关于 $2f(x)+f\left(\frac{cx+d}{ax+b}\right)=x$ 型函数方程的求解研究

周德春

(江苏省射阳中学 224300)

引题 已知函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x$,求 $f(x)$.

此题是大家所熟悉的一道求解函数方程的题目,其解法是把已知函数方程中的 x 换成 $\frac{1}{x}$,得到一个新函数方程,再与已知函数方程联立成二元方程组,解出 $f(x)$ 即可.如果把此题作一些变化,那又怎么求解呢?

题1 已知函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f\left(\frac{x-2}{2x-1}\right)=x$,求 $f(x)$.

分析 把已知函数方程中的 x 换成 $\frac{x-2}{2x-1}$(下文把类似于 $\frac{x-2}{2x-1}$ 这样的替换式子记为 $g(x)$),得到一个新函数方程 $2f\left(\frac{x-2}{2x-1}\right)+f(x)=\frac{x-2}{2x-1}$,然后再与已知函数方程联立成二元方程组,解之得 $f(x)=\frac{4x^2-3x+2}{6x-3}$.

上述分析过程中,把已知函数方程中的 x 换成 $\frac{x-2}{2x-1}$ 后,$f\left(\frac{x-2}{2x-1}\right)$ 恰好变成了 $f(x)$,这是一个非常重要的巧合,也是解决此题的关键.那么符合怎样条件的函数方程才会出现这样的巧合呢?

定理1 如果函数 $g(x)=\frac{cx+d}{ax+b}$(其中 $ad-bc\neq0$ 且 $g(x)=x$ 除外)满足 $g(g(x))=x$,那么 $b+c=0$ 且 $ad-bc\neq0$.

证明 由 $g(x)=\frac{cx+d}{ax+b}$,可以得到

$$g(g(x))=\frac{c\cdot g(x)+d}{a\cdot g(x)+b}=\frac{c\,\frac{cx+d}{ax+b}+d}{a\,\frac{cx+d}{ax+b}+b}=\frac{(c^2+ad)x+cd+bd}{(ac+ab)x+ad+b^2}.$$

而 $g(g(x))=x$ 恒成立,

所以 $\frac{(c^2+ad)x+cd+bd}{(ac+ab)x+ad+b^2}=x$(☆)恒成立,

所以 $(c^2+ad)x+cd+bd=(ac+ab)x^2+(ad+b^2)x$ 恒成立,

所以 $\begin{cases}c^2+ad=ad+b^2\\ ac+ab=cd+bd=0\end{cases}$.

又由于(☆)式左端的分母不为0,

所以有 $\begin{cases}c^2+ad=ad+b^2\neq0 ①\\ ac+ab=cd+bd=0 ②\end{cases}$.

由于 $ac+ab=cd+bd\Leftrightarrow ac+ab-cd-bd=0$
$\Leftrightarrow(b+c)(a-d)=0$.

于是当 $b=-c$ 时,显然②成立,

此时 $g(x)=\frac{cx+d}{ax-c}$,结合条件 $ad-bc\neq0$ 知道 $ad+c^2\neq0$,从而①成立;

当 $b\neq-c$ 时,为了满足②,则 $a=d=0$,

此时 $g(x)=\frac{cx}{b}$;而为了满足①,必须有 $b=c\neq0$,

所以 $g(x)=x$(舍去).

综上所述有,$b+c=0$ 且 $ad-bc\neq0$.

于是对于"已知函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f\left(\frac{cx+d}{ax+b}\right)=x$(其中 $b+c=0$ 且 $ad-bc\neq0$),求 $f(x)$."就可以把 x 换成 $\frac{cx+d}{ax+b}$,得到一个新方程,

与已知方程联立成二元方程组可解出 $f(x)$. 特别地,当 $b=c=0,a=d\neq 0$ 时,$g(x)=\frac{1}{x}$ 就是上面引题的情形;当 $a=2,b=-1,c=1,d=-2$ 时,$g(x)=\frac{x-2}{2x-1}$ 就是上面题 1 的情形.

题 2 已知函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=x$,求 $f(x)$.

分析 把已知函数方程中的 x 换成 $\frac{x-1}{x}$,得到 $2f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x-1}{x}$,再把所得函数方程中的 x 换成 $\frac{x-1}{x}$,得到 $2f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=\frac{1}{1-x}$,这样共有三个方程,联立成三元方程组,可解出 $f(x)=\frac{4x^3-6x^2+3x-2}{9x^2-9x}$.

上面将已知函数方程中的 x 换成 $\frac{x-1}{x}$,经过 2 次迭代后,$f\left(\frac{x-1}{x}\right)$ 恰好变成了 $f(x)$,这同样是一个巧合. 那么符合怎样条件的函数方程才会出现这样的巧合呢?

定理 2 如果 $g(x)=\frac{cx+d}{ax+b}$(其中 $ad-bc\neq 0$ 且 $g(x)=x$ 除外)满足 $g(g(g(x)))=x$,那么 $b^2+c^2+bc+ad=0$ 且 $ad-bc\neq 0$.

证明 由 $g(x)=\frac{cx+d}{ax+b}$,可以得到

$$g(g(g(x)))=\frac{(c^3+2acd+abd)x+c^2d+ad^2+bcd+b^2d}{(ac^2+abc+a^2d+ab^2)x+acd+2abd+b^3}.$$

而 $g(g(g(x)))=x$ 恒成立,

所以 $\frac{(c^3+2acd+abd)x+c^2d+ad^2+bcd+b^2d}{(ac^2+abc+a^2d+ab^2)x+acd+2abd+b^3}=x$(※)恒成立,

所以 $(c^3+2acd+abd)x+c^2d+ad^2+bcd+b^2d=(ac^2+abc+a^2d+ab^2)x^2+(acd+2abd+b^3)x$ 恒成立,

所以 $\begin{cases}c^3+2acd+abd=acd+2abd+b^3\\ac^2+abc+a^2d+ab^2=c^2d+ad^2+bcd+b^2d=0\end{cases}$.

又由于(※)式左端的分母不能为 0,所以有

$\begin{cases}c^3+2acd+abd=acd+2abd+b^3\neq 0 ①\\ac^2+abc+a^2d+ab^2=c^2d+ad^2+bcd+b^2d=0 ②\end{cases}$.

由于② $ac^2+abc+a^2d+ab^2=c^2d+ad^2+bcd+b^2d=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=0 \text{ 或 } b^2+c^2+bc+ad=0\\d=0 \text{ 或 } b^2+c^2+bc+ad=0\end{cases}$.

于是当 $a=0$ 时,由①得 $b=c\neq 0$,再根据②得 $d=0$,所以 $g(x)=x$(舍去).

当 $d=0$ 时,由①得 $b=c\neq 0$,再根据②得 $a=0$,所以 $g(x)=x$(舍去).

当 $b^2+c^2+bc+ad=0$ 时,显然②是成立的;

又此时因为①$\Leftrightarrow\begin{cases}(b-c)(b^2+c^2+bc+ad)=0 ③\\c^3+2acd+abd\neq 0 ④\end{cases}$,

显然③已成立;

而为了考察此时④是否成立,则考察

$\begin{cases}b^2+c^2+bc+ad=0\\c^3+2acd+abd\neq 0\\ad-bc\neq 0\end{cases}$(★)是否成立;

而此时因为(★)$\Leftrightarrow\begin{cases}b^2+c^2+bc+ad=0\\c(-b^2-bc-ad)+2acd+abd\neq 0\\ad-bc\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b^2+c^2+bc+ad=0\\(b+c)(ad-bc)\neq 0\\ad-bc\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b^2+c^2+bc+ad=0\\b+c\neq 0\\ad-bc\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2+c^2+bc+ad=0\\ad-bc\neq 0\end{cases}$,

此式已经成立,所以④成立.

综上所述 $b^2+c^2+bc+ad=0$ 且 $ad-bc\neq 0$.

于是对于"已知函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f\left(\frac{cx+d}{ax+b}\right)=x$(其中 $b^2+c^2+bc+ad=0$ 且 $ad-bc\neq 0$),求 $f(x)$."就可以把 x 换成 $\frac{cx+d}{ax+b}$,迭代 2 次后,列出三元方程组求解出 $f(x)$. 特别地,当 $a=1,b=0,c=1,d=-1$ 时,$g(x)=\frac{x-1}{x}$,就是上面题 2 的情形.

题 3 已知函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f\left(\frac{2x-2}{x}\right)=x$,求 $f(x)$.

分析 把已知函数方程中 x 换成 $\frac{2x-2}{x}$,得到新方程 $2f\left(\frac{2x-2}{x}\right)+f\left(\frac{x-2}{x-1}\right)=\frac{2x-2}{x}$,再把所得新方程中的 x 换成 $\frac{2x-2}{x}$,得到另一个新方程

$2f\left(\frac{x-2}{x-1}\right)+f\left(\frac{2}{2-x}\right)=\frac{x-2}{x-1}$，再继续把所得新方程中的 x 换成 $\frac{2x-2}{x}$，得到更新方程 $2f\left(\frac{2}{2-x}\right)+f(x)=\frac{2}{2-x}$，最后把这里的四个方程联立成四元方程组，可解出 $f(x)=\frac{8x^4-30x^3+42x^2-34x+16}{15x^3-45x^2+30x}$.

上面将已知函数方程中的 x 换成 $\frac{2x-2}{x}$，经过3次迭代后，$f\left(2-\frac{2}{x}\right)$ 恰好变成了 $f(x)$，同样考虑符合怎样条件的函数方程才会出现这样的恰好呢？

定理3 如果 $g(x)=\frac{cx+d}{ax+b}$（其中 $ad-bc\neq0$ 且 $g(x)=x$ 和 $g(g(x))=x$ 都除外）满足

$g(g(g(g(x))))=x$，

那么 $b^2+c^2+2ad=0$ 且 $ad-bc\neq0$.

分析 根据 $g(x)=\frac{cx+d}{ax+b}$ 推算 $g(g(g(g(x))))$ 将会非常复杂，所以改走它路，利用定理1来找寻 $g(x)$ 应满足的条件.

证明 令 $g(g(x))=k(x)$，

则由 $g(g(g(g(x))))=x$ 可得 $k(k(x))=x$.

因为 $g(g(x))=x$ 除外，所以 $k(x)=x$ 除外.

这样根据定理1知道，

符合 $k(k(x))=x$ 的 $k(x)$ 一定是 $k(x)=\frac{Cx+D}{Ax+B}$（其中 $B+C=0$ 且 $AD-BC\neq0$）的形式，

于是由 $g(g(x))=k(x)$ 可得

$$\frac{(c^2+ad)x+cd+bd}{(ac+ab)x+ad+b^2}=\frac{Cx+D}{Ax+B},$$

再根据 $\begin{cases}B+C=0\\AD-BC\neq0\end{cases}$ 可得

$$\begin{cases}ad+b^2+c^2+ad=0\\(ac+ab)(cd+bd)-(ad+b^2)(c^2+ad)\neq0\end{cases},$$

变形得 $\begin{cases}b^2+c^2+2ad=0\\-(ad-bc)^2\neq0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b^2+c^2+2ad=0\\ad-bc\neq0\end{cases}$

（注：容易验证此式中隐含着 $b+c\neq0$）.

综上所述，$b^2+c^2+2ad=0$ 且 $ad-bc\neq0$.

于是对于"已知函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f\left(\frac{cx+d}{ax+b}\right)=x$（其中 $b^2+c^2+2ad=0$ 且 $ad-bc\neq0$，求 $f(x)$."就可以把 x 换成 $\frac{cx+d}{ax+b}$，经过3次迭代后，列出四元方程组求解出 $f(x)$. 特别地，当 $a=1,b=0,c=2,d=-2$ 时，$g(x)=\frac{2x-2}{x}$，就是上面题3的情形.

为了帮助大家更清楚地理解题3中的迭代规律，这里给出一个函数列：

已知函数 $g(x)=\frac{2x-2}{x}$，且 $g_n(x)=\underbrace{g(g(\cdots g(x)\cdots))}_{n个g}$，$n\in\mathbf{N}^+$，则函数列 $\{g_n(x)\}$ 的通项公式为

$$g_n(x)=\begin{cases}\frac{2x-2}{x}, & n=4k+1\\ \frac{x-2}{x-1}, & n=4k+2\\ \frac{2}{2-x}, & n=4k+3\\ x, & n=4k+6\end{cases}\quad(k\in\mathbf{N}).$$

由此可知，$\{g_n(x)\}$ 是一个周期为4的函数列，而且题3中的 $g(x)$ 是此函数列中的第1个函数，所以迭代次数是3；同时根据这个周期函数列，还可以编制下列同类题目：

已知函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f\left(\frac{x-2}{x-1}\right)=x$，求 $f(x)$.（迭代1次即可解）

已知函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f\left(\frac{2}{2-x}\right)=x$，求 $f(x)$.（迭代3次即可解）

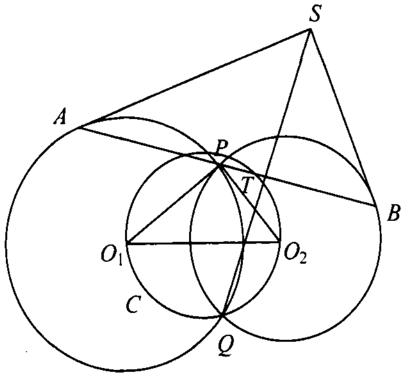
题4 已知函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)=x$，求 $f(x)$.

分析 把已知函数方程中的 x 换成 $\frac{2x-1}{x+1}$，得到 $2f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{2x-1}{x+1}$，再把所得函数方程中的 x 换成 $\frac{2x-1}{x+1}$，得到 $2f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{x-2}{2x-1}\right)=\frac{x-1}{x}$，如此继续，共迭代5次到得六个方程，联立它们可解出 $f(x)$.（过程较复杂，结果略.）

上面将已知函数方程中的 x 换成 $\frac{2x-1}{x+1}$，经过5次迭代后，$f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$ 恰好变成了 $f(x)$，从而实现问题的求解. 同样符合怎样条件的函数方程才会出现这样的恰好呢？ （下转封底）

直径等于线段ST.

(江西省高安市石脑二中　王典辉 330818)



2540　设x,y,z是正实数,则$2\sum x^2\sum x\geqslant 3\sum yz\sqrt{2(y^2+z^2)}$ (1),其中$\sum$表示三元循环和.

(四川成都金牛西林巷18号晨曦数学工作室　宿晓阳 610031)

(上接第62页)

定理4　如果$g(x)=\frac{cx+d}{ax+b}$(其中$ad-bc\neq0$且$g(x)=x$,$g(g(x))=x$和$g(g(g(x)))=x$都除外)满足$g(g(g(g(g(g(x))))))=x$,那么$b^2+c^2-bc+3ad=0$且$ad-bc\neq0$.

利用定理1或定理2的结论可证明该定理(证明过程略).

同前面一样,为了帮助大家更清楚地理解题1、题2和题4中的迭代规律,这里也给出一个函数列:

已知函数$g(x)=\frac{2x-1}{x+1}$,且$g_n(x)=\underbrace{g(g(\cdots g(x)\cdots))}_{n个g}$,$n\in\mathbf{N}^+$,则函数列$\{g_n(x)\}$的通项公式为$g_n(x)=\begin{cases}\frac{2x-1}{x+1}, & n=6k+1\\ \frac{x-1}{x}, & n=6k+2\\ \frac{x-2}{2x-1}, & n=6k+3\\ \frac{1}{1-x}, & n=6k+4\\ \frac{1+x}{2-x}, & n=6k+5\\ x, & n=6k+6\end{cases}$ $(k\in\mathbf{N})$.

由此可知,$\{g_n(x)\}$是一个周期为6的函数列,而且题1、题2和题4中的$g(x)$分别是此函数列中的第3、第2和第1个函数,所以它们的迭代次数分别是1、2和5;同时根据这个周期函数列,还可以编制下列同类题目:

已知函数$f(x)$满足$2f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$,求$f(x)$.(迭代2次即可解)

已知函数$f(x)$满足$2f(x)+f\left(\frac{1+x}{2-x}\right)=x$,求$f(x)$.(迭代5次即可解)

参考文献

[1]葛军.新编奥林匹克数学竞赛解题指导(高中)[M].南京:南京师范大学出版社,2002

[2]黄启林.高中数学奥林匹克题集[M].广州:广东教育出版社,2002

[3]卢建川,吴伟朝.一类迭代型函数方程问题的研究[J].福建中学数学,2006(4)

[4]汤光宋.解某类函数方程的迭代法[J].沈阳大学学报,1995(2)

ISSN 0583-1458

04>

9 770583 145207

刊号:ISSN 0583－1458 / CN11－2254/O1

全国各地邮局订购　代号:2－501

全年定价:120.00元　每期定价:10.00元