

江苏省仪征中学 2018-2019 学年第一学期高三数学

周三练习 (6) 文科

2018. 10. 17

范围: 集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、直线与圆、圆锥曲线、不等式、立体几何

一. 填空题: 本大题共 14 小题, 每小题 5 分, 计 70 分. 不需写出解答过程, 请把答案写在答题纸的指定位置上.

1. 已知集合 $A = \{-2, 0, 1, 3\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

2. 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 则 " $a = 1$ " 是直线 $ax + y - 1 = 0$ 与直线 $x + ay + 1 = 0$ 平行的_____条件.

(从“充分不必要”“必要不充分”“充分必要”“既不充分也不必要”中选择一个)

3. 函数 $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 图像两对称轴的距离为_____.

4. 设复数 z 满足 $\frac{3+4i}{z} = 5i$, 则 $|z| =$ _____.

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 左焦点与抛物线 $y^2 = -12x$ 的焦点重合, 则双曲线的右准线方程为_____.

6. 已知正四棱锥的底面边长为 2, 侧棱长为 6, 则正四棱锥的体积为_____.

7. 已知锐角 θ 满足 $\tan \theta = \sqrt{6} \cos \theta$, 则 $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} =$ _____.

8. 已知函数 $f(x) = x^2 - kx + 4$ 对任意的 $x \in [1, 3]$, 不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则实数 k 的最大值为_____.

9. 函数 $y = \cos x - x \tan x$ 的定义域为 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, 其值域为_____.

10. 已知圆 C 与圆 $x^2 + y^2 + 10x + 10y = 0$ 相切于原点, 且过点 $A(0, -6)$, 则圆 C 的标准方程为_____.

11. 已知点 $P(1, 0)$, 直线 $l: y = x + t$ 与函数 $y = x^2$ 的图像相交于 A, B 两点, 当 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 最小时, 直线 l 的方程为_____.

12. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点为 F_1, F_2 , 过 F_2 作 x 轴的垂线与 C 相交于 A, B 两

点, F_1B 与 y 轴相交于点 D , 若 $AD \perp F_1B$, 则椭圆 C 的离心率等于_____.

13. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, $a + b = 4$, 则 $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1}$ 的最大值为_____.

14. 已知 k 为常数, 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-1}, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = kx + 2$ 有且只有 4 个不同的解,

则实数 k 的取值集合为_____.

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. (本小题满分 14 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $b \cos A + a \cos B = -2c \cos C$ ．

(1) 求 C 的大小；

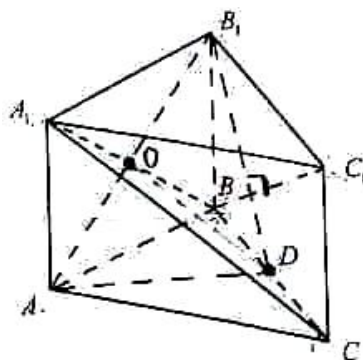
(2) 若 $b = 2a$ ，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$ ，求 c ．

16. (本小题满分 14 分)

如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， D 为 BC 中点， $AB = AC$ ， $BC_1 \perp B_1D$

求证：(1) $A_1C \parallel$ 平面 ADB_1

(2) 平面 $A_1BC_1 \perp ADB_1$

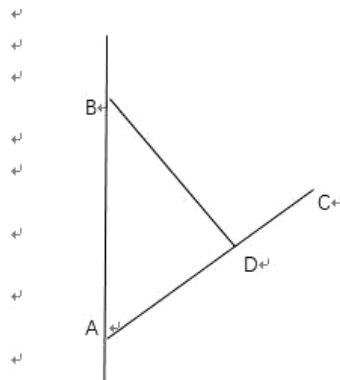


17. (本小题满分 14 分)

如图,准备在墙上钉一个支架,支架由两直杆 AC 与 BD 焊接而成,焊接点 D 把杆 AC 分成 AD, CD 两段,其中两固定点 A, B 间距离为 1 米, AB 与杆 AC 的夹角为 60° ,杆 AC 长为 1 米,若制作 AD 段的成本为 a 元/米,制作 CD 段的成本是 $2a$ 元/米,制作杆 BD 成本是 $4a$ 元/米. 设 $\angle ADB = \alpha$, 则制作整个支架的总成本记为 S 元.

(1) 求 S 关于 α 的函数表达式,并求出 α 的取值范围;

(2) 问 AD 段多长时, S 最小?



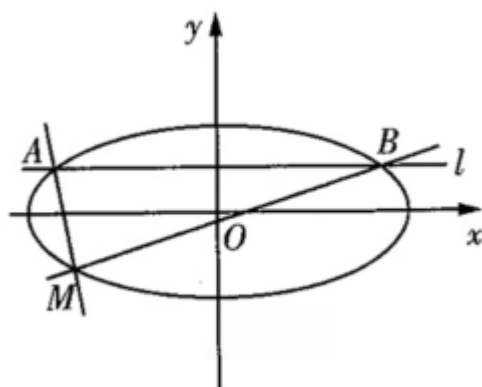
18. (本小题满分 16 分)

如图,在平面直角坐标系 xOy 中,已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 左焦点 $F(-2, 0)$, 直线 $l: y = t$ 与椭圆交于 A, B 两点, M 为椭圆上异于 A, B 的点.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 若 $M(-\sqrt{6}, -1)$, 以 AB 为直径的圆 P 过 M 点, 求圆 P 的标准方程;

(3) 设直线 MA, MB 与 y 轴分别交于 C, D , 证明: $OC \cdot OD$ 为定值.



19. (本小题满分 16 分)

已知 $b > 0$, 且 $b \neq 1$, 函数 $f(x) = e^x + b^{-x}$, 其中 e 为自然对数的底数:

(1) 如果函数 $f(x)$ 为偶函数, 求实数 b 的值, 并求此时函数的最小值;

(2) 对满足 $b > 0$, 且 $b \neq 1$ 的任意实数 b , 证明函数 $y = f(x)$ 的图像经过唯一定点;

(3) 如果关于 x 的方程 $f(x) = 2$ 有且只有一个解, 求实数 b 的取值范围.

20. 设函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} - a \ln x (a \in R)$.

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(II) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 记过点 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ 的直线斜率为 k . 问: 是否存在 a , 使得 $k = 2 - a$? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 请说明理由.

周三练习(6)理科参考答案

一、填空题

1. $\{0,1\}$ 2. 充要 3. $\frac{\pi}{2}$ 4. 1 5. $x = \frac{8}{3}$
6. $\frac{8}{3}$ 7. $3+2\sqrt{2}$ 8. 4 9. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}, 1\right]$ 10. $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 18$
11. $y = x + \frac{1}{2}$ 12. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 13. $\frac{2+\sqrt{5}}{4}$ 14. $\left\{\frac{1}{e^3}\right\} \cup (-e, -1)$

二、解答题

15. 解: (1) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 且 $b \cos A + a \cos B = -2c \cos C$ 得:2分

$\sin B \cos A + \sin A \cos B = -2 \sin C \cos C$, 所以 $\sin(B+A) = -2 \sin C \cos C$3分

又 A, B, C 为三角形内角, 所以 $B+A = \pi - C$, 所以 $\sin C = -2 \sin C \cos C$4分

因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $\sin C > 0$5分

所以 $\cos C = -\frac{1}{2}$,6分 所以 $C = \frac{2}{3}\pi$7分

(2) 因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 所以 $\frac{1}{2}ab \sin C = 2\sqrt{3}$, 所以 $ab = \frac{4\sqrt{3}}{\sin C}$8分

由 (1) 知 $C = \frac{2}{3}\pi$, 所以 $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $ab = 8$9分

又因为 $b = 2a$, 解得 $a = 2$, $b = 4$,11分

所以 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 28$,13分

所以 $c = 2\sqrt{7}$14分

16. 证明: (1) 设 $A_1C \cap AB_1 = E$, 连接 DE .

因为 $ABC - A_1B_1C_1$ 为直三棱柱,

所以 AA_1B_1B 为矩形, 所以 E 为 AB 中点.

……1 分

又因为 D 为 BC 中点, 所以 DE 为 $\triangle BA_1C$ 中位线,

……2 分

所以 $DE \parallel A_1C$ 且 $DE = \frac{1}{2}A_1C$.

……3 分

因为 $A_1C \not\subset$ 面 ADB_1 , $DE \subset$ 面 ADB_1 ,

……5 分

所以 $A_1C \parallel$ 平面 ADB_1 .

……7 分

(2) 因为 $AB = AC$, D 为 BC 中点, 所以 $AD \perp BC$.

……8 分

又因为 $ABC - A_1B_1C_1$ 为直三棱柱, 所以 $BB_1 \perp$ 面 ABC .

因为 $AD \subset$ 面 ABC , 所以 $BB_1 \perp AD$.

……9 分

因为 $BC \subset$ 面 BCC_1B_1 , $BB_1 \subset$ 面 BCC_1B_1 , $BC \cap BB_1 = B$, 所以 $AD \perp$ 面 BCC_1B_1 .

……10 分

又 $BC_1 \subset$ 面 BCC_1B_1 , 所以 $AD \perp BC_1$.

……11 分

因为 $BC_1 \perp B_1D$, $AD \subset$ 面 ADB_1 , $B_1D \subset$ 面 ADB_1 , $AD \cap B_1D = D$, 所以 $BC_1 \perp$ 面 ADB_1 .

……13 分

因为 $BC_1 \subset$ 面 A_1BC_1 , 所以平面 $A_1BC_1 \perp$ 平面 ADB_1 .

……14 分

17. 解: (1) 在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{BD}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{AD}{\sin(\frac{2\pi}{3} - \alpha)}$,

……1 分

所以 $BD = \frac{\sqrt{3}}{2\sin \alpha}$, $AD = \frac{\sqrt{3}\cos \alpha}{2\sin \alpha} + \frac{1}{2}$,

……3 分

$$\begin{aligned} \text{则 } S &= a\left(\frac{\sqrt{3}\cos\alpha}{2\sin\alpha} + \frac{1}{2}\right) + 2a\left[1 - \left(\frac{\sqrt{3}\cos\alpha}{2\sin\alpha} + \frac{1}{2}\right)\right] + 4a\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha}\right) \\ &= a\left(\frac{4\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos\alpha}{2\sin\alpha} + \frac{3}{2}\right), \end{aligned} \quad \cdots\cdots 6 \text{ 分}$$

$$\text{由题意 } \alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right). \quad \cdots\cdots 7 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 令 } S' = \sqrt{3}a \cdot \frac{1 - 4\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0, \text{ 设 } \cos\alpha_0 = \frac{1}{4}. \quad \cdots\cdots 9 \text{ 分}$$

α	$\left(\frac{\pi}{3}, \alpha_0\right)$	α_0	$\left(\alpha_0, \frac{2\pi}{3}\right)$
$\cos\alpha$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{4}$	$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$
S'	< 0	0	> 0
S	单调递减	极小	单调递增

$\cdots\cdots 11 \text{ 分}$

所以当 $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ 时, S 最小,

$$\text{此时 } \sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad AD = \frac{\sqrt{3}\cos\alpha}{2\sin\alpha} + \frac{1}{2} = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}. \quad \cdots\cdots 12 \text{ 分}$$

答: (1) S 关于 α 的函数表达式为 $S = a\left(\frac{4\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos\alpha}{2\sin\alpha} + \frac{3}{2}\right)$, 且 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$;

$$(2) \text{ 当 } AD = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \text{ 时 } S \text{ 最小}. \quad \cdots\cdots 14 \text{ 分}$$

$$18. \text{ 解: (1) 因为 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 且 } c = 2, \text{ 所以 } a = 2\sqrt{2}, \quad b = 2. \quad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以椭圆方程为 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1. \quad \cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 设 } A(s, t), \text{ 则 } B(-s, t), \text{ 且 } s^2 + 2t^2 = 8. \quad \text{①}$$

$$\text{因为以 } AB \text{ 为直径的圆 } P \text{ 过 } M \text{ 点, 所以 } MA \perp MB, \text{ 所以 } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0, \quad \cdots\cdots 5 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \overrightarrow{MA} = (s + \sqrt{6}, t + 1), \quad \overrightarrow{MB} = (-s + \sqrt{6}, t + 1), \text{ 所以 } 6 - s^2 + (t + 1)^2 = 0. \quad \text{②} \quad \cdots\cdots 6 \text{ 分}$$

$$\text{由①②解得: } t = \frac{1}{3}, \text{ 或 } t = -1 \text{ (舍)}, \text{ 所以 } s^2 = \frac{70}{9}. \quad \cdots\cdots 7 \text{ 分}$$

$$\text{又圆 } P \text{ 的圆心为 } AB \text{ 的中点 } (0, t), \text{ 半径为 } \frac{AB}{2} = |s|, \quad \cdots\cdots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以圆 } P \text{ 的标准方程为 } x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{70}{9}. \quad \cdots\cdots 9 \text{ 分}$$

$$(3) \text{ 设 } M(x_0, y_0), \text{ 则 } l_{MA} \text{ 的方程为 } y - y_0 = \frac{t - y_0}{s - x_0}(x - x_0), \text{ 若 } k \text{ 不存在, 显然不符合条件.}$$

$$\text{令 } x=0 \text{ 得 } y_C = \frac{-tx_0 + sy_0}{s - x_0}; \text{ 同理 } y_D = \frac{-tx_0 - sy_0}{-s - x_0}, \quad \cdots \cdots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } OC \cdot OD = |y_C \cdot y_D| = \left| \frac{-tx_0 + sy_0}{s - x_0} \cdot \frac{-tx_0 - sy_0}{-s - x_0} \right| = \left| \frac{t^2 x_0^2 - s^2 y_0^2}{x_0^2 - s^2} \right|. \quad \cdots \cdots 13 \text{ 分}$$

$$= \left| \frac{t^2 x_0^2 - s^2 y_0^2}{x_0^2 - s^2} \right| = \left| \frac{t^2 (8 - 2y_0^2) - (8 - 2t^2)y_0^2}{8 - 2y_0^2 - (8 - 2t^2)} \right| = \left| \frac{8t^2 - 8y_0^2}{2t^2 - 2y_0^2} \right| = 4 \text{ 为定值}. \quad \cdots \cdots 16 \text{ 分}$$

$$19. \text{ 解: (1) 由 } f(1) = f(-1) \text{ 得: } e + b = \frac{1}{e} + \frac{1}{b}, \text{ 解得 } b = -e \text{ (舍)}, \text{ 或 } b = \frac{1}{e}, \quad \cdots \cdots 1 \text{ 分}$$

$$\text{经检验 } f(x) = e^x + \frac{1}{e^x} \text{ 为偶函数, 所以 } b = \frac{1}{e}. \quad \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

$$\text{又 } f(x) = e^x + \frac{1}{e^x} \geq 2, \text{ 当且仅当 } x = 0 \text{ 时取等号}, \quad \cdots \cdots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 的最小值为 } 2. \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 假设 } y = f(x) \text{ 过定点 } (x_0, y_0), \text{ 则 } y_0 = e^{x_0} + b^{x_0} \text{ 对任意足 } b > 0, \text{ 且 } b \neq 1 \text{ 恒成立}. \quad \cdots \cdots 5 \text{ 分}$$

$$\text{令 } b = 2 \text{ 得: } y_0 = e^{x_0} + 2^{x_0}; \text{ 令 } b = 3 \text{ 得: } y_0 = e^{x_0} + 3^{x_0}, \quad \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } 2^{x_0} = 3^{x_0}, \left(\frac{3}{2}\right)^{x_0} = 1, \text{ 解得唯一解 } x_0 = 0, \text{ 所以 } y_0 = 2, \quad \cdots \cdots 7 \text{ 分}$$

$$\text{经检验当 } x = 0 \text{ 时, } f(0) = 2, \text{ 所以函数 } y = f(x) \text{ 的图象经过唯一定点 } (0, 2). \quad \cdots \cdots 8 \text{ 分}$$

$$(3) \text{ 令 } g(x) = f(x) - 2 = e^x + b^x - 2 \text{ 为 } \mathbf{R} \text{ 上连续函数, 且 } g(0) = 0, \text{ 则方程 } g(x) = 0 \text{ 存在一个解}. \quad \cdots \cdots 9 \text{ 分}$$

$$1^\circ \text{ 当 } b > 1 \text{ 时, } g(x) \text{ 为增函数, 此时 } g(x) = 0 \text{ 只有一解}. \quad \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

$$2^\circ \text{ 当 } 0 < b < 1 \text{ 时, 令 } g'(x) = e^x + b^x \ln b = e^x \left(1 + \left(\frac{b}{e}\right)^x \ln b \right) = 0, \text{ 解得 } x_0 = \log_{\left(\frac{e}{b}\right)}(-\ln b). \quad \cdots \cdots 11 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } e^x > 0, 0 < \frac{b}{e} < 1, \ln b < 0, \text{ 令 } h(x) = \left(1 + \left(\frac{b}{e}\right)^x \ln b \right), h(x) \text{ 为增函数}.$$

$$\text{所以当 } x \in (-\infty, x_0) \text{ 时, } h(x) < 0, \text{ 所以 } g'(x) < 0, g(x) \text{ 为减函数};$$

$$\text{当 } x \in (x_0, +\infty) \text{ 时, } h(x) > 0, \text{ 所以 } g'(x) > 0, g(x) \text{ 为增函数}.$$

$$\text{所以 } g_{\text{极小}}(x) = g(x_0), \text{ 又 } g(x) \text{ 定义域为 } \mathbf{R}, \text{ 所以 } g_{\min}(x) = g(x_0). \quad \cdots \cdots 13 \text{ 分}$$

$$\text{①若 } x_0 > 0, g(x) \text{ 在 } (-\infty, x_0) \text{ 上为减函数, } g(x_0) < g(0) = 0, \text{ 而 } g(\ln 2) = 2 + b^{\ln 2} - 2 = b^{\ln 2} > 0.$$

$$\text{所以 } x \in (x_0, \ln 2) \text{ 时, } g(x) \text{ 至少存在另外一个零点, 矛盾!} \quad \cdots \cdots 14 \text{ 分}$$

$$\text{②若 } x_0 < 0, g(x) \text{ 在 } (x_0, +\infty) \text{ 上为增函数, } g(x_0) < g(0) = 0, \text{ 而 } g(\log_b 2) = e^{\log_b 2} + 2 - 2 = e^{\log_b 2} > 0, \text{ 所}$$

以 $g(x)$ 在 $(\log_b 2, x_0)$ 存在另外一个解, 矛盾!

……15 分

③当 $x_0 = \log_{\frac{1}{e}}(-\ln b) = 0$, 则 $-\ln b = 1$, 解得 $b = \frac{1}{e}$, 此时方程为 $g(x) = e^x + \frac{1}{e^x} - 2 = 0$,

由 (1) 得, 只有唯一解 $x_0 = 0$, 满足条件

综上, 当 $b > 1$, 或 $b = \frac{1}{e}$ 时, 方程 $f(x) = 2$ 有且只有一个解.

……16 分

20.解: 解: (I) $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{a}{x} = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2}$,

令 $g(x) = x^2 - ax + 1$, $\Delta = a^2 - 4$,

①当 $-2 \leq a \leq 2$ 时, $\Delta \leq 0$, $f'(x) \geq 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

②当 $a < -2$ 时, $\Delta > 0$, $g(x) = 0$ 的两根都小于零, 在 $(0, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

③当 $a > 2$ 时, $\Delta > 0$, $g(x) = 0$ 的两根为 $x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$, $x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$,

当 $0 < x < x_1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x_1 < x < x_2$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > x_2$ 时, $f'(x) > 0$; 故 $f(x)$ 分别在 $(0, x_1)$, $(x_2, +\infty)$ 上单调递增, 在 (x_1, x_2) 上单调递减.

(II) 由 (I) 知, $a > 2$. 因为 $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) + \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} - a(\ln x_1 - \ln x_2)$,

所以 $k = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 1 + \frac{1}{x_1 x_2} - a \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2}$,

又由 (I) 知, $x_1 x_2 = 1$. 于是 $k = 2 - a \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2}$,

若存在 a , 使得 $k = 2 - a$, 则 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = 1$, 即 $\ln x_1 - \ln x_2 = x_1 - x_2$, 亦即 $x_2 - \frac{1}{x_2} - 2 \ln x_2 = 0$ ($x_2 > 1$) (*)

再由 (I) 知, 函数 $h(t) = t - \frac{1}{t} - 2 \ln t$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

而 $x_2 > 1$, 所以 $x_2 - \frac{1}{x_2} - 2 \ln x_2 > 1 - 1 - 2 \ln 1 = 0$, 这与 (*) 式矛盾, 故不存在 a , 使得 $k = 2 - a$.