基于数学之美的视角谈高中数学解题

杨宗敏
陕西省岐山县岐山高级中学　722499

[摘　要] 数学之美有着各种各样的表现形式,需要学生从审美的角度去思考、分析和探索数学问题,为数学解题提供有效的策略. 文章从数学之美的表现出发,努力探寻数学美与数学解题之间的联系. 在对数学之美甄别的过程中,引导学生赏析数学之美,启迪解题灵感,并在快速解题的过程中,获得成功的体验.

[关键词] 数学之美;对称美;和谐美;简洁美

在全面推进素质教育的当前,教学需做到寓美于教,充分发挥学生的积极性、主动性和创造性,给予学生一双学会观察美的眼睛,去发现和挖掘数学之美,使学生在浓郁的数学学习兴趣中兴趣盎然地学习数学,从而让数学教学达到事半功倍的效果. 然而一些数学问题的形式较为复杂,无法唤起对美感的追求,尤其是对于学生来说,由于受到自身审美能力和知识水平的束缚,很难真正品味出数学之美. 因此,教师要避免教学的寡淡无味,做到以美启智. 只有充分挖掘数学之美,展现数学的魅力,才能让学生在领略和赏析数学美的同时,开拓视野,启迪思维.

数学之美的表现

作为美的产物,作为科学的"皇后",数学有着无与伦比的魅力,它的美具有鲜明性和新颖性,它的美感无处不在,不论是正直不阿的坐标轴,或是婀娜多姿的图像,又或是巧妙穿插的数,无一例外地展示着数学之美,可以深深地震撼学生的心灵.

实际上,学生唯有学会欣赏数学直观的外表、深刻的内涵、浓厚的文化底蕴及精湛的理性思考,才是真正学会了欣赏数学之美,才能产生一种愉悦的心情与良好的体验,从而激发学习动机,增强学好数学的信心,提高自身的创造性思维能力.

赏析数学之美,启迪解题灵感的途径

数学解题过程是以理性思维为主的,但也包含想象力,同时蕴含着丰富的美学价值. 从而,在数学解题的过程中,让学生去领略数学之美,巧用数学美打开解题通道是一种很有效的策略,即在数学问题的解决过程中,在感受数学美的同时,从美的角度生长出解决问题的方法或策略. 这样的解题策略,不仅可以帮助学生缩短思维的路径,探索数学问题的解决捷径,让问题较好和较快地获得解决,还可以让学生衍生出成就感,产生解决问题的幸福感和满足感,从而优化思维品质,提高解题能力. 下面,笔者从数学解题的视角出发谈谈如何让学生学会赏析数学之美,启迪解题灵感的粗浅体会.

1. 从"对称美"出发,激发解题灵感

数学之美,首先在于其对称美,它主要体现在几何图形的中心对称、轴对称,函数的图像等,这林林总总都给予人舒适美观之感. 而解题的过程中,我们不仅需要学会欣赏数学问题中所包含的对称,亦可以运用好这一美感来启迪思维,激发解题灵感,生成解题思路.

例1:(1)已知实数a,b满足$ab=1$,试求出$\frac{a+b}{a^2+b^2}$的最大值.

(2)已知实数x,y满足$3x^2+5xy-2y^2=1$,试求出$\frac{4x+y}{10x^2-2xy+5y^2}$的最大值.

分析:首先观察问题(1)的两实数a,b,不管是条件式$ab=1$,又或是所求式$\frac{a+b}{a^2+b^2}$,都可以一目了然地感受到对称美的存在,从而使得学生产生迫切解决问题的冲动. 由于本题的难度不大,学生经过思考后易生成以下解题思路:因为a,b同号,所以$\frac{a+b}{a^2+b^2}$的最大值需在a,b均为正数时取得. 根据$t=a+b\geqslant 2\sqrt{ab}=2$($a=b=1$时等号成立)和$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=t^2-2$,可得$\frac{a+b}{a^2+b^2}=\frac{t}{t^2-2}=\frac{1}{t-\frac{2}{t}}\leqslant 1$,在$t=2$时取得等号,所以$\frac{a+b}{a^2+b^2}$的最大值是1.

继续研究问题(2),观察后可以发现,本题不管是条件式$3x^2+5xy-2y^2=1$,还是所求式$\frac{4x+y}{10x^2-2xy+5y^2}$,让人一看都深感复杂. 不少学生在单独看到本题的时候易由于思维卡壳而产生抵触情绪. 而此时,若能联系问题(1),从问题(2)的烦琐表象展开思考,将式子转化为与问

作者简介:杨宗敏(1973—),本科学历,中学高级教师,从事高中数学教学与研究工作.

题(1)类似的具备对称美的式子,则可以快速找寻到解题路径,使问题获解. 因为$3x^2+5xy-2y^2=(x+2y)(3x-y)$,从而可以设$x+2y=a,3x-y=b$,则有$ab=1$,$x=\frac{a+2b}{7}$,$y=\frac{3a-b}{7}$,所以$\frac{4x+y}{10x^2-2xy+5y^2}=\frac{a+b}{a^2+b^2}$. 就这样,将问题(2)完美转化为问题(1),充分展现了其中蕴含的化归思想.

量与形是数学问题中不可或缺的两个特征,以上两个问题的量与形均相同,从而具备运用相同数学方法的条件. 显然,在以上问题的解决过程中,正是由于问题(1)中显性的对称性,让学生从繁到简进行联想,在孤立的问题(2)中探寻了可以与之关联的问题(1),借此找到了解决问题的思路,也体会到转化思想的价值. 因此,在解题的过程中,学生要善于发掘数式或图形间的对称性,灵活运用与之关联的各种关系,才能迅速探寻到解题突破口,丰富解题策略,进一步推动思维的深化.

2. 从"和谐美"入手,寻得解题入口

和谐美是数学美的另一特性,不少数学问题中都蕴含着丰富的和谐美. 这一特性主要表现在形式的统一和结构的严谨. 数学中很多问题都具有和谐美,学生应从美的享受到美的运用,从数学问题中的和谐因素与打破和谐的因素着手,基于习题本身的特征和解题方法的内在关联,寻得解题入口,优化解题思路,训练学生思维的深度和广度.

例2:已知平面直角坐标系xOy中,设点$A(1,0)$,$B(0,1)$,$C(a,b)$,$D(c,d)$,若不等式$\overrightarrow{CD}^2\geqslant(m-2)\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}+m(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OA})$对于任意实数$a,b,c,d$都成立,试求出实数$m$的最大值.

分析:本题是一道多变量的最值问题,由于赋予了向量的背景,使得难度加大. 首先,可以将向量关系式化为代数不等式:$(a-c)^2+(b-d)^2\geqslant(m-2)(ac+bd)+mbc$,整理后可得$a^2+b^2+c^2+d^2-mac-mbd-mbc\geqslant0$①. 接着,从和谐美的角度来看,倘若想达到和谐统一的境界,则需将①式中的平方项中的四个字母轮换,而观察①式的乘积项,a,d出现一次,b,c出现两次,那么可进一步配方a,d的平方项,变形①式为:$\left(a^2-mac+\frac{m^2}{4}c^2\right)+\left(d^2-mbd+\frac{m^2}{4}b^2\right)+\frac{4-m^2}{4}\left(b^2-\frac{4m}{4-m^2}bc+c^2\right)\geqslant0$,则$\left(a-\frac{m}{2}c\right)^2+\left(d-\frac{m}{2}b\right)^2+\frac{4-m^2}{4}\left(b^2-\frac{4m}{4-m^2}bc+c^2\right)\geqslant0$②. 因为②式对于任意实数$a,b,c,d$都成立,所以$\frac{4-m^2}{4}\left(b^2-\frac{4m}{4-m^2}bc+c^2\right)\geqslant0$对于任意实数$b,c$都成立,所以$\begin{cases}\frac{4-m^2}{4}\geqslant0,\\ \Delta=\left(\frac{4m}{4-m^2}\right)^2-4\leqslant0,\end{cases}$解得$1-\sqrt{5}\leqslant m\leqslant\sqrt{5}-1$,所以实数$m$的最大值是$\sqrt{5}-1$.

例2的解决不仅是数学解题的创新,也是数学美的演绎,充分说明数学之美的挖掘不仅仅是一种体验,更是思维腾飞的跑道,从而从和谐美入手解决数学问题不仅仅是固化解题模式的突破,也充分体现了数学之美的内涵中蕴含的智慧. 这种基于数学的和谐美而展开的思维,同时蕴含着一种发散性思维方式,这本身也是一种实践智慧.

3. 从"简洁美"开始,探索解题捷径

数学的美还体现在它的简洁性,它是数学美的基本形式,数学学科具有形式简单、秩序规整和高度统一的特征,数量及其之间的复杂关系也隐透着简洁美,从而真实地演绎着数学之美. 然而,大多数时候,不少学生无法从数学问题中一眼望穿其简洁美,这就需要根据自身的审美观,逐步转化,从而揭开其简洁的面纱,探索解题捷径,让数学之美绽放魅力.

例3:已知正实数x,y满足$\frac{x^2}{4}-y^2=1$,则$3x^2-2xy$的最小值是________.

分析:本题是一道一题多解的问题,别出心裁地展现了数学简洁美的独特魅力,从不同的简洁视角出发,可以形成不同的解题思路,可以获得不同的解法.

解法1:(整体思想1)

因为$\frac{x^2}{4}-y^2=\left(\frac{x}{2}+y\right)\left(\frac{x}{2}-y\right)$,所以可设$a=\frac{x}{2}+y$,$b=\frac{x}{2}-y$,从而$x=a+b$,$y=\frac{a-b}{2}$,且$ab=1$,所以$3x^2-2xy=2a^2+4b^2+6ab\geqslant(6+4\sqrt{2})ab=6+4\sqrt{2}$,所以$3x^2-2xy$的最小值是$6+4\sqrt{2}$.

解法2:(整体思想2)

$$z=\frac{3x^2-2xy}{\frac{x^2}{4}-y^2}=4\cdot\frac{3x^2-2xy}{x^2-4y^2}=4\frac{3-2\cdot\frac{y}{x}}{1-4\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$,设$t=\frac{y}{x}\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,则$z=4\cdot\frac{3-2t}{1-4t^2}$. 进一步设$s=3-2t\in(2,3)$,则$z=\frac{4s}{-s^2+6s-8}=\frac{4}{6-\left(s+\frac{8}{s}\right)}\geqslant6+4\sqrt{2}$. 当且仅当$s=2\sqrt{2}\in(2,3)$时取得等号,所以$3x^2-2xy$的最小值是$6+4\sqrt{2}$.

解法3:(恒等式法1)

设$x=t+\frac{1}{t}$,$y=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$,则有$z=3x^2-2xy=2\left(t^2+\frac{2}{t^2}\right)+6\geqslant6+4\sqrt{2}$,当且仅当$t=\sqrt{2}$时取得等号,所以$3x^2-2xy$的最小值是$6+4\sqrt{2}$.

解法4:(恒等式法2)

设$x=\frac{2}{\cos\theta}$,$y=\tan\theta$,$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则有$z=3x^2-2xy=\frac{4(3-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$. 令$t=3-\sin\theta\in(2,3)$,则$\cos^2\theta=1-(3-t)^2=-t^2+6t-8$,$z=\frac{4t}{-t^2+6t-8}=\frac{4}{6-\left(t+\frac{8}{t}\right)}\geqslant\frac{4}{6-4\sqrt{2}}=6+4\sqrt{2}$. 当且仅当$t=2\sqrt{2}\in(2,3)$时取得等号,所以$3x^2-2xy$的最小值是$6+4\sqrt{2}$.

出于对数学简洁美的思考而发现和获取解题思路,真正叫做"以美启思",再借助已有知识经验和审美直觉确定解题的切入点,领略数学的精彩,从而,让数学之美来提升分析和解决问题的能力. 本题的以上解法之间存在着或有或无的纽带,从而生成的解题方法也具有一定的相似性,进一步激起学生的解题兴趣,激发他们探究的兴奋点,激励他们努力探究下去,使他们获得成功的体验.

总之,教师需善于运用数学美的精髓启迪学生思维,使学生对数学之美有更灵敏、更深刻的感受,使其思维进入最佳时期. 在解题中,学生善于从数学之美入手,让灵感与逻辑思维齐头并进,探寻到解决问题的入口,感受到创造数学美的喜悦,体验成功的乐趣,这样一来,他们的思维能力也能得以提高,同时让学生得到愉悦而满足的享受.