

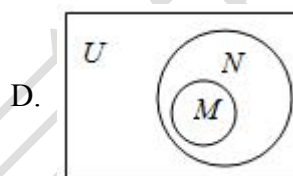
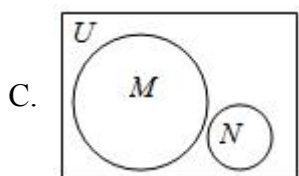
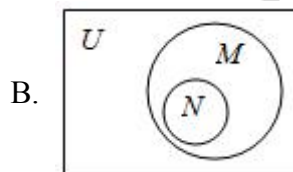
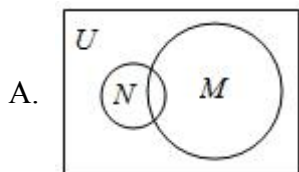
江苏省仪征中学高一数学期末综合练习试卷

2019.1.12

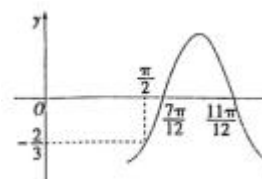
题号	一	二	三	总分
得分				

一、选择题（本大题共 10 小题，共 50.0 分）

1. 已知全集 $U=R$ ，则正确表示集合 $M=\{-1, 0, 1\}$ 和 $N=\{x|x^2+x=0\}$ 关系的韦恩 (Venn) 图是 ()



2. 设向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10}$, $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{6}$, 则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(\quad)$
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 5
3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \log_3 x, & x>0 \\ 2^x, & x\leq 0 \end{cases}$, 则 $f(f(\frac{1}{9}))=(\quad)$
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{8}$
4. 已知函数 $f(x)=\frac{6}{x}-\log_2 x$, 在下列区间中, 包含 $f(x)$ 零点的区间是 ()
 A. (0,1) B. (1,2) C. (2,4) D. $(4,+\infty)$
5. 函数 $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 的一个对称中心是 ()
 A. $(\frac{\pi}{2}, 0)$ B. $(\frac{\pi}{4}, 0)$ C. $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ D. $(-\frac{\pi}{2}, 0)$
6. 已知 $a=2\log_3 2$, $b=\log_3 5$, $c=(\frac{1}{3})^{0.2}$, 则 ()
 A. $c < b < a$ B. $a < b < c$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$
7. 设向量 $\vec{a}=(1, 2)$, $\vec{b}=(-1, 1)$, 若向量 $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ 与向量 $\vec{a}$ 垂直, 则 λ 的值为 ()
 A. $\frac{4}{3}$ B. 1 C. -1 D. -5
8. 已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的一部分图象如图所示, $f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{3}$, 则 $f(0)=(\quad)$



- A. $\frac{2}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

9. 已知非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 满足 $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 且 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 为()

- A. 三边均不相等的三角形 B. 直角三角形
C. 等腰非等边三角形 D. 等边三角形

10. 若定义 $[-2018, 2018]$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对任意 $x_1, x_2 \in [-2018, 2018]$ 有 $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2) - 2017$, 且当 $x > 0$ 时, 有 $f(x) > 2017$, 设 $f(x)$ 的最大值、最小值分别为 M, m , 则 $M+m$ 的值为()

- A. 0 B. 2018 C. 4034 D. 4036

二、填空题(本大题共 6 小题, 共 26.0 分)

11. 已知幂函数 $f(x)$ 满足 $f(2) = 8$, 则 $f(-2) =$ _____.

12. 已知 $\varphi \in (0, \pi)$, 若函数 $f(x) = \cos(2x + \varphi)$ 为奇函数, 则 $\varphi =$ _____.

13. 已知 $\vec{a} = (x+1, 2)$, $\vec{b} = (4, -7)$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为锐角, 则 x 的取值范围为_____.

14. 设 α 为锐角, 若 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{4}{5}$, 则 $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{12})$ 的值为_____.

15. 已知 $m \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} |2x+1|, & x \leq 1 \\ \log_2(x-1), & x > 1 \end{cases}$, 若函数 $y = f(x) - m$ 有 3 个不同的零点, 则实数 m 的取值范围是_____.

16. 已知平面上的向量 $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ 满足 $|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 = 4$, $|\overrightarrow{AB}| = 2$, 设向量 $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$, 则 $|\overrightarrow{PC}|$ 的最小值是_____.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 83.0 分)

17. 已知集合 $A = \{x | m-1 \leq x \leq 2m+3\}$, 函数 $f(x) = \lg(-x^2 + 2x + 8)$ 的定义域为 B .

- (1) 当 $m=2$ 时, 求 $A \cup B$ 、 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B$;
(2) 若 $A \cap B = A$, 求实数 m 的取值范围.

18. 已知不共线向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5, (\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 20$.

- (1) 求 $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$;
(2) 若 $(k\vec{a} + 2\vec{b}) \perp (\vec{a} - k\vec{b})$, 求实数 k 的值.

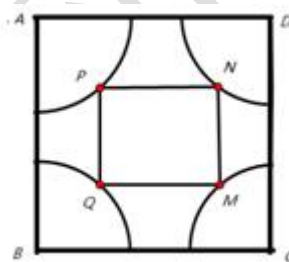
19. 已知函数 $f(x) = \sin x (\sin x + \sqrt{3} \cos x)$.

- (1) 求 $y = f(x)$ 的最小正周期;
(2) 当 $x \in [-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}]$ 时, 求 $y = f(x)$ 的最大值和最小值及相应 x 的值

20. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x-2}{x+2}$.

- (I) 若 $f(a) = 1$, 求 a 的值;
- (II) 试判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明你的结论;
- (III) 写出方程 $f(x) = \sin x + 2$ 根的个数 (不需证明).

21. 如图, 政府有一个边长为 400 米的正方形公园 $ABCD$, 在以四个角的顶点为圆心, 以 150 米为半径的四分之一圆内都种植了花卉. 现放在中间修建一块长方形的活动广场 $PQMN$, 其中 P 、 Q 、 M 、 N 四点都在相应的圆弧上, 并且活动广场边界与公园边界对应平行, 记 $\angle QBC = \alpha$ 长方形活动广场的面积为 S .



- (1) 请把 S 表示成关于 α 的函数关系式;
- (2) 求 S 的最小值.

22. 已知 $b \in \mathbb{R}$, b 为常数, 函数 $f(x) = x^2 - bx + b - 1$.

- (1) 求关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集;
- (2) 若函数 $F(x) = |f(x)| - (x - \frac{1}{2})$ 有两个不同的零点, 求实数 b 的取值范围;
- (3) 对于给定的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 且 $x_1 < x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$, 证明: 关于 x 的方程 $f(x) = \frac{1}{3}[f(x_1) + 2f(x_2)]$ 在区间 (x_1, x_2) 内有且仅有一个实根.

答案和解析

1. 【答案】B

【解析】

解: 由 $N = \{x | x^2 + x = 0\}$,

得 $N = \{-1, 0\}$.

$\because M = \{-1, 0, 1\}$,

$\therefore N \subset M$,

故选 B.

先化简集合 N, 得 $N = \{-1, 0\}$, 再看集合 M, 可发现集合 N 是 M 的真子集, 对照韦恩(Venn)图即可选出答案.

本小题主要考查 Venn 图表达集合的关系及运算、一元二次方程的解法等基础知识, 考查运算求解能力, 考查数形结合思想、化归与转化思想. 属于基础题.

2. 【答案】A

【解析】

解: $\because |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{6}$,

$\therefore$ 分别平方得 $\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 10$, $\vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 6$,

两式相减得 $4\vec{a} \cdot \vec{b} = 10 - 6 = 4$,

即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$,

故选: A.

将等式进行平方, 相加即可得到结论.

本题主要考查向量的基本运算, 利用平方进行相加是解决本题的关键, 比较基础.

3. 【答案】B

【解析】

解: 因为 $\frac{1}{9} > 0$, 所以 $f(\frac{1}{9}) = \log_3 \frac{1}{9} = -2$, 又 $-2 < 0$, 所以 $f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$;

故选: B.

首先求出 $\frac{1}{9}$ 的函数值, 然后判断此函数值所在范围, 继续求其函数值.

本题考查了分段函数的函数值求法; 关键是明确自变量所属的范围, 代入对应的解析式计算即可.

4.【答案】C

【解析】

$$\text{解:} \because f(x) = \frac{6}{x} - \log_2 x,$$

$$\therefore f(2) = 2 > 0, f(4) = -\frac{1}{2} < 0,$$

满足 $f(2)f(4) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在区间 $(2, 4)$ 内必有零点,

故选:C

可得 $f(2) = 2 > 0, f(4) = -\frac{1}{2} < 0$, 由零点的判定定理可得.

本题考查还是零点的判断, 属基础题.

5.【答案】B

【解析】

解: 令 $x - \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 求得 $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, 故函数 $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ 的对称中心为 $(k\pi + \frac{\pi}{4}, 0)$,

令 $k=0$, 可得函数 $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ 的一个对称中心是 $(\frac{\pi}{4}, 0)$,

故选:B.

利用正弦函数的图象的对称性, 求得函数 $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ 的一个对称中心.

本题主要考查正弦函数的图象的对称性, 属于基础题.

6.【答案】D

【解析】

$$\text{解:} \because 1 = \log_3 3 < a = 2\log_3 2 = \log_3 4 < b = \log_3 5 < \log_3 9 = 2,$$

$$c = (\frac{1}{3})^{0.2} < (\frac{1}{3})^0 = 1,$$

$$\therefore c < a < b.$$

故选:D.

利用对数函数、指数函数的单调性直接求解.

本题考查三个数的大小的比较, 考查对数函数、指数函数的单调性等基础知识,

是基础题.

7.【答案】D

【解析】

解:由已知得向量 $\vec{a} + \lambda \vec{b} = (1-\lambda, 2+\lambda)$,

$\therefore$ 向量 $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ 与向量 $\vec{a}$ 垂直,

$$\therefore (\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0.$$

$$\therefore (1-\lambda) \times 1 + (2+\lambda) \times 2 = 0, \text{ 解得 } \lambda = -5.$$

故选:D.

向量 $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ 与向量 $\vec{a}$ 垂直, 可得 $(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$. 即可得出 λ .

本题考查了平面向量共线定理、数量积运算性质、向量垂直与数量积的关系,

考查了推理能力与计算能力, 属于基础题.

8. 【答案】B

【解析】

解:由图象可得最小正周期为 $\frac{2}{3}\pi$.

$$\text{所以 } f(0) = f\left(\frac{2}{3}\pi\right),$$

注意到 $x = \frac{2}{3}\pi$ 与 $x = \frac{1}{2}\pi$ 关于 $x = \frac{7}{12}\pi$ 对称,

$$\text{故 } f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{2}{3}.$$

故选:B.

根据图象求出周期, 注意 $x = \frac{2}{3}\pi$ 与 $x = \frac{1}{2}\pi$ 关于 $x = \frac{7}{12}\pi$ 对称, 求出 $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)$, 就是 $f(0)$ 的值

本题考查由 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图象确定其解析式, 考查分析解决问题的能力, 是基础题

9. 【答案】D

【解析】

$$\text{解: } \triangle ABC \text{ 中, } \frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AB}|} = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AC}|},$$

$$\therefore \frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AB}| \times |\vec{BC}|} = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AC}| \times |\vec{BC}|},$$

$$\therefore \cos \langle \vec{AB}, \vec{BC} \rangle = \cos \langle \vec{CA}, \vec{BC} \rangle,$$

$\therefore B = C$, $\triangle ABC$ 是等腰三角形;

$$\text{又 } \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} \cdot \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore 1 \times 1 \times \cos A = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \cos A = \frac{1}{2}, A = \frac{\pi}{3},$$

∴△ABC 是等边三角形.

故选:D.

根据 $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 得出 $B=C$, $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{2}$ 得出 $A = \frac{\pi}{3}$,

由此判断△ABC 是等边三角形.

本题考查了平面向量的数量积运算问题, 也考查了三角形形状的判断问题, 是基础题.

10. 【答案】C

【解析】

解: 令 $x_1 = x_2 = 0$ 得 $f(0) = 2f(0) - 2017$, ∴ $f(0) = 2017$,

令 $x_1 = -x_2$ 得 $f(0) = f(-x_2) + f(x_2) - 2017 = 2017$,

∴ $f(-x_2) + f(x_2) = 4034$,

令 $g(x) = f(x) - 2017$, 则 $g_{\max}(x) = M - 2017$, $g_{\min}(x) = m - 2017$,

∵ $g(-x) + g(x) = f(-x) + f(x) - 4034 = 0$,

∴ $g(x)$ 是奇函数,

∴ $g_{\max}(x) + g_{\min}(x) = 0$, 即 $M - 2017 + m - 2017 = 0$,

∴ $M + m = 4034$.

故选:C.

计算 $f(0) = 2017$, 构造函数 $g(x) = f(x) - 2017$, 判断 $g(x)$ 的奇偶性得出结论.

本题考查了奇偶性的判断与性质, 考查函数的最值求法, 注意运用赋值法,

属于中档题.

11. 【答案】-8

【解析】

解: 设幂函数 $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

由 $f(2) = 8$,

∴ $2^\alpha = 8$,

解得 $\alpha = 3$,

∴ $f(x) = x^3$;

∴ $f(-2) = (-2)^3 = -8$.

故答案为:-8.

设出幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$, 由 $f(2)=8$ 求得 α 的值, 写出函数解析式, 再计算 $f(-2)$ 的值.

本题考查了幂函数的图象与性质的应用问题, 是基础题.

12. 【答案】 $\frac{\pi}{2}$

【解析】

【分析】

根据余弦函数的图象和性质即可得到结论. 本题主要考查了余弦函数的奇偶性问题, 是基础题目.

【解答】

解: 若函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)$ 为奇函数,

则 $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$,

又 $\varphi\in(0, \pi)$,

所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

故答案为 $\frac{\pi}{2}$.

13. 【答案】 $(\frac{5}{2}, +\infty)$

【解析】

解: 若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$, 则 $8+7(x+1)=0, \therefore x=-\frac{15}{7}$,

$\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为锐角,

$\therefore x\neq-\frac{15}{7}$.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=4(x+1)-14=4x-10$,

$\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为锐角,

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}>0$, 即 $4x-10>0$,

$\therefore x>\frac{5}{2}$,

故答案为 $(\frac{5}{2}, +\infty)$.

令 $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ 即可解出 x 的范围, 再排除掉 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线的情况即可.

本题考查了平面向量的数量积及夹角计算, 属于基础题.

14. 【答案】 $\frac{17\sqrt{2}}{50}$

【解析】

解: 设 $\beta = \alpha + \frac{\pi}{6}$,

$$\therefore \sin\beta = \frac{3}{5}, \sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = \frac{24}{25}, \cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = \frac{7}{25},$$

$$\therefore \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2\beta \cos \frac{\pi}{4} - \cos 2\beta \sin \frac{\pi}{4} = \frac{17\sqrt{2}}{50}.$$

故答案为: $\frac{17\sqrt{2}}{50}$.

先设 $\beta = \alpha + \frac{\pi}{6}$, 根据 $\cos\beta$ 求出 $\sin\beta$, 进而求出 $\sin 2\beta$ 和 $\cos 2\beta$, 最后用两角和的正弦公式得到 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{12}\right)$ 的值.

本题要我们在已知锐角 $\alpha + \frac{\pi}{6}$ 的余弦值的情况下, 求 $2\alpha + \frac{\pi}{12}$ 的正弦值, 着重考查了两角和与差的正弦、余弦公式和二倍角正弦、余弦等公式, 考查了三角函数中的恒等变换应用, 属于中档题.

15. 【答案】 $(0, 3]$

【解析】

解: 画出函数 $y=f(x)$

$$= \begin{cases} |2x+1|, & x \leq 1 \\ \log_2(x-1), & x > 1 \end{cases}, \text{ 与 } y=m \text{ 的图象}$$

如图所示:

$\therefore$ 函数 $y=f(x)-m$ 有三个不同的零点,

$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 与 $y=m$ 的图象有 3 个交点,

由图象可得 m 的取值范围为 $(0, 3]$,

故答案为: $(0, 3]$.

画出函数 $y=f(x)$ 与 $y=m$ 的图象, 由图象可得 m 的取值范围.

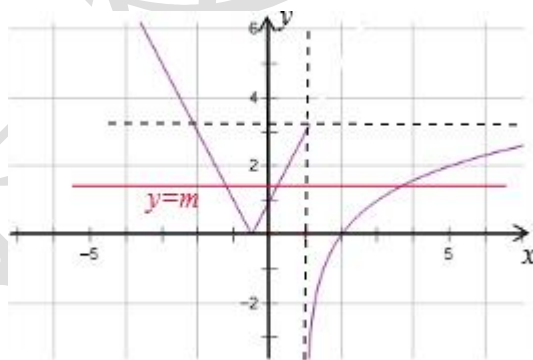
本题考查了函数的零点的判断及分段函数的应用, 数形结合的应用, 属于中档题.

16. 【答案】 2

【解析】

解: $|\vec{PA}|^2 + |\vec{PB}|^2 = 4, |\vec{AB}| = 2$

$$\therefore |\vec{PA}|^2 + |\vec{PB}|^2 = |\vec{AB}|^2$$



$$\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$$

$$\therefore \overrightarrow{PC}^2 = 4\overrightarrow{PA}^2 + 4\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB}^2$$

$$= 3\overrightarrow{PA}^2 + 4 \geq 4$$

$$\therefore |\overrightarrow{PC}| \geq 2$$

故答案为 2.

利用勾股定理判断出 PA, 与 PB 垂直, 得到它们的数量积为 0; 求 $\overrightarrow{PC}$ 的平方, 求出范围.

本题考查勾股定理、向量垂直的充要条件、向量模的性质: 模的平方等于向量的平方.

17. 【答案】解: (1) 根据题意, 当 $m=2$ 时, $A=\{x|1 \leq x \leq 7\}$, $B=\{x|-2 < x < 4\}$, 则 $A \cup B = \{x|-2 < x \leq 7\}$,

又 $C_R A = \{x|x < 1 \text{ 或 } x > 7\}$,

则 $(C_R A) \cap B = \{x|-2 < x < 1\}$;

(2) 根据题意, 若 $A \cap B = A$, 则 $A \subseteq B$, 分 2 种情况讨论:

①、当 $A = \emptyset$ 时, 有 $m-1 > 2m+3$, 解可得 $m < -4$,

②、当 $A \neq \emptyset$ 时,

若有 $A \subseteq B$, 必有 $\begin{cases} m-1 \leq 2m+3 \\ m-1 > -2 \\ 2m+3 < 4 \end{cases}$, 解可得 $-1 < m < \frac{1}{2}$,

综上可得: m 的取值范围是: $(-\infty, -4) \cup (-1, \frac{1}{2})$.

【解析】

本题考查集合间关系的判定, 涉及集合间的混合运算, 考查了学生的计算能力, 培养了学生分析问题与解决问题的能力.

(1) 根据题意, 由 $m=2$ 可得 $A=\{x|1 \leq x \leq 7\}$, 由并集定义可得 $A \cup B$ 的值, 由补集定义可得 $C_R A = \{x|x < 1 \text{ 或 } x > 7\}$, 进而由交集的定义计算可得 $(C_R A) \cap B$, 即可得答案;

(2) 根据题意, 分析可得 $A \subseteq B$, 进而分 2 种情况讨论: ①、当 $A = \emptyset$ 时, 有 $m-1$

$> 2m+3$, ②、当 $A \neq \emptyset$ 时, 有 $\begin{cases} m-1 \leq 2m+3 \\ m-1 > -2 \\ 2m+3 < 4 \end{cases}$, 分别求出 m 的取值范围, 进而

对其求并集可得答案.

18.【答案】解：（1）不共线向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $(\vec{a}-3\vec{b}) \cdot (2\vec{a}+\vec{b})=20$.

所以： $2\vec{a}^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b}^2 = 20$,

解得： $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{77}{5}$,

所以： $\vec{a} \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 9 - \frac{77}{5} = -\frac{32}{5}$.

（3）若 $(k\vec{a}+2\vec{b}) \perp (\vec{a}-k\vec{b})$,

则： $18k - \frac{77}{5}k^2 + 2 \cdot \frac{77}{5} - 50k = 0$,

整理得： $k^2 + \frac{160}{77}k + 2 = 0$,

由于 $\Delta < 0$,

故方程无解.

所以不存在实数, 使 $(k\vec{a}+2\vec{b}) \perp (\vec{a}-k\vec{b})$.

【解析】

（1）直接利用向量的数量积的应用求出结果.

（2）利用向量的共线求出 λ 的值.

（3）利用向量垂直的充要条件求出结果.

本题考查的知识要点：向量的数量积的应用，向量垂直和共线的充要条件的应用.

19.【答案】解：（1） $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$.

$\therefore f(x)$ 的最小正周期 $T = \pi$.

（2）当 $x \in [-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}]$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$.

$\therefore$ 当 $x = -\frac{\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$;

当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$;

【解析】

（1）利用二倍角公式化简 $f(x)$;

（2）当 $x \in [-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}]$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$. 即可求解.

本题主要考查了三角函数中的恒等变换应用，三角函数的周期性及其最值求法，属于基本知识的考查.

20.【答案】解：（Ⅰ）由 $f(a) = \ln \frac{a-2}{a+2} = 1$,

$$\text{即 } \frac{a-2}{a+2} = e,$$

$$\text{解得 } a = \frac{2+2e}{1-e};$$

（Ⅱ）函数 $f(x)$ 为奇函数.

$$\text{由 } \frac{x-2}{x+2} > 0, \text{ 解得 } x > 2 \text{ 或 } x < -2,$$

故函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$,
关于原点对称,

$$\text{而 } f(-x) = \ln \frac{-x-2}{-x+2} = \ln \frac{x+2}{x-2} = -\ln \frac{x-2}{x+2} = -f(x),$$

故函数是奇函数;

（Ⅲ）1 个.

【解析】

（Ⅰ）由 $f(a)=1$, 结合对数的定义, 解方程可得 a 的值;

（Ⅱ）函数 $f(x)$ 为奇函数. 运用函数的奇偶性的定义, 结合对数的运算性质可得;

（Ⅲ）结合 $f(x)$ 的图象和 $y=\sin x+2$ 的图象, 可得根的个数.

本题考查函数的奇偶性和方程的根的个数, 考查运算能力, 属于中档题.

21.【答案】解：（1） $\angle QBC = \alpha$, 如图所示,
在直角三角形 BQE 中,

$$BE = 150 \cos \alpha, \quad QE = 150 \sin \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2},$$

可得矩形 $PQMN$ 的 $PQ = 400 - 300 \sin \alpha$, $QM = 400 - 300 \cos \alpha$,
则 $S = PQ \cdot QM = (400 - 300 \sin \alpha)(400 - 300 \cos \alpha)$

$$= 10000(4 - 3 \sin \alpha)(4 - 3 \cos \alpha), \quad \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}];$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } S = 10000[16 - 12(\sin \alpha + \cos \alpha) + 9 \sin \alpha \cos \alpha],$$

$$\text{设 } t = \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}), \text{ 则 } \frac{\pi}{4} \leq \alpha + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4},$$

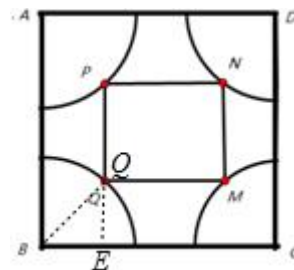
$$\text{可得 } 1 < t \leq \sqrt{2}, \quad \sin \alpha \cos \alpha = \frac{t^2 - 1}{2},$$

$$\text{可得 } S = 10000[16 - 12t + \frac{9}{2}(t^2 - 1)]$$

$$= 5000[9(t - \frac{4}{3})^2 + 7],$$

当 $t = \frac{4}{3} \in [1, \sqrt{2}]$, S 取得最小值 $5000 \times 7 = 35000 m^2$.

【解析】



- (1)在直角三角形 BQE 中,求得 BE、QE, 写出矩形的长和宽, 计算面积即可;
- (2)利用换元法, 结合三角函数的恒等变换, 借助二次函数的最值求法, 求得最小值.

本题考查了矩形的面积计算问题, 也考查了三角函数的恒等变换和正弦函数的性质应用问题, 是中档题.

22. 【答案】解: (1) $x^2 - bx + b - 1 \geq 0$,

即 $(x-1)(x-b+1) \geq 0$,

当 $b=2$ 时, $x \in \mathbb{R}$; 当 $b > 2$ 时, $x \in (-\infty, 1] \cup [b-1, +\infty)$;

当 $b < 2$ 时, $x \in (-\infty, b-1] \cup [1, +\infty)$;

(2) 函数 $F(x) = |f(x) - \frac{1}{2}|$ 有两个不同的零点,

$f(x) \geq 0$, 即 $\frac{1}{2} \geq 0$ 不满足题意;

$f(x) \leq 0$ 可得 $y=2f(x)$ ($f(x) \leq 0$) 与 $y=-\frac{1}{2}$ 有两个交点, 可得

$2 \cdot \frac{4b-4-b^2}{4} < -\frac{1}{2}$, 解得 $b < 1$ 或 $b > 3$;

(3) 证明: 对于给定的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 且 $x_1 < x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$,

关于 x 的方程 $f(x) = \frac{1}{3}[f(x_1) + 2f(x_2)]$,

可设 $H(x) = f(x) - \frac{1}{3}[f(x_1) + 2f(x_2)]$,

$H(x_1)H(x_2) = \frac{2}{3}(f(x_1) - f(x_2)) \cdot \frac{1}{3}(f(x_2) - f(x_1))$

$= -\frac{2}{9}(f(x_1) - f(x_2))^2 < 0$,

且 $H(x)$ 在 (x_1, x_2) 单调,

可得关于 x 的方程 $f(x) = \frac{1}{3}[f(x_1) + 2f(x_2)]$ 在区间 (x_1, x_2) 内有且仅有一个实根.

【解析】

(1)因式分解对 b 讨论, 当 $b=2$ 时, $x \in \mathbb{R}$; 当 $b > 2$ 时, $x \in (-\infty, 1] \cup [b-1, +\infty)$; 当

$b < 2$ 时, $x \in (-\infty, b-1] \cup [1, +\infty)$;

(2) $f(x) \geq 0$ 不满足题意, 即 $y=2f(x)$ ($f(x) \leq 0$) 与 $y=-\frac{1}{2}$ 有两个零点, 所以 $b \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$;

(3)“关于 x 的方程 $f(x) = \frac{1}{3}[f(x_1) + 2f(x_2)]$ 在区间 (x_1, x_2) 内有且仅有一个实根”
转化为“ $H(x) = f(x) - \frac{1}{3}[f(x_1) + 2f(x_2)]$ 在区间 (x_1, x_2) 内有且仅有一个零点”,

运用函数零点存在定理即可得证.

本题考查二次不等式的解法, 注意运用分类讨论思想方法, 以及函数零点问题解法, 注意运用转化思想, 属于中档题.