如何突破解析几何解题能力瓶颈
——从一道2019年全国高中数学联赛问题谈起*

徐希来[1] 何忆捷[2,3]

(1. 上海市大同中学，上海 200011；2. 华东师范大学数学科学学院，上海 200241；
3. 上海市核心数学与实践重点实验室，上海 200241)

平面解析几何作为中学阶段几何与代数学习的融汇点，是高中数学的重要内容.学生从小学开始接受建立在直观经验基础上的几何教学，通过初中平面几何的系统学习，初步了解公理体系，发展逻辑推理与证明的技能，亦进一步提高视觉技能与几何直觉.在解决几何问题时，人们习惯于运用视觉技能把几何图形中的关键子结构区分出来[1]，从而建立起问题与几何知识储备之间的有效联系，促成问题解决.但在学习解析几何时，这种对视觉技能的依赖也许会造成负迁移.解析几何解决问题的基本精神是用代数手段解决几何问题.按照韬尔(D. Tall)等学者的观点，几何与代数属于两个不同的数学世界，几何概念是在感知、描述的基础上精准提炼成为适合演绎与证明的定义，代数概念则是一个不断"压缩(compressing)"、逐级抽象、符号化的过程性概念[1].这种差异，使代数方法在捕捉不同几何图形的共性特征及抽象出更一般规律上有其独特优势，从而也增强了解析几何解决问题的思想方法的普适性.

在历年全国高中数学联赛中，涌现出了较多具有新颖性和挑战性的解析几何问题，这些问题的解法与思想值得解题者与教学者进行挖掘，以获得有益的启发.在2019年全国高中数学联合竞赛中，有如下赛题.

问题 (2019年全国高中数学联合竞赛一试A卷第10题)在平面直角坐标系xOy中，圆Ω与抛物线Γ: $y^2=4x$恰有一个公共点，且圆Ω与x轴相切于Γ的焦点F.求圆Ω的半径.

赛后，笔者通过所指导的参赛选手初步了解到，该题完成情况差异较大，因此与多位选手进行了类似出声思维(think aloud)形式的解题思路再现的访谈，旨在了解选手临场的解法动机、思维过程，对解法进行归类、整理与补充.

解析几何是许多学生的学习瓶颈，平时解题中，学生常常面对自己列出的一堆代数式束手无策.已有的一些研究表明，学生存在的主要不足包括：代数式的运算能力弱、代数特征的观察识别力低、代数变形技能储备少、遇到多变量时无所适从、数与形之间未建立有效沟通、未形成代数观点看问题的自觉等[2-4].因此，笔者试图结合学生对上述联赛试题所反映出的各种解题思路，谈谈可以从哪些方面着手突破解析几何的学习瓶颈，提升运算能力，促成知识整合，提高代数抽象水平.

1 过硬功底、大智若愚

解法一：抛物线Γ的焦点为$F(1,0)$，由对称性，不妨设圆Ω位于x轴上方，可设

$$\Omega:(x-1)^2+(y-r)^2=r^2, \quad \cdots\cdots ①$$

其中$r>0$为圆Ω的半径.将$x=\dfrac{y^2}{4}$代入①，化简得

$$y^4+8y^2-32ry+16=0, \quad \cdots\cdots ②$$

这里显然$y>0$.

由题意，并注意②中y^3的系数为零，②可因式分解为$(y^2-2ay+a^2)(y^2+2ay+n)=0$,

* 本文是上海市核心数学与实践重点实验室课题"数学实践"(项目编号18dz2271000)的研究成果之一.

即

$$y^4+(n-3a^2)y^2+2a(a^2-n)y+na^2=0. \quad \cdots\cdots ③$$

比较②与③的系数可得

$$\begin{cases} n-3a^2=8, \\ 2a(a^2-n)=-32r, \\ na^2=16. \end{cases}$$

将 $n=3a^2+8$ 代入 $na^2=16$,化简得

$$3a^4+8a^2-16=0.$$

解得 $a^2=\frac{4}{3}$, $a^2=-4$(舍). 相应地有 $n=12$. 由于 $y>0$,取 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,这样②可因式分解为

$$\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\left(y^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}y+12\right)=0,$$

该方程的实根仅有 $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$(此时圆 Ω 与抛物线 Γ 有唯一公共点 $P\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$). 相应地,圆 Ω 的半径 $r=\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

解法二:类似解法一,得到②,将其代数变形为

$$r=\frac{1}{32}\left(y^3+8y+\frac{16}{y}\right). \quad \cdots\cdots ④$$

研究函数 $f(y)=\frac{1}{32}\left(y^3+8y+\frac{16}{y}\right)$ $(y>0)$ 的性质. 对 $f(y)$ 求导可知

$$f'(y)=\frac{1}{32}\left(3y^2+8-\frac{16}{y^2}\right)=\frac{3\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(y+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)(y^2+4)}{32y^2},$$

故可列表如下:

y	$y\to0^+$	$\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$	$y\to+\infty$
$f'(y)$		$-$	0	$+$	
$f(y)$	$f(y)\to+\infty$	↘	极小值 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$	↗	$f(y)\to+\infty$

由表中 $f(y)$ 的性质可知,④有唯一解当且仅当 $r=\frac{4\sqrt{3}}{9}$,故所求圆 Ω 的半径为 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

解法三:对解法二中的函数 $f(y)$ 亦可按如下方式进行研究:

由平均值不等式得

$$f(y)=\frac{(y^2+4)^2}{32y}=\frac{\left(y^2+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\right)^2}{32y}\geqslant\frac{\left(4\sqrt[4]{y^2\frac{64}{27}}\right)^2}{32y}=\frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

当且仅当 $y^2=\frac{4}{3}$,即 $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时,$f(y)$ 取到最小值 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$. 又因为 $f(y)$ 随 y 连续变化,且 $y\to0^+$ 及 $y\to+\infty$ 时 $f(y)$ 均可任意大,故当 $r>\frac{4\sqrt{3}}{9}$ 时,④在 $\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 及 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上均有解,与解的唯一性矛盾. 从而仅有 $r=\frac{4\sqrt{3}}{9}$ 满足条件.

在面对关于 y 的四次方程②时,不少学生感到无从下手. 然而采用解法一的学生并未被困住,从其再现的思考过程看,他首先考虑任意圆与抛物线公共点个数的情况及相应的四次方程根的情况,再由两个交点过渡到题目所要求的一个公共点(切点)的情况,从而判断出,关于 y 四次式可以分解为一个判别式为零的二次式与一个判别式为负的二次式之积(当然他并未对此判断作出严格的论证). 进而该学生采取待定系数方法,达成对这样一个复杂四次式的因式分解. 整个过程中,该学生并未盲目蛮干,而是展现了出色的以形助数技能、代数式运算的基本功及因式分解的技巧. 采用解法二、三的两位学生不约而同运用了分离变量的思想. 前一学生利用导数研究函数的单调性与极值,展现了较强的运用函数思想研究问题的意识,在导数运算与应用上也有着扎实的

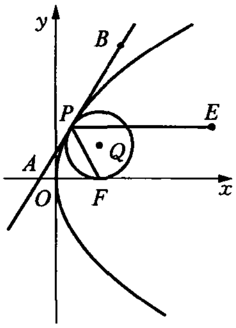
基本功. 后一学生则观察出④的代数特征,施以拆项的技巧,从而凑成使用平均值不等式后的定值,展现了敏锐的观察力与灵活的代数变形技能.

有勇气用代数手段将研究进行到底的学生,往往底气在于过硬的代数功底. 相较于几何中添辅助线、变换这类创造性思维的难点,代数方法解决问题时抽象的运算技巧同样是难点. 解析几何的学习想要行得稳、走得远,平时的教学中要重视代数运算基本功与代数变形技能的培养,关注学生对代数特征的观察意识和敏锐度的提高.

2　平几助力、事半功倍

解法四: 设圆 Ω 与抛物线 Γ 的唯一公共点为 P,点 P 处 Γ 的切线 AB 与 x 轴交于点 A.

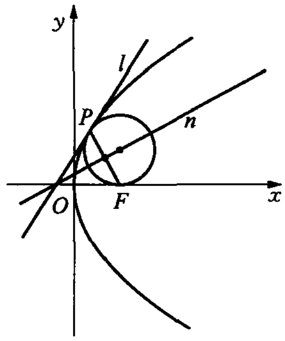
由抛物线的光学性质可知,由焦点 F 射向点 P 的入射光线经由抛物线表面反射后,反射光线 PE 平行于抛物线的对称轴(即 x 轴). 又根据光的反射原理,入射光线 FP、反射光线 PE 与点 P 处的镜面 AB 所成角相等. 于是 $\angle APF=\angle BPE=\angle PAF$. 经过点 A 的圆 Ω 的两条切线分别为 AF、AP,故 $AF=AP$,所以 $\angle APF=\angle AFP$,可得 $\triangle APF$ 为正三角形.



由对称性,不妨设圆 Ω 在 x 轴上方,则直线 PF 的斜率为$-\sqrt{3}$. 联立方程组

$$\begin{cases} l_{PF}: y=-\sqrt{3}(x-1), \\ \Gamma: y^2=4x. \end{cases}$$

注意 P 在 x 轴上方,可解得 P 点坐标为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,利用抛物线定义知 $PF=\frac{1}{3}-(-1)=\frac{4}{3}$,而在等腰 $\triangle QPF$ 中,底角 $\angle QFP=\frac{\pi}{6}$,故圆 Ω 的半径 $QF=\frac{4\sqrt{3}}{9}$. 经检验此时圆 Ω 满足条件.



解法五: 设圆 Ω 与抛物线 $\Gamma: y^2=4x$ 的唯一公共点为 $P(t^2, 2t)$,又由条件易知 $F(1,0)$. 考虑圆 Ω 的弦 PF 的垂直平分线 n,其点法向式方程为

$$n: (t^2-1)\left(x-\frac{t^2+1}{2}\right)+2t(y-t)=0.$$

抛物线 $\Gamma: y^2=4x$ 在点 P 处的切线 l 的方程为 $2ty=2(x+t^2)$,即

$$l: x-ty+t^2=0.$$

由于圆 Ω 的切线 l、x 轴、切点弦的垂直平分线 n 三线共点,所以 l 与 n 在 x 轴上的截距相等. 由此易得 $\frac{2t^2}{t^2-1}+\frac{t^2+1}{2}=-t^2$,化简得 $(3t^2-1)(t^2+1)=0$,故 $t^2=\frac{1}{3}$.

由对称性,不妨设圆 Ω 在 x 轴上方,则 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$,可得 $n: x-\sqrt{3}y+\frac{1}{3}=0$. 直线 n 与 $x=1$ 的交点 $\left(1, \frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$ 即为 Ω 的圆心,故 $r=\frac{4\sqrt{3}}{9}$. 检验略.

在解析几何中,代数与几何联系紧密. 我们能从曲线方程的代数形式中一窥诸如对称、范围、变化趋势等种种几何特征,这些特征有些已上升为定义、性质、定理,例如圆锥曲线的定义、光学性质等. 从某种意义上说,如果完备

的代数体系提供的是一个连通的铁路网,那么适当利用几何性质就像坐上了直达列车,使我们到达目的地更为迅捷. 作为高中学生,他们尽管未必能说清楚为什么圆与抛物线在 P 点处的切线重合,也很容易忘记检验(或论证)所求得的圆与抛物线的确没有其他公共点,但在几何直观的帮助下,他们可以迅速作出数学上的正确推断. 采用解法四的学生巧妙运用抛物线的光学性质与圆的切线性质迅速锁定了切点 P 的位置;采用解法五的学生由于恰当地运用了几何性质,转化为仅求直线的交点,运算量得以显著降低. 以形助数,形可以帮助对抽象的代数的理解;以数释形,使用代数方法不仅可以解释几何性质,还能从不同的几何呈现方式中提炼压缩出共性本质. 因此,解析几何的解题应用想要开阔思路、左右逢源,平时教学中要有意识建立起代数与几何的通畅联系,重视数学单元教学设计的整体思考,避免数学知识的生硬割裂与堆砌.

3 拓宽视野、回归代数

解法六: 由对称性,不妨设圆 Ω 在 x 轴上方,Ω: $(x-1)^2+(y-r)^2=r^2$, $r>0$. 设圆 Ω 与抛物线 Γ 的唯一公共点为 $P(t^2, 2t)$ $(t>0)$.

抛物线 Γ: $y^2=4x$ 在点 P 处的切线 l 的方程为 $2ty=2(x+t^2)$,即

$$l: x-ty+t^2=0.$$

圆 Ω: $(x-1)^2+y^2-2ry=0$ 在点 P 处的切线 m 的方程为 $(t^2-1)(x-1)+2ty-r(y+2t)=0$,即

$$m: (t^2-1)x+(2t-r)y-(t^2+2rt-1)=0.$$

由 l 与 m 重合知

$$\frac{t^2-1}{1}=\frac{2t-r}{-t}=\frac{-(t^2+2rt-1)}{t^2}.$$

由 $\frac{t^2-1}{1}=\frac{2t-r}{-t}$ 得 $r=t^3+t$,又由 $\frac{t^2-1}{1}=\frac{-(t^2+2rt-1)}{t^2}$ 得 $r=\frac{1-t^4}{2t}$. 消去 r 并整理得 $(3t^2-1)(t^2+1)=0$. 故 $t^2=\frac{1}{3}$, $r=\frac{4\sqrt{3}}{9}$. 检验略.

解法七: 设圆 Ω 与抛物线 Γ: $y^2=4x$ 的唯一公共点为 $P(t^2, 2t)$,则抛物线 Γ 在点 P 处的切线 l 的方程为 $2ty=2(x+t^2)$,即 $x-ty+t^2=0$. 从而可设与 l 切于点 P 的圆系方程为

$$\lambda(x-ty+t^2)+[(x-t^2)^2+(y-2t)^2]=0,$$

将其化为圆的标准方程,得

$$\left(x+\frac{\lambda}{2}-t^2\right)^2+\left(y-\frac{\lambda t}{2}-2t\right)^2=\left(\frac{\lambda}{2}-t^2\right)^2+\left(\frac{\lambda t}{2}+2t\right)^2-\lambda t^2-t^4-4t^2. \quad ⑤$$

考虑该圆系中与 x 轴相切于点 $F(1, 0)$ 的圆(即为题中的圆 Ω),要求

$$\begin{cases} t^2-\frac{\lambda}{2}=1, \\ \left(\frac{\lambda t}{2}+2t\right)^2=\left(\frac{\lambda}{2}-t^2\right)^2+\left(\frac{\lambda t}{2}+2t\right)^2- \\ \qquad \lambda t^2-t^4-4t^2, \end{cases}$$

其中后一式可化简为 $\lambda^2-8\lambda t^2-16t^2=0$. 因此可将 λ 消去,并整理得 $(3t^2-1)(t^2+1)=0$. 解得 $t^2=\frac{1}{3}$, $\lambda=-\frac{4}{3}$,代入方程⑤,可知圆 Ω 的半径为 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$. 检验略.

据了解,采用解法六、七的学生在平时学习中已掌握了圆锥曲线的切线、切点弦、极线等知识,故他们在代数视角下看问题时,思路更为宽广. 例如采用解法七的学生在构造圆系解决问题时,并不为复杂的代数式所迷惑,而是很清楚方程的代数结构与所表示的曲线的关系. 想要拨开解析几何繁杂运算的迷雾,平时教学中应引导学生进行问题推广、深入探究、归纳提炼,从而提升理论水平,促进形成敏锐的代数特征观察力,使其不被繁杂、多变量等因素干扰. 当然,也应使学生体验并逐步掌握合理建系、引参、消元、变形、化简、设而不求等策略,以及灵活多样的转化命题的技巧. 高中阶段打下坚实的代数基础,并适当地拓宽视野,有利于学生在后续代数学习中,达到概念

(下转第 46 页)

2. 具体项目、方法和实践的设计及实施过程的研究,如面向小学数学教师在职教育和教师专业发展的视频剪辑和 IT 技术的运用;

3. 小学数学教师在职教育和教师专业发展中的具体项目、方法和实践有效性的制度研究;

4. 影响小学数学教师在职教育和教师专业发展的系统和社会文化因素的比较和制度研究;

5. 小学数学教师在职教育和教师专业发展的研究与实践之间可能的相关或非相关问题.

专题研究小组 31: 中学数学教师的在职教育和教师专业发展

主 席: Konrad Krainer (Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Austria)

联合主席: Betina Duarte (Universidad Pedagógica Nacional, Argentina)

中国联络人: 黄友初(上海师范大学)

本组焦点是以大规模促进中学数学教学为初衷的在职教育和专业发展研究. 扩大规模意味着达到较大的班级数(多于 10 个),并且可能是整个学校、地区、城市,甚至是一个州或国家的规模. 本组欢迎诸如在职课程,专业发展项目,学校发展工程,实践者和研究者的协作网络之类的所有相关研究项目. 可能的研究问题有: 如何扩大专业发展项目的规模? 要使一个项目适应到新的文化环境中,需要考虑哪些因素? 哪些方面的干预可以扩大,哪些不可以? 如何评估大规模方法带来的影响? 适用于学生数学学习的诊断类型是什么,为什么? 研究与实践之间的合作可在系统层面上达到多大程度的稳定? 需要哪些关键因素来保持这种合作? 合作过程中又将面临哪些挑战?

本组邀请大会参与者提交论文,希望每一篇提交的论文都应尽可能突出以下条件:

• 研究初衷(尤其是与“促进教学”、“扩大规模”、“持续性”等相关)

• 背景和设计(文化的,制度的……)

• 关键人物,他们的角色和合作

• 研究问题和理论框架

• 方法论,数据分析,局限性

• 对研究问题的回答且使研究初衷得以升华

• 研究实施中出现的挑战,处理这些挑战所用的方法(尤其是与“促进教学”、“扩大规模”、“持续性”等相关)

• 为发展研究初衷和其他目的(如: 需要采取什么措施来促进数学教学使其成功地适应一个不同的文化背景?)而进行的课程学习(与实践和研究相关)

(供稿人: 陆 珺 汪家录)

(上接第 31 页)

的进一步抽象压缩,为掌握更普适的规律,发展更高阶的代数抽象思维做好准备.

参考文献

[1] 鲍建生,周超. 数学学习的心理基础与过程[M]. 上海: 上海教育出版社,2009: 294 - 295,312.

[2] 单墫. 解析几何的技巧[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社,2009: 189 - 190.

[3] 朱华伟,钱展望. 数学解题策略[M]. 北京: 科学出版社,2009: 187,194 - 195.

[4] 柳金凤. 浅析高中数学平面解析几何的教学现状及对策[J]. 数学学习与研究,2019(14): 32.

[5] 郑显辉. 解析几何问题常见的突破策略[J]. 中学数学,2019(9): 53 - 54.

[6] 杨文武. 减少解析几何运算量的五种途径[J]. 中学数学月刊,2019(5): 62 - 64.

[7] 刘初喜. 圆锥曲线系方程的应用[J]. 数学教学,2016(11): 32 - 34.

[8] 毛建钢. 例谈解析几何中曲线系方法的代数思维方式[J]. 上海中学数学,2019(5): 22-23+31.