将数学文化融入教学，有利于激发学生的学习兴趣，有利于学生进一步理解数学，有利于开拓学生视野，提升数学学科核心素养．指向素养教学的数学课堂应该努力渗透数学史、数学家，数学精神和数学应用等数学文化要素以及更广泛的人文元素，感悟数学价值，提升科学精神，培养应用意识，生成人文素养．

2-4　关于高考复习

（下午有专题，点到为止）

（1）课标对高考命题建议

①命题原则．

命题应依据学业质量标准和课程内容，注重对学生数学学科核心素养的考查．处理好数学学科核心素养与知识技能的关系．要充分考虑对教学的积极引导作用．在传统评分的基础上，可以根据解题情况对学生的数学学科核心素养水平的达成进行评价．

考查内容应围绕数学内容主线，聚焦学生对重要数学概念、定理、方法、思想的理解和应用，强调基础性、综合性；注重数学本质、通性通法，淡化解题技巧；融入数学文化．

命题时，应有一定数量的应用问题，还应包括开放性问题和探究性问题，重点考查学生的思维过程、实践能力和创新意识，问题情境的设计应自然、合理．开放性问题和探究性问题的评分应遵循满意原则和加分原则，达到测试的基本要求视为满意，有所拓屣或创新可以根据实际情况加分（参见案例 20～35）．在命制应用问题、开放性问题和探究性问题时，要注意公平性和阅卷的可操作性．

在高中毕业的数学学业水平考试与数学高考的考试命题中，要关注试卷的整体性．处理好考试时间和题量的关系，合理设置题量，给学生充足的思考时间，逐步减少选择题．填空题的量，适度增加试题的思维量；关注内容与难度的分布、数学学科核心素养的比重与水平的分布、努力提高试卷的信度、效度和公平性．

除了上述要求外，数学高考命题还应依据人才选拔要求，发挥数学高考的选拔劝能．

②考试命题路径．

基于数学学科核心素养的考试命题，应注意以下几个重要环节．

●构建数学学科核心素养的评价框架．依据数学学科核心素养的内涵、价值和行为表现的描述，参照学业质量的三个水平，构建基于数学学科核心素养测试的评价框架．评价框架包括三个维度：

第一个维度是反映数学学科核心素养的四个方面，它们分别为情境与问题、知识与技能、思维与表达、交流与反思，

第二个维度是四条内容主线，它们分别为函数、几何与代数、概率与统计、数学活动与数学探究活动；

第三个维度是数学学科核心素养的三个水平．

●依据评价框架，统筹考虑上述三个维度．编制基于数学学科核心素养的试题，每道试题都有针对性的考查重点．

●对于每道试题，除了给出传统评分标准外，还需要给出反映相关数学学科核心素养的水平划分依据．

③说明

在命题中，选择合适的问题情境是考查数学学科核心素养的重要载体．情境包括：现实情境、数学情境、科学情境，每种情境可以分为熟悉的、关联的、综合的；数学问题是指在情境中提出的问题，从学生认识的角度分为：简单问题、较复杂问题、复杂问题．这些层次是构成数学学科核心素养水平划分的基础，也是数学学科核心素养评价等级划分的基础．

对于知识与技能，要关注能够承载相应数学学科核心素养的知识、技能，层次可以分为了解、理解、掌握、运用以及经历、体验、探索．在命题中，需要突出内容主线和反应

(映)数学本质的核心概念、主要结论、通性通法、数学应用和实际应用.

在命题中，应特别关注数学学习过程中思维品质的形成，关注学生会学数学的能力.

（2）复习的关键是“温故知新”．复习不要简单重复，也不要盲目拔高，关键是“温故知新”；温故是知新的基础，知新是温故的目标，没有温故基础的知新是空想盲动，没有知新目标的温故是无效劳动.

①温故，首先要总结单元的基本内容（综合化），基本方法（类型化），基本题型（程序化），给出思维导图．温故的效果要做到四过关：

●能准确理解书中的任一概念；

●能独立证明书中的每一定理；

●能熟练求解书中的所有例题；

●能历数书中的作业类型.

②知新：知新的关键在于“教材的再创造”，具体表现为优化知识结构，深化数学认识，提高数学素养三个方面．（优化知识结构尚可加强，不要“无米之炊”）

③习题化的复习技术、开放性的题组教学.

复习案例 1：余弦定理.

（1）定理的形式

①**文字叙述：**三角形任何一边的平方等于其他两边平方

的和减去这两边与它们夹角的余弦之积的两倍．（对于这个形式，应该继续说清：定理的条件是什么？结论是什么？请写成“如果…，那么…”的形式）

②**符号等式 1**：在ΔABC中，角A,B,C的对边为a,b,c，有

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A，\ 或\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}；$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B，\ 或\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}；$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C，\ 或\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

③**符号等式 2**：已知三角形两边a,b（或a,c）及a的对角A时，可以看成关于c（或b）的二次方程$c^2-2bc\cos A+\left(b^2-a^2\right)=0$（或$b^2-2bc\cos A+\left(c^2-a^2\right)=0$）.

④**符号等式 3**：把正弦定理代入，有（角形式）

$$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A.$$

（2）余弦定理的逆命题（怎样叙述，真假如何）．交换余弦定理的条件与结论，就可以写出逆命题，但余弦定理的条件是什么？结论是什么？测试表明，很多学生写不出来，因而也就写不出逆命题，更加理解不到“余弦定理是三角形的一个代数描述”.

逆命题 1　对于正实数a，b，c，及$\alpha,\beta,\gamma\in(0,\pi)$，若有$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$，则$a,b,c$对应的线段可以构成一个三角形，且$a$边的对角大小为$\alpha$，$b$边的对角大小为$\beta$，$c$边的对角大小为$\gamma$.

这是真命题！那么，对应余弦定理的一个等式，其逆命题还是真的吗？

逆命题 2 对于正实数a，b，c，及$\theta\in(0,\pi)$，若有$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\theta$，则$a,b,c$对应的线段可以构成一个三角形，且$a$边的对角大小为$\theta$.

证明：以b，c为两边、夹角大小为θ作三角形，由余弦定理得三角形的第三边平方为$b^2+c^2-2bc\cos\theta$，但已知$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\theta$，故三角形的第三边就是$a$，所以$a,b,c$对应的线段可以构成一个三角形，且$a$边的对角大小为$\theta$.（回想勾股定理逆定理的证明）

（3）余弦定理的数学认识.

①余弦定理是勾股定理的一般化，它揭示了三角形边角之间的数量关系，把形的特征（三角形）转化成数值上的定量描述：三边与三角之间满足等式$a^2=b^2+c^2-2bc\cos$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$．这个定理在平面几何里具有十分基础的地位，是连“三角形内角和定理”都可以推导出来的一个重要命题.

②初中时就已经知道，两个“有两边对应相等的三角形中”存在这样一个定性关系：“如果它们的夹角大（小），那么第三边也大（小）”（正相关），如今，余弦定理把这个性质定量化了.

③余弦定理及逆定理表明，对于三角形必有余弦定理的

等式成立，反之，若有等式成立则可以确定一个三角形，从而余弦定理是三角形的一个代数描述．通过代数描述，“三角形”也可以进行运算或推理了．

④余弦定理也是初中三角形全等定理在解三角形中的应用．

（4）余弦定理可以体现哪些数学思想．

①数形结合的数学思想．首先，定理本身是数形结合的；其次，定理的证明过程也是数形结合的．三角形是形，三边关系$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$等是数，余弦定理及逆定理告诉我们：这两者等价．作个比喻，就像一个人，从前面看是“三角形”，从后面看是“等式$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$等”，两者是同一个人．

②不变量的思想．三角形有无穷多个，三边长a,b,c（带动三个角）变化无穷，但它们满足一个不变的关系$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$等．研究不变性是数学上一个永恒而美丽的主题、一个平凡而深刻的追求．

③特殊与一般的数学思想．在推导定理时表现为“由特殊到一般”：从直角三角形到任意三角形、从具体三角形到一般三角形；得出定理后又表现为由一般到特殊的应用．

④函数与方程的数学思想．等式$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$本身是三角形边角间的一个对应关系，又可以看成一个不定方程．从方程观点看$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，则既提供等量关系又提供未知数，可由其中的三个量求出第四个量，包括已知三边

长解三角形；已知两边夹角解三角形；已知两边及一边的对角解三角形（解二次方程，判别式自动确定有无解、有解时有几个解）.

⑤化归与转化的数学思想．余弦定理有多种证明（参见话题 5），有的化归为直角三角形来解决，有的化归为三角形基本关系$\overline{BC}=\overline{AC}-\overline{AB}$来解决，有的化归为坐标系上的距离来解决.

⑥分解与组合的数学思想．包括图形的分解与组合，式子的分拆与合并等变形.

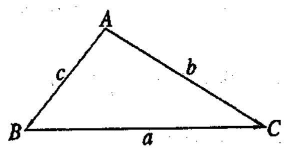
⑦分类讨论的思想．当定理的证明分为直角三角形、锐角三角形、钝角三角形来讨论时，还可以体现分类讨论的思想.

（5）一题多解．余弦定理反映了三角形的边角关系，哪些知识能提供三角形的边角关系呢？经回忆，有：三角函数，向量，解析几何、平面几何……等等（不下 10 多种证法），于是，通过余弦定理的证明可以将三角函数，向量，解析几何、平面几何等知识“一线穿珠”.

思路 1：（向量证明）如图 1，有（由繁到简、三项变一项）

$b^2+c^2-2bc\cos A$

$=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-2\overline{AC}\bullet\overline{AB}$（把数量转变为向量）



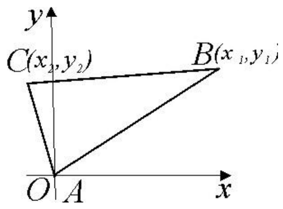
$=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2$ （向量运算、变三项为两项）

图 **5**

$=\overrightarrow{BC}^2$（向量运算、变两项为一项）

$=a^2$.（把向量还原为数量）

思路 2：（坐标证明）如图 2，在 ΔABC 中，设 $A(0,0)$，$B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，由向量数量积的定义，有



$\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\bullet\left|\overrightarrow{AC}\right|}$（向量数量积的定义）

$=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{AB\bullet AC}$（把向量变为坐标）

$=\dfrac{2x_1x_2+2y_1y_2}{2AB\bullet AC}$（坐标运算，保持分母一致）

图 6

$=\dfrac{\left(x_1^{\,2}+y_1^{\,2}\right)+\left(x_2^{\,2}+y_2^{\,2}\right)-\left[\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2\right]}{2AB\bullet AC}$（保持分子一致）

$=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\bullet AC}$，（把坐标变为数量）

得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$.

说明 1：在这里，余弦定理与向量数量积的定义是用等号连接起来的，这提示我们，余弦定理是向量数量积定义的一个推论，或者说向量数量积定义的合理性基础正是余弦定理．另外，若 B,C 在单位圆上，则 $C(\cos\alpha,\sin\alpha),B(\cos\beta,\sin\beta)$，有

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{\overrightarrow{OC}\bullet\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OC}\right|\bullet\left|\overrightarrow{OB}\right|}=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}\sqrt{\cos^2\beta+\sin^2\beta}}$$

$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

就是说，余弦差角公式也是向量数量积定义的一个特例（2010 年数学高考四川卷理科第 19 题，12 分）. 余弦定理、向量数量积定义、余弦差角公式三者是相通的，高考复习要努力体现数学的统一性，形成优化的认知结构.

思路 3：（坐标证明）在 ΔABC 中，设 $A(0,0)$，$B(c\cos\alpha, c\sin\alpha)$，$C(b\cos\beta, b\sin\beta)$，由余弦差角公式，有

$$\cos A=\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{2bc\cos\alpha\cos\beta+2bc\sin\alpha\sin\beta}{2bc}$$（保持分母一致）

$$=\frac{b^2+c^2-\left[(c\cos\alpha-b\cos\beta)^2+(c\sin\alpha-b\sin\beta)^2\right]}{2bc}$$（分子一致）

$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

得 $$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

思路 4 （综合几何）分为直角三角形、锐角三角形、钝角三角形来讨论（略）.

（6）话题 6：一解多题．在上述证明的思路 1 中用到了三角形的向量式，通过这个核心知识，可以将很多关于三角形的数学结论沟通（一解多题）. 比如，对三角形向量式（如图 1）

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB},$$

平方可得余弦定理；求模，可得三角形不等式

$$\left||\overrightarrow{AC}|-|\overrightarrow{AB}|\right|<|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|<\left||\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{AB}|\right|,$$

即 $$|b-c|<a<b+c.$$

若对 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ 点乘 $\overrightarrow{BC}$ 上的高 $\overrightarrow{AH}$ 可得

$$\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AH},$$

有 $$0=|\overrightarrow{AC}|\bullet|\overrightarrow{AH}|\cos\angle CAH-|\overrightarrow{AB}|\bullet|\overrightarrow{AH}|\cos\angle BAH,$$

约去 $|\overrightarrow{AH}|$ 得 $0=b\sin\angle C-c\sin\angle B$，即 $\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}$，可以推出正弦定理.

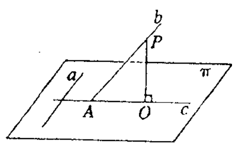
若对 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ 点乘向量 $\overrightarrow{BC}$ 可得

$$\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}|\bullet|\overrightarrow{BC}|\cos B+|\overrightarrow{AC}|\bullet|\overrightarrow{BC}|\cos C,$$

约去 $|\overrightarrow{BC}|$ 可得射影定理

$$a=c\cos B+b\cos C.$$

如图 3，对平面 π 上的垂线 PO，斜线 PA（b）和射影 OA（c），记平面 π 上任一直线 a 的方向向量为 $\vec{a}$，有 $\overrightarrow{PO}\bullet\vec{a}=0$，又由三角形向量式 $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}$，有



$$\overrightarrow{PA}\bullet\vec{a}=\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}\right)\bullet\vec{a}$$

$$=\overrightarrow{PO}\bullet\vec{a}+\overrightarrow{OA}\bullet\vec{a}=\overrightarrow{OA}\bullet\vec{a},$$

得 $$\overrightarrow{PA}\bullet\vec{a}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\bullet\vec{a}=0,$$

即 $a\perp b \Leftrightarrow a\perp c$. 同时得出三垂线定理及其逆定理.

图 7

说明 2：可见，三角形的向量式 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ 是“三角形”

的代数描述．能够得出不等式$|b-c|\le a\le b+c$，余弦定理，正弦定理，三垂线定理，以及射影定理等，沟通了知识的内在联系．（关于余弦定理与正弦定理的等价性，请参见文[3]）

初中、甚至小学时就已经知道：“由不在同一直线上的三条线段首尾顺次连接所组成的封闭图形叫做三角形”（界定），但是，根据三角形的界定，方便进行运算或推理吗？我们说，几何描述有它天然的优势和不可克服的局限性，添加代数的定量描述可以优势互补．ΔABC的向量式、余（正）弦定理等，使得“三角形”可以运算或推理了，这应该是对“三角形”认识的深化．

避免简单重复的练习

例 1-1 已知正实数 a,b,c 及 $\alpha\in(0,\pi)$ 满足等式 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$．求证

（Ⅰ）存在$\beta,\gamma\in(0,\pi)$，满足$\alpha+\beta+\gamma=\pi$，且

$$\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}，\quad \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

（Ⅱ）对上述β，γ，是否存在$\theta\in(0,\pi)$，使$\sin\theta=\frac{\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\beta+\cos\gamma}$？如果存在，证明一共有几个；如果不存在，给出证明．

例 1-2 （2014 年陕西师大自主招生考试题）对于正实数a,b,c，及$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\gamma\in(0,\pi)$，求证，使等式$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=\pi,\\ \dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}\end{cases}$成立的充分必要条件是：存在不共线的向量$\overline{AB},\overline{BC},\overline{CA}$，使

$\left|\overline{AB}\right|=c,\left|\overline{BC}\right|=a,\left|\overline{CA}\right|=b$ 且 $\angle BAC=\alpha$， $\angle ABC=\beta$， $\angle ACB=\gamma$.

例 1-3 （2016 年高考数学理科乙卷第 17 题，满分 12 分）ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $2\cos C\left(a\cos B+b\cos A\right)=c.$

（I）求 C;

（II）若 $c=\sqrt{7}$，ΔABC 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，求 ΔABC 的周长.

复习案例 2　线性规划题认识的深化

（1）基本要求

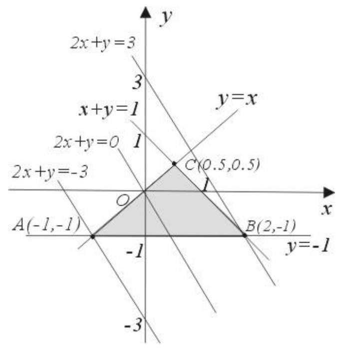
每年的数学高考几乎都会有线性规划试题，这类题目的数学实质是求定义域内（约束条件）二元函数（目标函数）的最值，当然，中学没有二元函数，但可以通过“图上作业法”直观找出最值（据此，俗称这类题目为“线性规划题”，避开了“二元函数”）．如

例 2 （2014 年高考数学广东卷（理科）第 3 题）若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} y\le x, \\ x+y\le 1, \\ y\ge -1, \end{cases}$ 且 $z=2x+y$ 的最大值和最小值分别为 M 和 m，则 $M-m=$（　）.

（A）8　　（B）7　　（C）6　　（D）5

讲解 例 2 源于课本的习题（教材第 91 页）：求 $z=2x+y$ 的最大值，使 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} y\le x, \\ x+y\le 1, \\ y\ge -1. \end{cases}$ 新的高考题在保留练习原型的同时，增加了两步运算：求最小值，求最大值与最小

值的差. 这可以在“回归教材”的导向中，防止“死记硬背”，思维强度与教材要求大体持平，解法是现成的（参见文[4]）.（但求最小值与求最大值方法雷同、求最大值与最小值之差也只考到小学的减法）



解法 1：根据约束条件作出“可行域”如图 4 中的阴影ΔABC，然后平移直线$l:2x+y=z$，并观察l在y轴上的截距：当l通过点$A(-1,-1)$时z取到最小值$m=2\times(-1)+(-1)=-3$；当l通过点$B(2,-1)$时z取到最大值$M=2\times2+(-1)=3$．所以$M-m=6$，选（C）.

说明 1：这个截距解法的基本步骤是：图 8

步骤 1 （由数到形的沟通）将“线性约束条件”（代数不等式组）转化为“可行域”（图形）；还用到了联立方程求边界角顶点的坐标.

步骤 2 （由数到形的沟通）将“目标函数”（代数等式）转化为通过可行域的“直线”.

步骤 3 （数形结合的寻找）在“可行域”内平移“直线”（目标函数），通过直线的“截距”找出“最优解”（通常在边界角顶点达到，因而，具体解题中可以将边界角顶点坐标代入，直接找出最大、最小值）.

（2）温故知新

反思分析 1．由上面的分析可以看到，解法 1 主要是“数形结合”中一个“由数到形”的过程，也是一个“由条件到结论”的综合法过程，高考复习的解题教学如果满足于此，那就还没有摆脱“简单重复”，当我们反思由数式到图形的单向性时，图形必定会反馈出相应的代数信息，从而，产生相对应的代数解法——表现为不等式的放大缩小．

事实上，“当直线l通过点A时z取到最小值”就等于告诉我们，z取到最小值在不等式$\begin{cases}x-y\geq 0,\\ y\geq -1\end{cases}$的公共端点$(-1,-1)$处取到，把$2x+y$表示为上述同向不等式中相应代数式$x-y$，$y$的线性组合$2(x-y)+3y$，则$z$的最小值就可以通过不等式的缩小而求得．

同样，“当直线l通过点B时z取到最大值”就等于告诉我们，z取到最大值在不等式$\begin{cases}x+y\leq 1,\\ -y\leq 1\end{cases}$的公共端点$(2,-1)$处取到，把$2x+y$表示为上述同向不等式中相应代数式$x+y$，$y$的线性组合$2(x+y)+(-y)$，则$z$的最大值就可以通过不等式的放大而求得．

把几何信息还原回代数信息，有代数解法：

解法 2：将$2x+y$表示为“约束条件”$x-y\geq 0$及$y\geq -1$中相应代数式的线性组合（可用待定系数法），有

$$z=2(x-y)+3y\geq 2\times 0+3\times(-1),$$

当$\begin{cases}x-y=0,\\ y=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1,\\ y=-1\end{cases}$时$z$取到最小值，$m=-3$．

将$2x+y$表示为“约束条件”中$x+y\le 1$及$-y\le 1$的相应代数式的线性组合，有

$$z=2(x+y)+(-y)\le 2\times 1+1=3,$$

当$\begin{cases}x+y=1,\\-y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2,\\y=-1\end{cases}$时$z$取到最大值，$M=3$.

所以$M-m=3-(-3)=6$．选（C）.

说明 2：这个不等式解法的基本步骤是：

步骤 1：将“目标函数”表示为“约束条件”中的相应代数式的线性组合（通常用待定系数法）.

步骤 2：将相应不等式放缩为常数；

步骤 3：验证常数可以取到，找出“最优解”.

可见，这个解法无非是在定义域内（代数不等式组）求二元函数$f(x,y)=ax+by$的值域，这只不过是代数题的本义（代数题的代数解法）．我们认为，对“数形结合”只说“由数到形”会给学生造成单流向的误解，选择时机补上对应的“代数解法”有助于学生获得“数形结合”的完整认识、形成优化的认知结构.

反思分析 2．如果我们解题不拘泥于“由条件到结论”，则目标函数$z=ax+by$，就会向我们呈现两个前景：其一是把目标函数转化为向量的数量积$ax+by=(a,b)\bullet(x,y)$，然后在“可行域”上找数量积的最值（参见解法 3）；其二是把$z=ax+by$改写为参数式$\begin{cases}x=x_0+bt,\\y=y_0-at,\end{cases}$（其中$x_0,y_0$满足$z=ax_0+by_0$），代入$x,y$的

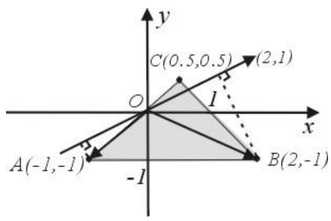
约束条件得关于z,t的不等式（组），由此可以确定t的范围，进而求出z的最值（参见解法 4）.

解法 3：作向量$\vec{\alpha}=(2,1)$，$\vec{\beta}=(x,y)$，记向量$\vec{\alpha},\vec{\beta}$的夹角为θ（$0\le\theta\le\pi$），则向量$\vec{\beta}=(x,y)$在向量$\vec{\alpha}=(2,1)$上的投影为$\sqrt{x^2+y^2}\cos\theta$．由于

$$z=2x+y=(2,1)\bullet(x,y)=\sqrt{5}\bullet\sqrt{x^2+y^2}\cos\theta,$$

所以，求z的最值只需计算动向量$\vec{\beta}=(x,y)$在定向量$\vec{\alpha}=(2,1)$上投影的最值.

根据约束条件$\begin{cases} y\le x, \\ x+y\le 1, \\ y\ge -1, \end{cases}$作出可行域如图 5 中的阴影$\Delta ABC$，在可行域上旋转动向量$\vec{\beta}=(x,y)$，可见：当$\vec{\beta}$位于$\overline{OA}(-1,-1)$处时投影取到最小值



$m=(2,1)\bullet(-1,-1)=2\times(-1)+1\times(-1)=-3$；

当$\vec{\beta}$位于$\overline{OB}(2,-1)$处时投影取到最大值

$M=(2,1)\bullet(2,-1)=2\times2+1\times(-1)=3$．

图 9

所以$M-m=3-(-3)=6$．选（C）.

说明 3：这个向量解法的基本步骤是：

步骤 1：（由数到形的沟通）将“线性约束条件”（代数不等式组）转化为“可行域”（图形）；还用到了联立方程求边界角顶点的坐标.

步骤 2:（由数到形的沟通）将“目标函数”（代数等式）改写成“两向量的数量积”，再转化为一向量在另一向量上的投影

$$z=ax+by=(a,b)\bullet(x,y)=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}\cos\theta.$$

步骤 3:（数形结合的寻找）在“可行域”内找动向量 $\vec{\beta}=(x,y)$ 在定向量 $\vec{\alpha}=(a,b)$ 上投影的最值（有正负），乘以 $\vec{\alpha}$ 的模 $\sqrt{a^2+b^2}$ 得出 z 的最值.

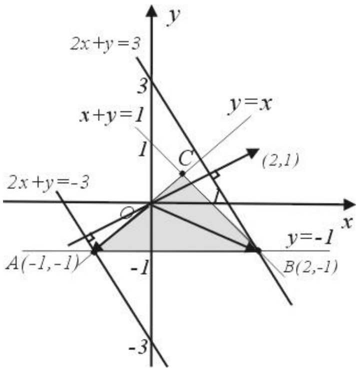


图 10

可见,这个解法与解法 1 中“数形结合”的基本过程是一样的,不同在于第 2 步把直线 $z=ax+by$ 变为数量积 $ax+by=(a,b)\bullet(x,y)$，相当于作出了直线 $z=ax+by$ 的垂直向量 $\vec{\alpha}=(a,b)$，相应的，第 3 步把直线 $z=ax+by$ 的平移变为动向量 $\vec{\beta}=(x,y)$ 的垂直投影．把图 4 与图 5 合并得图 6，可见，直线 $2x+y=z$ 平移到 $B(2,-1)$，与 $\vec{\beta}$ 位于 $\overline{OB}=(2,-1)$ 是同一个位置.

解法 4: 把 $z=2x+y$ 化为 $\begin{cases} x=\dfrac{z}{3}+t, \\ y=\dfrac{z}{3}-2t, \end{cases}$ 代入约束条件（消去 x,y），

有

$$\begin{cases} \dfrac{z}{3}-2t\le\dfrac{z}{3}+t, \\ \left(\dfrac{z}{3}+t\right)+\left(\dfrac{z}{3}-2t\right)\le 1, \\ \dfrac{z}{3}-2t\ge -1, \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} t \geq 0, & ① \\ z \leq \dfrac{3}{2} + \dfrac{3t}{2}, & ② \\ z \geq 6t - 3, & ③ \end{cases}$$

由②、③有

$$6t - 3 \leq z \leq \frac{3}{2} + \frac{3t}{2}, \qquad ④$$

可解得$t \leq 1$，计及①得

$$0 \leq t \leq 1. \qquad ⑤$$

把⑤代入④（或②、③）分别有

$$z \geq 6t - 3 \geq 0 - 3 = -3，当\begin{cases} t = 0, \\ z = -3, \\ x = -1, \\ y = -1 \end{cases}时，m = -3;$$

$$z \leq \frac{3}{2} + \frac{3t}{2} \leq \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3，当\begin{cases} t = 1, \\ z = 3, \\ x = 2, \\ y = -1 \end{cases}时，M = 3.$$

所以$M - m = 3 - (-3) = 6$．选（C）.

说明 4：这个参数解法的基本步骤是：

步骤 1：将“目标函数”$z = ax + by$改写为参数式（不惟一），

当$a + b \neq 0$时，可取$\begin{cases} x = \dfrac{z}{a+b} + bt, \\ y = \dfrac{z}{a+b} - at, \end{cases}$当$a + b = 0$时，可取$\begin{cases} x = \dfrac{z}{a-b} + bt, \\ y = \dfrac{-z}{a-b} - at. \end{cases}$

步骤 2：代入“约束条件”（消去x, y）得关于z, t的不等式.

步骤 3：确定t的范围，进而求出z的最值.

可见，这个解法与解法 2 一样，都是用代数方法求二元

函数 $f(x,y)=ax+by$ 的值域，不同在于解法 2 用定义域的数式来整体表示函数，直接对二元变量进行放缩，而解法 4 却把函数式代入定义域的数式中去，消元后对一元变量进行放缩，与此相适应，解法 2 用了待定系数法，解法 4 用了参数方程与消元法．

以上，呈现了线性规划问题的四个思路，它们各有自己的优势与局限，其中截距解法是最基本的，不等式解法是一点就通的，它与向量解法都可以看成截距解法的“变式练习”，而参数解法则更适于放进选修层次．大家可以根据自己的教学风格，既提供知识的横向沟通，又根据学生的具体实际而灵活渗透．通过上述活动，至少有 4 个收获：

收获 1　深化了线性规划问题的本质认识，感悟到线性规划问题的实质是：在定义域内（代数不等式组）求二元函数 $f(x,y)=ax+by$ 的值域，中学教材不出现二元函数，也没有现成解法，但可以通过“数形结合”来解决．

收获 2　优化了线性规划问题的认知结构，认识到根据中学的知识，在定义域内（代数不等式组）求二元函数 $f(x,y)=ax+by$ 的值域，还可以有向量法、不等式放缩法、参数方程法等途经，从而沟通了线性规划、向量、不等式、参数方程等知识的内在联系，优化了认知结构．（对于解题来说，有一个解法就够了，为什么还要“一题多解”呢？一题多解至少有两个作用：其一，多角度审视有助于接近问题的深层

结构；其二，一个问题沟通不同的知识，有助于形成优化的认知结构.）

收获 3　有助于认识“由数到形”与“由形到数”的双流向沟通（完整的“数形结合”），有助于认识题目条件与题目结论的双流向沟通（综合——分析法）.

收获 4　经历了怎样解题和怎样学会解题的基本过程，怎样解题有四个步骤（看题、想题、写题、回题）：理解题意、思路探求、书写表达、回顾反思. 学会解题的关键是“自觉分析”，即把解题活动（包括题目与初步解法）作为认识的对象，不仅关注如何获得解，而且寄希望于对“解”的进一步分析而增强数学能力、优化认知结构、提高思维素质，学会“数学地思维”（这是一个再认知过程）.

复习案例 3　数列求和的高考复习课

笔者听过数列求和的高考复习课，基本情况如下：

（1）从复习等差（比）数列的前 n 项求和公式开始，等差数列的前 n 项和公式：

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d\ .$$

等比数列的前 n 项和公式：

$$S_n=\begin{cases} na_1, & q=1 \\ \dfrac{a_1(1-q^{n-1})}{1-q}, & q\neq 1 \end{cases}$$

这实际上是提供了数列求和的公式法.

（2）讲练结合介绍了几种数列求和的方法. 有公式法、倒序相加法、错位相减法、裂项相消法、分组求和法、并项

求和法等．

（3）**介绍每种求和方法都是先介绍方法名称，后举例说明．**这是“按照题型”组织为“先讲后练”、“讲练结合”的接受学习，过程中有经过“启发式”的改造．教学活动主要是“师问生答”、“讲练结合”．教学实施比较顺利，几乎没有遇到什么意外和困难．

（4）**在教学目标中，说了能力要求．**有“培养学生分析解决问题的能力，归纳总结能力，联想、转化、化归能力”，也有“独立思考，合作探究及运用数学思想解决问题的能力”．

笔者在评议中首先提出了三个问题，启发大家的思考:

笔者在评议中首先提出了三个问题，启发大家的思考:

问题 1：这堂课说了“数列求和的方法”，那么到底“什么是数列求和？”由此才能更好理解“怎样去求数列的和？”

问题 2：这堂课说了这个能力、那个能力，都没错，但最基本、最明显的是什么能力？

问题 3：平时讲“数列求和”与高考复习“数列求和”应有什么不同？

3-2　教学分析

在教师发言的基础上，我作了体现高考复习课的教学分析，主要有 7 点看法：

（1）**看法 1**：数列$\{a_n\}$的前n项和S_n的求和公式：

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad ①$$

是S_n与n之间的“一个关系式”（简称式，分段定义也是“一个”而不是“多个”）

$S_n = f(n)$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　②

这里强调，是“公式”并且“一个”.

（2）看法 2：这个关系式$S_n = f(n)$用数学运算符号和括号把数和表示数的字母连结而成，当n取定一个正整数时，便可按照公式所规定的运算及其运算次序计算出式子的值.

（3）看法 3：就中学数学而言，这个公式所说的“数学运算符号”是指初等运算．初等运算包含有限次的加、减、乘、除、正整数次乘方、开方（或有理数次乘方）——这些运算都叫做代数运算；此外，还包括无理数次乘方、对数、三角等运算（现行教材未涉及反三角函数）——这些运算都叫做初等超越运算.

（4）看法 4：通常，这个公式都化为最简形式.（但“最简”没有严格的标准，通常应运算符号比较少、运算形式比较简单等）

（5）看法 5：为了把n个项求和$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，变成一个式子$S_n = f(n)$，方向很明确：就是要合并、减少项数．数字相加小学就学过了，代数式求和也只是初一的内容，新的情况是：直接加会遇到n虽然是有限数却可以任意取值的麻烦（何时才算加到第n项？），所以，“合并、减少项数”需要另想

办法，主要是：利用运算律转化为常数求和，或利用运算律转化为正负项抵消等途径．可见，这一课题，运算能力是核心，运算中的转化变形是关键，并且运算与推理两兼，推理的需要提出运算的要求、运算的结果提供推理的依据．涉及的基本数学思想有：函数与方程的数学思想，转化与化归的数学思想，特殊与一般的数学思想（还会有归纳和类比）．

（6）看法 6：“利用运算律转化为常数求和，或利用运算律转化为正负项抵消”不是新的情况，已经在等差、等比数列求和中用过，现在复习是在此基础上深化，如何深化？至少有四个途径：

深化 1：将新的数列化归为等差、等比数列的求和，可以是“公式的正用、逆用、连用、变用、巧用、活用”等．（如等差、等比数列的和、差）

深化 2：用求等差、等比数列前 n 项和的方法（倒序相加法、错位相减法等）解决新的数列求和，是“方法的连用、变用、巧用、活用”等．（如等差、等比数列的乘、除）

深化 3：出现“非等差、等比”数列（如递推数列，函数生成的数列）；出现更多的题型、更多的方法（数学归纳法，“倒序相加、错位相减”之外的化归）．

深化 4：与其它学科及生活现实相联系的数列（应用）．

（3）解析几何高考复习的编排.

（1）从教材的编排说起．曲线与方程的编排有三种可供选择的方式：

第一种，是认识一步到位的直线编排．如数理化自学丛书《平面解析几何》，在建立平面直角坐标系的基础上，首先提出曲线与方程的概念，然后在这个概念的统领下研究直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线等各种具体曲线．这种方式更体现数学的学科逻辑性，使得曲线与方程这一核心概念贯穿解析几何课程与教学的始终，更体现从一般到特殊的同化过程．

第二种，是认识螺旋上升的直线编排．上一世纪八九十年代的解析几何教材都是独立成册的，八十年代的《解析几何（平面)》是首先学习“直线”，九十年代的必修《数学》第二册是首先学习“直线与圆的方程”，它们都是先让学生直观感悟解析几何的学科思想和学科方法，形成解析几何的意识；然后以“直线”或“直线与圆的方程”为认知基础，提出“曲线与方程”的概念，再以曲线与方程的概念统领圆锥曲线的研究．这种方式考虑到学生的认知规律，让学生经历“从特殊到一般、又从一般到特殊”的认识过程．

第三种是：认识直线上升的模块编排．现行教材根据《高中数学课程标准》（2003）的安排，将解析几何内容分成三个模块、安排在三个不同的地方：

模块 1：是必修 2 第三章，学习直线与圆的方程．让学生直观感悟解析几何的学科思想和学科方法，形成解析几何的意识（与上一世纪八九十年代的解析几何教材相同）．这种将问题归结为用代数方法（数）去研究几何问题（形）的思想方法，与初中平面几何的研究方法有很大不同，是一种革命性的进步．

模块 2：是选修 2-1 第二章，学习圆锥曲线，研究了椭圆、抛物线、双曲线三种曲线（有人误会“圆”不属于圆锥曲线）．在充分认识“直线、圆、椭圆、抛物线、双曲线”的基础上，概括出曲线与方程的概念，进一步体会集合与对应、数形结合、运动变化、函数与方程等特征，掌握解析几何的学科思想和学科方法．

模块 3：是选修系列 4-4，学习极坐标与参数方程，探讨了不同的坐标系对解决不同的几何问题的优势与局限，使学生能更好理解坐标系是解析几何思想实现的基础，不同的坐标系可以将图形用不同的数来表示，思想实质并没有改变，但代数运算有繁简之别．极坐标与参数方程的表示形式，为更方便地研究某些类型曲线的性质提供了可能．

第三种方式更关注学生的认知规律，让学生经历“从特殊到一般”的认识过程．

我们的态度是：平常教学用第三种方式，高考复习可以考虑第一种方式．

（2）解析几何高考复习可以考虑用第一种方式．许多的高考复习都是按照现行教材的顺序，首先复习直线、圆、椭圆、抛物线、双曲线，最后复习曲线与方程的概念．其实，也可以反过来，在平常已有学习的基础上，首先复习曲线与方程的概念，然后用曲线与方程的概念统领直线、圆、椭圆、抛物线、双曲线等知识的复习．说三点理由：

理由 1：有助于居高临下地深化平常学习的理解，增强知识的综合性、系统化、条理化．各类圆锥曲线的定义、方程、性质以及与直线的位置关系等都有望获得“温故知新”的复习效果；将几何问题转化为代数问题来解决的学科思想、通过坐标系实现“数形结合”的学科方法、以及简化计算过程的运算技巧等也都有望获得更本质的理解．

理由 2：有助于体现数学的学科逻辑性，使得曲线与方程这一核心概念贯穿解析几何复习的始终．便于从“曲线与方程”的概念中感悟数学思想方法，如集合与对应的数学思想，数形结合的数学思想，函数与方程的数学思想，转换与化归的数学思想，坐标方法（或解析法），待定系数法，以及充要条件的逻辑知识．经过提炼，可以获得数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算和数学建模（通过应用题题）等数学核心素养．

理由 3：有助于“从过程到对象”完成概念的认识过程．大家知道，许多数学概念兼有二重性，既表现为一种过程和操

作，又表现为对象与结构；学习一个概念，往往要从经历过程开始，然后转变为对象的认知过程，最终结果则是二者在认知结构中共存，在适当时机分别发挥作用．“曲线与方程”的平常学习，已经通过直线、圆、椭圆、抛物线和双曲线等经历了直观步骤和具体操作，踏上概念发展的第一个台阶．进入高考复习时要努力让概念进入对象状态，形成一种易于整体把握的静态结构，并逐渐转变可操作的“实体”；首先复习曲线与方程的概念，使得曲线与方程这一核心概念贯穿解析几何复习的全程，学生可以不断体会“曲线与方程”“方程与曲线”的关系，有助于完成概念的完整理解．而通过高一层次的认识又会对此前的认识存在一种“反作用”，开辟一个居高临下的视角，促进概念的理解、促进学习的深化．

函数与导数应用型．这类试题涉及导数的几何意义、单调性及单调区间、极值与最值、导数法证明不等式、不等式恒成立的讨论、函数零点或曲线公共点的讨论等，大多都会有高等数学背景，出现频率较大的是指数函数 $y=e^x$（特别是 $x>0$ 时 $e^x>1+x$），对数函数 $y=\ln x$（特别是 $x>0$ 时 $x>\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$），和不超过三次的多项式函数．主要考查抽象概括能力、推理论证能力、运算求解能力和创新意识等．可以体现有限与无

限的基本数学思想、函数与方程的基本数学思想、数形结合的基本数学思想、分类与整合的基本数学思想、化归与转化的基本数学思想、特殊与一般的基本数学思想.

一题多解的功能：洞察深层结构；优化认知结构