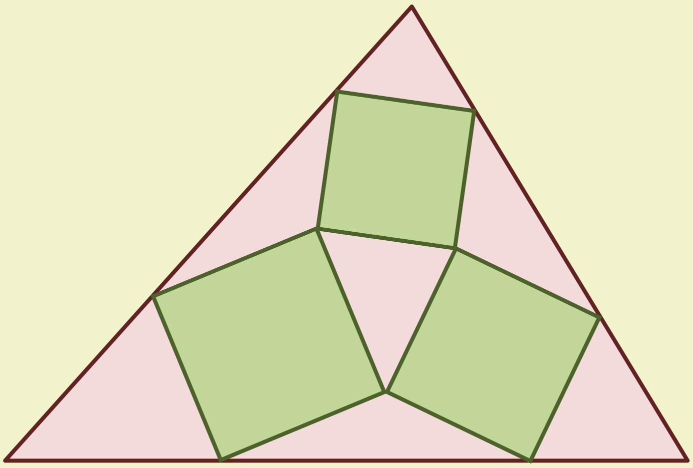
数学空间——人教数学网刊

高中数学

2011 年第 3 期



目录

数学评书

1.1 《智慧宝典》第五回 遭遇双头怪 智尊来收伏——陈海峰

话说小豪与小英两人从池潭一路走来，忽然狂风大作，两个遂觉迷失方向，还好两人赶紧手紧握在一起。只听一声大叫：“你们死定了！”

小豪怒喝：“来者为何方神圣，为何不敢出来露面！”

只听一声：“我乃双头怪是也，看好了！”只见出示两张面孔，“给你十分钟，如果不能把我认出来，今天就是你俩的祭日！”

（1）已知 $f(x)$ 是奇函数，则 $-f(x-1)=$______。

（2）已知 $f(x-1)$ 是奇函数，则 $-f(x-1)=$______。

小豪与小英暗道，太相似了，难怪说它自己是双头怪。他俩心中暗暗叫苦，商议一阵子后决定两人先各自对付一头，然后综合出击。

小豪想：不然我先想一招式来破解一下，师傅叮嘱过的，如果碰到这种情况就来个“特殊”代替“一般”。如果令 $f(x)=x$，这个肯定是奇函数，所以 $-f(x-1)=-(x-1)=-x+1$，所以答案 $-f(x-1)=-f(x)+1$。

这时小英也是这样想的。如果令 $f(x-1)=x$，则 $f(x)=x+1$，则 $-f(x-1)=-((x-1)+1)=-x=-f(x)+1$。

等到两人说出答案后，只听双头怪先是一愣，后来哈哈大笑，“受死吧，谁叫你们狂傲，那个池潭中竟然敢刻上你们的名字！”

忽听一声：“刀下留人！”只见一个缓缓腾云下来，那个双头怪一见，急忙要躲，“徒儿哪里躲”，那双头怪只好乖乖听话，两个这才知道，来的正是智尊道人，这个双头怪是他的坐骑，一不留神竟然跑到这边祸害，智尊道人说到，对付双头怪应该这样。

解析 （1）先看第一个头，首先你看到 $f(x)$ 是奇函数说明什么，我想你们应该是知道了吧，说明 $-f(?)=f(-?)$，问号可以代替数或者式子，那么 $-f(x-1)=f(-(x-1))=f(-x+1)$，刚刚你用特殊的招式也可以的，可是就是“收招”时犯了一个错误。小豪点头称是。

（2）再看第二个头，我们看到 $f(x-1)$ 是奇函数，这又说明什么呢。我们可这样来操作，令 $h(x)=f(x-1)$，根据奇函数的概念我们应有 $-h(?)=h(-?)$，同上述方法我们将之代入 $-f(x-1)=-h(x)=h(-x)=f(-x-1)$，小英同样在“收招”时错了。 □

“不过从你们的出招来看，路子是不错的哦，教出了这个好徒弟。”智尊道人说。两人说明来意，智尊道人说：“你们快去吧，祝你们成功！”说完骑上那头双头怪离去了。

欲知两人还会遭遇什么困难，且听下回分解。

1.2 《智慧宝典》第六回 避雨双龙洞 兄妹收小徒——陈海峰

话说小英与小豪他们制服了“双头怪”以后，马不停蹄地往函谷关进发，这时忽然风雨大作，气势逼人。两个兄妹感觉雨太大了，不避不行。说得也巧，他们自己找到一个洞，这个洞有点奇怪，洞是渐升渐高，在里面看一行小字，上书“双龙洞”。忽然有人哼哼哈哈大叫一声，是一怪人在洞内对他们迎头打来，小豪只好拿起奎星笔应敌。小英细看，此人功力深厚，应该是练武功走火入魔所致，便嘱咐小豪一起点了他的昏暗睡穴，只那个怪人睡将过去，小英逆运功给怪人疗伤，只觉两股真气此起彼伏，细分之下，原来是：

（1）函数 $y=f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$，则 $f(x)$ 的图象关于直线（ ）对称。

A. $y=0$ B. $x=0$ C. $y=1$ D. $x=1$

（2）函数 $y=f(1+x)$ 与 $y=f(1-x)$ 的图象关于直线（ ）对称。

A. $y=0$ B. $x=0$ C. $y=1$ D. $x=1$

小英分辨真切后，利用师傅所传心经，为他暂时疏通了两脉。

解 （1）根据定理 1：如果函数 $y=f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(b-x)$，则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称。也就是 $x=\dfrac{(a+x)+(b-x)}{2}$ 对称，故选 D。

（2）根据定理 2：函数 $y=f(a+x)$ 与 $y=f(b-x)$ 关于直线 $x=\dfrac{b-a}{2}$ 对称，也就是 $a+x=b-x$，故选 B。 □

打通两脉之后，怪人觉得无比舒爽，一定要拜二人为师傅，小英与小豪只好应允。怪人道：“师傅，现在我是暂时清楚了，可是有没有什么口诀让我以后遇到这种情况能自己独自化解呢？”

只听小英：**“这两股‘真气’其实是自对称与互对称问题。自对称发生在一个图象中，互对称在两个图象中，这与初中学过的轴对称图形与轴对称的概念类似的。**（1）是自对称问题；（2）是互对称问题。可这样来理解：

（1）根据图象的轴对称特征：如果一个函数有平行于 y 轴的对称轴，则存在两个不同的变量对应的函数值相等且对称轴在这两个变量的中点位置上，即有对称轴 $x=\dfrac{(a+x)+(b-x)}{2}$。

（2）因为 $y=f(1+x)$ 可看作是由 $y=f(x)$ 的图象向左平移一个单位得到的，$y=f(1-x)=f(-(x-1))$ 可以看作 $y=f(-x)$ 的图象向右平移一个单位得到的。而 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的图象本身关于 y 轴（即直线 $x=0$）对称，故 $y=f(1+x)$ 与 $y=f(1-x)$ 关于 $x=0$ 对称。”

怪人运功练习了一下，连呼妙、妙、妙。怪人问道，刚刚师傅用了两招，其实我并没参透，能不能传授于我？小豪说：“这个说来话长了。”怪人说：“愿闻其详”，小豪道：“既然徒弟如此好学，我就证明一下，传授给你。”

定理 1 的证明 设 $M(x,y)$ 是函数 $y=f(x)$ 上的任意一点，设 M 关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 的对称点为 $M'(x',y')$，则有 $x'=a+b-x, y'=y$，代入 $f(a+x)=f(b-x)$ 中可得 $f(x')=f(a+b-x)=f(a+(b-x))=f(b-(b-x))=f(x)=y=y'$，也就是说点 $M'(x',y')$ 也在 $y=f(x)$ 上，由点 $M(x,y)$ 的任意性知定理 1 成立。 □

定理 2 的证明 设 $M(x,y)$ 是函数 $y=f(a+x)$ 上的任意一点，设 M 关于直线 $x=\dfrac{b-a}{2}$ 的对称点为 $M'(x',y')$，则有 $x'=b-a-x$，$y'=y$。因为 $f(b-x')=f(b-(b-a-x))=f(a+x)=y=y'$，所以 $M'(x',y')$ 在函数 $y=f(b-x)$ 上。同理可证 $y=f(b-x)$ 上的任意一点也在函数 $y=f(a+x)$ 的图象上，所以定理 2 也成立。 □

怪人忙道谢，大喊师傅万岁，小英小豪相视而笑。由于收了这个徒弟，后来竟然救他俩们的命，这个后话。

欲知兄妹函谷关之行，请见下回。

助力高考

2.1 ab1962 解题集精选（三）——廖凡

本期的题目及解答是由历任版主 ab1962 的网上解题集的第 101 ∼ 200 题中精选出，仍然由 kuing 作选题、排版及评注，更多说明请参看第一期。

题目 2.1.1. 已知实数 a, b, c 满足 $a+b+c=5$，$a^2+b^2+c^2=9$。求证 a, b, c 的值都不小于 1 且不大于 $\dfrac{7}{3}$。

证明 由已知得 $a+b=5-c$，$a^2+b^2=9-c^2$，因为 $a^2+b^2\geq\dfrac{1}{2}(a+b)^2$，所以

$$9-c^2\geq\frac{1}{2}(5-c)^2，$$

解得 $1\leq c\leq\dfrac{7}{3}$，同理可证 $1\leq a\leq\dfrac{7}{3}$，$1\leq b\leq\dfrac{7}{3}$。 □

kuing 注：此题可作多元推广，解法类似，用柯西不等式去构造每个元的不等式从而解出范围。

题目 2.1.2. 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0)$，方程 $f(x)-x=0$ 的两个根 x_1, x_2 满足 $0<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$，当 $x\in(0,x_1)$ 时，证明：$x<f(x)<x_1$。

证明 $f(x)-x=0 \iff ax^2+(b-1)x+c=0$，由韦达定理有

$$x_1+x_2=-\frac{b-1}{a}，x_1x_2=\frac{c}{a}，$$

当 $0<x<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$，则有

$$f(x)-x=a(x-x_1)(x-x_2)>0，$$

以及

$$f(x)-x_1=f(x)-x+x-x_1=a(x-x_1)(x-x_2)+x-x_1=a(x-x_1)\left(x-x_2+\frac{1}{a}\right)<0，$$

即得 $x<f(x)<x_1$。 □

题目 2.1.3. 等差数列的前 n 项和记作 S_n，若两不相等的正整数 p, q 满足 $S_p=q$，$S_q=p$，求 S_{p+q}。

解 因为 $\left(p,\dfrac{S_p}{p}\right)$，$\left(q,\dfrac{S_q}{q}\right)$，$\left(p+q,\dfrac{S_{p+q}}{p+q}\right)$ 三点共线，故此依题意有

$$\begin{aligned}\frac{\dfrac{S_{p+q}}{p+q}-\dfrac{q}{p}}{p+q-p}=\frac{\dfrac{p}{q}-\dfrac{q}{p}}{q-p} &\implies \frac{\dfrac{S_{p+q}}{p+q}-\dfrac{q}{p}}{q}=\frac{-(q+p)}{pq}\\ &\implies \frac{S_{p+q}}{p+q}=\frac{q}{p}-\frac{q+p}{p}=-1,\end{aligned}$$

即得

$$S_{p+q}=-p-q。$$ □

kuing 注：原解答过程中并未解释第一步为什么那三点共线，这里解释一下，事实上，因 S_n 为等差数列的前 n 项和，则 S_n 总可以写成 An^2+Bn 的形式，于是 $\dfrac{S_n}{n}=An+B$ 为关于 n 的直线函数，所以上述的三点就在同一直线上。

题目 2.1.4. 已知 a,b,c 都不等于 0，且满足 $a+b\neq 0$，$a+b+c\neq 0$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$。求证：$ab+bc+ac<0$。

证明

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} &\iff (a+b+c)(bc+ac+ab)=abc\\ &\iff ((a+b)+c)(c(a+b)+ab)=abc\\ &\iff (a+b)^2c+(a+b)ab+c^2(a+b)=0\\ &\iff (a+b)(ac+bc+ab+c^2)=0,\end{aligned}$$

由 $a+b\neq 0$ 得 $ac+bc+ab+c^2=0$ 即 $ac+bc+ab=-c^2<0$。

注本题：没有 $a+b\neq 0$ 这一条件结论也成立，你们可试一试应怎么证。 □

kuing 注： 关于原解答后面的注释，那是显然的，事实上，由 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$ 可得 $(a+b)(b+c)(c+a)=0$，那么至少有两数互为相反数，由对称性不妨设 $c=-a$，则 $ab+bc+ac=-a^2<0$。

题目 2.1.5. 已知 a,b,c 为正实数，$a+b+c=1$，求证：$\dfrac{13}{27}\leq a^2+b^2+c^2+4abc<1$。

证明 由对称性不妨设 $a\geq b\geq c>0$，由 $a+b+c=1$ 得 $a+b\geq\dfrac{2}{3}$，$2c\leq\dfrac{2}{3}<1$，则

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2+4abc&<a^2+b^2+c^2+2ab\\&=(a+b+c)^2-2ac-2bc\\&<1;\end{aligned}$$

另一方面，设 $a+b=\dfrac{2}{3}+t$，$c=\dfrac{1}{3}-t$ 其中 $0\leq t<\dfrac{1}{3}$，则

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2+4abc&=(a+b+c)^2-2ac-2bc-2ab+4abc\\&=1-2c(a+b)-2ab(1-2c)\\&\geq 1-2c(a+b)-\frac{1}{2}(a+b)^2(1-2c)\\&=1-2\left(\frac{1}{3}-t\right)\left(\frac{2}{3}+t\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+t\right)^2\left(\frac{1}{3}+2t\right)\\&=\frac{13}{27}+t^2\left(\frac{5}{6}-t\right)\\&\geq\frac{13}{27}。\end{aligned}$$

综上所述，不等式成立。 □

kuing 注： 此解法通过“平均值代换”，放缩后化为一元的式子，是经典解法之一。然而，此类题型的较通用的方法是齐次化然后配方，证法将非常简洁并且很容易得到加强式，可作为不等式入门练习，大家不妨对上述不等式试一试去加强，当然，高手就不必理会了。

题目 2.1.6. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax\ (a>0)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是减函数，求 a 的取值范围。

解 求导知

$$f'(x)=\frac{2x}{2(\sqrt{x^2+1})}-a=\frac{x-a\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\leq 0$$

要对 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，于是需 $x-a\sqrt{x^2+1}\le 0$，即 $x^2\le a^2(x^2+1)$，因此要

$$a^2\ge\frac{x^2}{x^2+1}=1-\frac{1}{x^2+1}\in[0,1),$$

故由 a 为正数得其取值范围就是 $a\ge 1$。 □

kuing 注：本题也可以用定义法，未学导数的同学可以参考如下的证法：

解 任取 $x,y\in[0,+\infty)$ 且 $x<y$，则

$$\begin{aligned}f(x)-f(y)&=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}-a(x-y)\\&=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}-a(x-y)\\&=(x-y)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}-a\right),\end{aligned}$$

要在 $[0,+\infty)$ 上为减函数，则需

$$\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\le a$$

恒成立，又因

$$\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}<\frac{x+y}{\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}}=1$$

并且当 x,y 无穷大时左边趋向 1，可见 a 的取值范围就是 $[1,+\infty)$。 □

题目 2.1.7. 已知实数 a,b 满足 $a^3+b^3=2$，求证：$a+b\le 2$。

证明 用反证法，假设 $a+b>2$，则

$$\begin{aligned}a^3+b^3&=(a+b)(a^2+b^2-ab)\\&>2(a^2+b^2-ab)\\&\ge 2\left(\frac{(a+b)^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)\\&=\frac{(a+b)^2}{2}\\&>2,\end{aligned}$$

与 $a^3+b^3=2$ 矛盾，即原不等式得证。 □

kuing 注：直接证明也可以，若 $a+b<0$，则原不等式成立，若 $a+b\ge 0$，则由

$$4(a^3+b^3)-(a+b)^3=3(a+b)(a-b)^2\ge 0,$$

即得 $a+b\le 2$。

本题可作指数推广，一般地，若 $n\in\mathbb{N}^+$，实数 a,b 满足 $a^n+b^n=2$，则必有 $a+b\le 2$。

证明 若 n 为偶数，则由幂平均值不等式有

$$\frac{a^n+b^n}{2}=\frac{|a|^n+|b|^n}{2}\ge\left(\frac{|a|+|b|}{2}\right)^n\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^n,$$

即得 $a+b\le 2$；

若 n 为奇数，当 a,b 都为非负数时仿上可知显然成立，而此时不可能 a,b 都为负数，因此剩下只要证明当 a,b 一正一负时成立即可。由对称性不妨设 $a>0,b=-t<0$，则 $t>0$ 且 $a=\sqrt[n]{2+t^n}$。由二项式定理展开显然有

$$(2+t)^n\ge 2^n+t^n\ge 2+t^n,$$

即得

$$2-b=2+t\ge\sqrt[n]{2+t^n}=a\iff a+b\le 2。$$

综上所述，命题成立。 □

2.2 高考常考题型分类总结（导数三）——吴剑

题型五、不等式恒成立求参数范围

谈到不等式的恒成立，大家并不陌生，参数分离、讨论最值、数形结合等等都是常用的方法，但是由于导数背景下一些函数的多样性和复杂性决定了某些题目中以前的一些不等式恒成立的方法在这里不好直接用，下例举几个高考常见的问题并给出一个通法。

例 2.2.1. 已知不等式 $2^{\frac{1}{x}} > x^a$ 对任意 $x \in (0,1)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

解 在 $2^{\frac{1}{x}} > x^a$ 两边取对数，得 $\dfrac{1}{x}\ln 2 > a\ln x$，由于 $0 < x < 1$，所以有

$$\frac{a}{\ln 2} > \frac{1}{x\ln x},$$

任意 $x \in (0,1)$ 恒成立。令 $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$，则

$$f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{x^2\ln^2 x},$$

令 $f'(x) > 0$ 有 $0 < x < \dfrac{1}{e}$，故 $f(x)$ 在 $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$ 增，在 $\left(\dfrac{1}{e}, 1\right)$ 减。那么当 $x \in (0,1)$ 时，就有

$$f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{e}\right) = e,$$

故应有 $\dfrac{a}{\ln 2} > -e$，即 $a > -e\ln 2$。 □

评注： 本题采用了一个基本方法，参数分离，对于解决这类问题是首选的想法，分离后得到的函数需要通过求导才能得其最值。并且在该题中要把位于指数的参数分离出来必须要通过取对数。

练习：当 $n \in \mathbb{N}^+$ 时，不等式 $\dfrac{\ln n}{1+n} \leq \ln\dfrac{kn}{1+n}$ 恒成立，则常数 k 的取值范围是________。

例 2.2.1 中分离参数后的函数较为简单，所以能容易地求出最值。但事实上，对于一些较难的题目，比如压轴题，分离参数后的函数可能很复杂，不容易求最值，这就需要用其他的方法去求解。下面将介绍两种方法。

方法一：先找充分条件，再验证必要性

例 2.2.2. 已知 $g(x) = 2(x^2 - 2x + 1) - a\left(\ln x^2 - \ln(2x-1)\right)$，$g(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

解 注意到 $g(1) = 0$，且

$$g'(x) = 2(2x-2) - a\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{2x-1}\right) = 2(x-1)\frac{4x^2 - 2x - a}{x(2x-1)},$$

（1）当 $g'(x) \geq 0$ 在 $(1, +\infty)$ 恒成立时，即 $4x^2 - 2x - a \geq 0$ 恒成立（因为 $\dfrac{x-1}{x(2x-1)} > 0$），此时 $a \leq 2$。因 $g(x)$ 连续，则 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 单增，故 $g(x) \geq g(1) = 0$，满足条件；

（2）下证当 $a > 2$ 时不满足条件。令

$$g'(x) < 0 \implies 4x^2 - 2x - a < 0 \implies x \in \left(\frac{1-\sqrt{1+4a}}{4}, \frac{1+\sqrt{1+4a}}{4}\right),$$

因为 $a > 2$，所以易得 $\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{4} < 1$ 且 $\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{4} > 1$，则 $g(x)$ 在 $\left(1, \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{4}\right)$ 递减，则当 $x \in \left(1, \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{4}\right)$ 时 $g(x) < g(1) = 0$，不满足 $g(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 恒成立。

综上所述可知 a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$。 □

评注：如果该题也采取例 2.2.1 的方法分离参数的话，会出现求函数 $f(x)=\dfrac{2(x^2-2x+1)}{\ln x^2-\ln(2x-1)}$，这个函数求导后的复杂性是可以预见的，即使求导后也无法求出导数的零点，进而没法找出其最值点，故若单用中学阶段学习的导数知识，是无法求出这个函数的最值的。

但是这类题都有一个共同点，也是该类问题命题的背景：就本题而言，就是**在区间 $[1,+\infty)$ 的端点处不等式左右两边恰好相等（题中的 $g(1)=0$）**。因此这里就有一个想法，如果函数在 $[1,+\infty)$ 内单调增则肯定满足条件，所以就有了情况（1）得到充分条件即为 $a\in(-\infty,2]$，但这只是充分条件，很多人在解这类题时只管得到 a 的范围，而没有注意还需要说明其必要性。也就是说是不是只有情况（1）才满足题目条件？所以就有（2）的说明，实际上就是对（1）中的范围同时也是必要条件的说明，若 a 不在这个范围内就可以导出矛盾。

用方法一还可以解决以下两个高考把关题，读者可以自己练习。

（2006 全国 I 理）$f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}e^{-ax}>1$ 在 $x\in(0,1)$ 恒成立，求 a 的取值范围。（答案 $(-\infty,2]$）

（2008 全国 II 理）设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$。如果对任何 $x\geq 0$，都有 $f(x)\leq ax$，求 a 的取值范围。

方法二：先找必要条件，再验证充分性

此方法将是对于满足上述共同点的题型的通法，但由于常常要考虑端点附近的大小关系，故这里先引入如下引理（属于“洛必达法则”的简化版）。

引理 2.2.1. 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在定义域 D 内可导，$a\in D$，满足 $f(a)=g(a)=0$，$f'(a)$，$g'(a)$ 存在且 $g'(a)\neq 0$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}。$$

证明 因为

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{x-a}{g(x)-g(a)}\right),$$

由于可导，故 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 和 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$ 均存在，所以

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{x-a}{g(x)-g(a)}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}\frac{1}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}。$$ □

注：该证明过程系本人结合教材中的导数的定义给出，有问题还请指出。

下面就以前面练习中的“2008 年全国 II 理”为例来说明方法。

例 2.2.3. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$。如果对任何 $x\geq 0$，都有 $f(x)\leq ax$，求 a 的取值范围。

解 原不等式即为

$$\frac{\sin x}{2+\cos x}\leq ax。$$

当 $x=0$ 时即为 $0=0$，对于一切的 a 都成立。所以只要考虑 $x>0$ 的情况，即原问题可化为

$$a\geq\frac{\sin x}{x(2+\cos x)}$$

对于一切 $x>0$ 恒成立。此时

（1）必须先满足

$$a\geq\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x(2+\cos x)},$$

由引理，可得

$$a\geq\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x(2+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2+\cos x-x\sin x}=\frac{1}{3}\implies a\geq\frac{1}{3};$$

（2）另一方面，当 $a=\dfrac{1}{3}$ 时，令 $g(x)=\dfrac{x}{3}-\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$，则

$$g'(x)=\frac{1}{3}-\frac{\cos x(2+\cos x)+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2}=\frac{1}{3}-\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}=\frac{\cos^2 x-2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}\geq 0,$$

故 $g(x)$ 单增，则 $g(x)\geq g(0)=0$，故 $\dfrac{x}{3}\geq\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$，显然，当 $a\geq\dfrac{1}{3}$ 能使得原不等式恒成立。

综上所述，a 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right)$。 □

评注： 该解法与方法一正好相反，先找出 a 的必要条件，再验证其充分性，并且这里用的是分离参数解决不等式恒成立的想法。此法中那个 $x\to 0$ 时的极限和法一中提到的端点值有异曲同工之处，正是法一评注中说到的这类题的共同点所致。

另外验证充分性的方法很多，这里用了一个函数不等式的思想。还可以去多次求导验证函数 $\dfrac{\sin x}{x(2+\cos x)}$ 为减函数。

方法二同样可以解决例 2.2.2，并且该解法的优越性在于比较轻松的解决了必要性的说明，而笔者发现这类问题必要性的说明往往是比较麻烦的。但是这里用到了一个现行教材里没有给出的结论，也就是上述的引理，所以**在解答时建议附上引理的简要证明**。

值得一提的是，a 取值的端点值 $\dfrac{1}{3}$ 恰好是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线斜率，如图 2.2.1 所示。

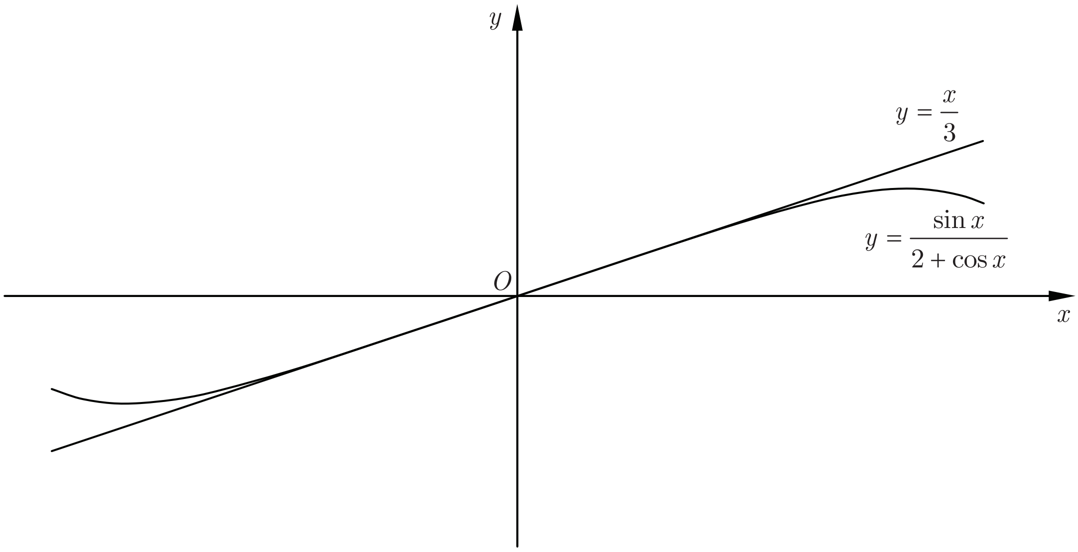


图 2.2.1

从图中发现，当 $a\geq\dfrac{1}{3}$ 时，直线肯定在曲线上方，那么满足题目要求是显而易见的。如果一旦 $a<\dfrac{1}{3}$，则肯定直线就会有在曲线下方的部分，这和例 2.2.2 中必要性的说明不谋而合，我想这也正是这类题的出题背景，即**以曲线的切线为背景**。如果知道了这个背景，那么我们利用方法二在解决这类问题时就有了统一的方向。

例 2.2.4. （2010 年全国 II 理）设函数 $f(x)=1-e^{-x}$，当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\leq\dfrac{x}{ax+1}$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

解 分析两边函数正负情况易得 $a\geq 0$。当 $x=0$ 时即为 $0=0$，对于一切的 a 都成立，故只要考虑 $x>0$ 的情况。

（1）原问题化为 $a \le \dfrac{x+e^{-x}-1}{x(1-e^{-x})}$ 对于 $x>0$ 恒成立，则首先满足

$$a \le \lim_{x\to 0}\frac{x+e^{-x}-1}{x(1-e^{-x})}=\frac{1}{2},$$

故得必要条件为 $0 \le a \le \dfrac{1}{2}$；

（2）下面证明 $a \le \dfrac{1}{2}$ 是充分条件。当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，将不等式整理为

$$g(x)=\frac{x}{2}e^x-e^x+\frac{x}{2}+1\ge 0,$$

注意到 $g(0)=0$，下证

$$g'(x)=\frac{x}{2}e^x-\frac{e^x}{2}+\frac{1}{2}\ge 0。$$

又由于 $g'(0)=0$，故只需证 $g'(x)=\dfrac{x}{2}e^x-\dfrac{e^x}{2}+\dfrac{1}{2}$ 是增函数即可，再求导有

$$g''(x)=\frac{x}{2}e^x>0,$$

故 $g'(x)$ 单增，得 $g'(x)>g'(0)=0$，则 $g(x)$ 单增，得 $g(x)>g(0)=0$，所以 $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{x+e^{-x}-1}{x(1-e^{-x})}$ 成立，那么当 $a\le\dfrac{1}{2}$ 时，显然该不等式也成立。

综上所述，a 的取值范围是 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$。 $\square$

评注： 该题为 2010 年全国 II 的压轴题。当时大家都反映标准答案完全是云里雾里，思路不好找，并且感觉拼凑痕迹很明显，属于知道答案而写的答案。所以这里用这类问题的通法来解决这个题。

下面大家不妨再利用该法练习以下两题。

（2010 年全国新课标）设函数 $f(x)=e^x-1-x-ax^2$。若当 $x\ge 0$ 时 $f(x)\ge 0$ 恒成立，求 a 的取值范围。

（2011 年武汉 4 月调研考试）当 $x\ge 0$ 时，不等式 $x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\le ax^3$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

2.3 立体几何中的平面内动点轨迹问题——陈炯阳、郭子伟

本文将整理一些常见的立体几何中的平面内动点轨迹题目，并试图给些研究或推广。

例 2.3.1. 已知正四面体 $ABCD$，P 是 $\triangle ABC$ 内的动点，点 P 到平面 BCD 的距离与点 P 到点 A 的距离相等，则动点 P 的轨迹是何种曲线?

解 如图 2.3.1 所示，过 P 作平面 BCD 的垂线，垂足为 Q，过 Q 作 BC 的垂线，垂足为 M，连结 PM 及 PA。易知 PM 就是 P 到 BC 的距离，且 $\angle PMQ$ 为正四面体两个面所成角的平面角（显然为定值且是锐角），故依题意就有

$$|PA|=|PQ| \iff |PA|=|PM|\sin\angle PMQ \iff \frac{|PA|}{|PM|}=\sin\angle PMQ<1,$$

即 P 到定点 A 的距离与到定直线 BC 的距离之比为小于 1 的常数，所以 P 在 $\triangle ABC$ 内的轨迹为椭圆的一部分。 □

变式一 将上例中的“距离相等”改为“距离比为常数 q”，其余不变，则可讨论 P 的轨迹类型。

变式二 将上例中的“点 P 到点 A 的距离”改为“点 P 到平面 ACD 的距离”，其余不变，则动点 P 的轨迹是何种曲线?

变式三 将上例中的“点 P 到点 A 的距离”改为“点 P 到棱 AB 的距离”，其余不变，则动点 P 的轨迹是何种曲线?

这几个变式很简单，这里就不写解答了，留给大家练习。

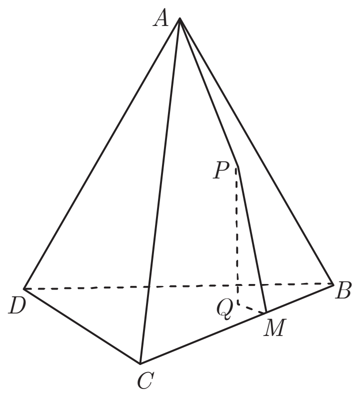


图 2.3.1

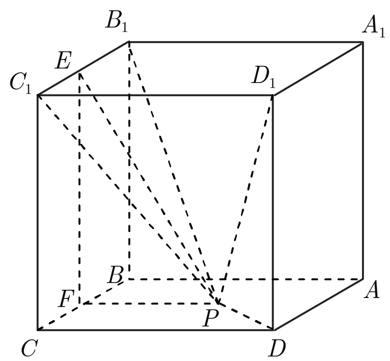


图 2.3.2

例 2.3.2. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 是底面 $ABCD$ 内的动点，PD_1 与底面 $ABCD$ 所成的角等于平面 PB_1C_1 与底面 $ABCD$ 所成的角，则动点 P 的轨迹是何种曲线?

解 如图 2.3.2 所示，过 P 作 B_1C_1 的垂线，垂足为 E，过 E 作 BC 的垂线，垂足为 F。

显然 $\angle EPF$ 即为平面 PB_1C_1 与底面 $ABCD$ 所成角的平面角，依题意有

$$\angle EPF=\angle D_1PD,$$

故得

$$\tan\angle EPF=\tan\angle D_1PD \iff \frac{DD_1}{DP}=\frac{EF}{PF},$$

由 $DD_1=EF$ 即得 $DP=PF$，即 P 到定点 D_1 的距离与到定直线 B_1C_1 的距离相等，由抛物线的定义即知 P 在底面 $ABCD$ 内的轨迹为抛物线的一部分。 □

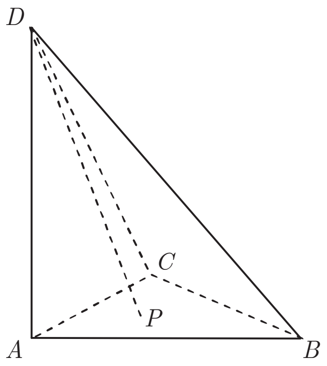


图 2.3.3

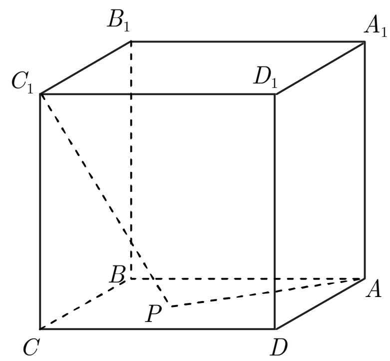


图 2.3.4

变式 如图 2.3.3 所示，在三棱锥 $D-ABC$ 中，DA 与底面 ABC 垂直，P 为底面 ABC 内一动点，满足 DP 与 DA 所成的角等于 DP 与平面 DBC 所成的角，则动点 P 的轨迹是何种曲线?

这个变式也较简单，留给大家练习。

例 2.3.3. 如图 2.3.4 所示，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 是底面 $ABCD$ 内的动点，满足 $PA=PC_1$，则 P 的轨迹是何种曲线?

解 在平面时，熟知到两定点距离相等的点的轨迹为两定点连线的中垂线。在空间，自然就是两定点连线的中垂面[1]。由此，依题意知 P 在线段 AC_1 的中垂面上，故 P 的轨迹为此中垂面与底面 $ABCD$ 的交线，即为线段。 □

变式 将条件“$PA=PC_1$”改为“$PA=kPC_1$，其中 k 为常数且 $k<1$”，则 P 的轨迹是何种曲线?

解 在平面时，根据“Apollonius 圆”的结论，到两定点距离之比为定值且不为 1 的点的轨迹是一个圆，称为 Apollonius 圆。于是在空间上时，显而易见，轨迹就是球，故由此球与底面 $ABCD$ 的截线[2]的圆弧就是点 P 的轨迹。 □

上例及变式也可以用代数方法，建立坐标系求解，就无需知道其它结论，这里也留给大家练习。

例 2.3.4. （2008 年浙江理数）如图 2.3.5 所示，已知定线段 AB 为一条与平面 α 相交于点 A 的斜线且与 α 所成角为 β。P 为平面 α 内一动点，满足 $\triangle ABP$ 的面积为定值 S，则 P 的轨迹是何种曲线?

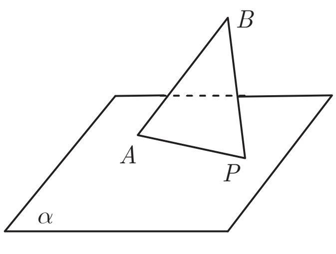


图 2.3.5

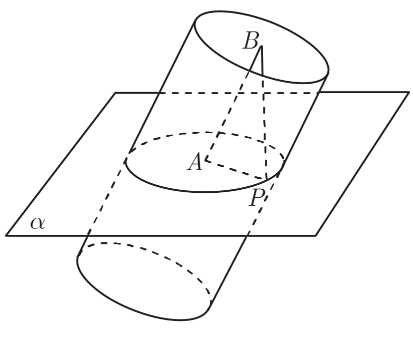


图 2.3.6

[1]中垂面即是过线段中点并且垂直于该线段的平面。

[2]由比例 $k<1$ 可知 A 必在球内，所以底面 $ABCD$ 必与球相交，这就是为什么加 $k<1$ 这一限制。事实上，k 可以大于 1，但若太大则球可能与底面相切或相离，需要讨论，所以这里就懒得搞太复杂，有兴趣的可以研究下当 k 在什么范围内时球与底面有公共点。

解法一 设 P 到直线 AB 的距离为 d，则有

$$S=\frac{1}{2}|AB|\,d,$$

从而知 d 为定值，因此 P 必在以直线 AB 为轴且 d 为半径的圆柱面上，于是轨迹应为此圆柱面与平面 α 的交线。又因 AB 对平面 α 为斜线，故 α 斜截圆柱面，熟知平面斜截圆柱的截线为椭圆，故轨迹就是椭圆，如图 2.3.6 所示。 □

可以看到，解法一的前提是要了解平面斜截圆柱的已知结论，那如果不知道这结论怎么办？请看以下纯代数的解法，并且只用到简单的向量知识，适合于普通高中生。

解法二 建立空间直角坐标系，使点 A 为原点，平面 α 为 xOy 平面，直线 AB 在 yOz 平面上且 B 在 yOz 的第一象限上。

不妨设 $|AB|=r$，r 为正常数，$P(x,y,0)$，则有

$$\overrightarrow{AB}=(0,r\cos\beta,r\sin\beta)\text{，}\overrightarrow{AP}=(x,y,0)\text{，}$$

记 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AP}$ 的夹角为 θ，则有

$$4S^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AP}\right|^2\sin^2\theta=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AP}\right|^2-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AP}\right|^2\cos^2\theta=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AP}\right|^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}\right)^2,$$

代入数据化简得

$$x^2+\sin^2\beta y^2=\frac{4S^2}{r^2},$$

由此可见 P 的轨迹为椭圆。 □

由解法二也可以看出该椭圆的离心率为

$$e=\sqrt{\frac{1}{\sin^2\beta}-1}=\cot\beta\text{。}$$

当然，这个离心率的结论用“球切法[1]”也是很容易得出的。

选读变式： 若将“$\triangle ABP$ 的面积为定值 S”改为“$\triangle ABP$ 的周长为定值 C”，其余条件不变，则 P 的轨迹是何种曲线？

解 由于 $\triangle ABP$ 一边 AB 已为定长，故由周长为定值知 $PA+PB$ 为定值，椭据椭圆定义，在空间中可知 P 在一旋转椭球面上，故与平面 α 相交也应截得椭圆截线[2]。 □

例 2.3.5. 如图 2.3.7 所示，已知定线段 AB 为一条与平面 α 相交于点 A 的斜线且与 α 所成角为 β。过点 B 的动直线 l 与 AB 垂直，设 l 与 α 交于点 P，则动点 P 的轨迹是何种曲线?

解 因 l 与 AB 垂直且过定点 B，故 l 必在过 B 且垂直于 AB 的平面上，所以 P 的轨迹应是此平面与平面 α 的交线，显然为直线。 □

变式 将上例中的“l 与 AB 垂直”改为“l 与 AB 成定角 θ，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$”，其余条件不变，讨论 P 的轨迹的种类。

---

[1] 关于球切法等结论可以参考《圆锥曲线的八个主要问题》。

[2] 椭球为 $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ 形，与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 相交必然为闭合曲线，消去 z，得关于 x,y 的二次方程，再向平面投影得截线方程，故必为椭圆。

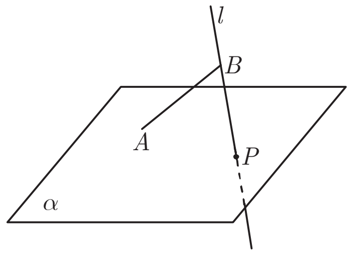


图 2.3.7

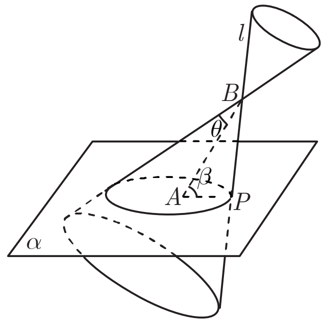


图 2.3.8

解法一　改条件后易知 l 在以 B 为顶点、AB 为对称轴、母线与轴夹角为 θ 的圆锥面上，由平面斜截圆锥的结论可知：

（1）当 $0<\theta<\beta$ 时 P 的轨迹为椭圆；

（2）当 $\theta=\beta$ 时 P 的轨迹为抛物线；

（3）当 $\beta<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 时 P 的轨迹为双曲线。

情况（1）的示意图如图 2.3.8 所示。 □

我们还是给出在不知以上已知结论时的普通高中生能理解的代数解法。

解法二　类似于前面的建系以及设点方法，我们有

$$\overrightarrow{BA}=(0,-r\cos\beta,-r\sin\beta)\text{，}\overrightarrow{BP}=(x,y-r\cos\beta,-r\sin\beta)\text{，}$$

依题意有

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}=\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BP}\right|\cos\theta,$$

代入数据为

$$-r\cos\beta\,(y-r\cos\beta)+r^2\sin^2\beta=r\sqrt{x^2+(y-r\cos\beta)^2+r^2\sin^2\beta}\cos\theta,$$

两边平方整理得

$$\cos^2\theta x^2+\left(\cos^2\theta-\cos^2\beta\right)y^2+2yr\cos\beta\sin^2\theta=r^2\sin^2\theta\text{。}$$

可见，当 $\theta=\beta$ 时 $\cos^2\theta-\cos^2\beta=0$，此时没有二次的 y 项，故轨迹为抛物线；

而当 $\theta\neq\beta$ 时，上式可以整理为

$$x^2+\left(1-\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\theta}\right)\left(y+\frac{r\cos\beta\sin^2\theta}{\cos^2\theta-\cos^2\beta}\right)^2=\frac{r^2\sin^2\theta\sin^2\beta}{\cos^2\theta-\cos^2\beta}\text{。}$$

当 $0<\theta<\beta$ 时 $1-\dfrac{\cos^2\beta}{\cos^2\theta}\in(0,1)$ 且 $\dfrac{r^2\sin^2\theta\sin^2\beta}{\cos^2\theta-\cos^2\beta}>0$，故轨迹为椭圆，且焦点在 y 轴上；

当 $\beta<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 时 $1-\dfrac{\cos^2\beta}{\cos^2\theta}<0$ 且 $\dfrac{r^2\sin^2\theta\sin^2\beta}{\cos^2\theta-\cos^2\beta}<0$，故轨迹为双曲线，且焦点也在 y 轴上。 □

从解法二也可以求出轨迹的离心率为

$$e=\frac{\cos\beta}{\cos\theta}\text{。}$$

同样，用“球切法”也很容易得到这一离心率结论。

例 2.3.6. （2010 年重庆理数）到两互相垂直的异面直线的距离相等的点，在过其中一条直线且平行于另一条直线的平面内的轨迹是何种曲线?

解　记这两直线为 L_1、L_2 且两直线的距离为 k，平面 α 为过 L_1 且平行于 L_2 的平面，设 α 上某个点 P 满足条件。

将 L_2 正投影到 α 上，投影得的直线记为 L_3，设 P 到 L_1 及 L_2 的距离为 t，到 L_3 的距离为 u，如右图所示。由勾股定理有

$$t^2 - u^2 = k^2,$$

由于 k 为定值，t 及 u 分别正是 P 到 α 上两垂直直线 L_1、L_3 的距离，而 L_1 和 L_3 可看作平面 α 上的直角坐标系，故此可见 P 的轨迹是等轴双曲线。 □

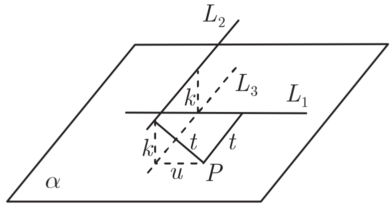


图 2.3.9

拓展选读：到两异面直线距离相等的点的轨迹是什么面？用平面去截这个面会有什么截线？

解 不失一般性，设两异面直线在空间直角坐标系中的方程分别为 $L_1 : \begin{cases} y = kx, \\ z = d, \end{cases}$ 和 $L_2 : \begin{cases} y = -kx, \\ z = -d, \end{cases}$ 这里 k, d 均为正常数。显然两直线分别过点 $P_1(0, 0, d)$ 和点 $P_2(0, 0, -d)$，且其方向向量分别为 $\overrightarrow{n_1} = (1, k, 0)$ 和 $\overrightarrow{n_2} = (1, -k, 0)$。

设 $P(x, y, z)$ 到 L_1, L_2 的距离相等，由点到直线距离公式[1]，有

$$\frac{\left|\overrightarrow{P_1P} \times \overrightarrow{n_1}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{P_2P} \times \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_2}\right|},$$

两边平方后代入数据化简整得

$$z = -\frac{kxy}{(k^2+1)d},$$

这就是 P 的轨迹方程，是一个双曲抛物面，因其形状与马鞍较似，故也称作“马鞍面”。

由此可见，若用平面去截此曲面得到的截线不高于二次。上例中就是取 $k = 1$ 并用平面 $z = -d$ 去截，得到 $xy = 2d^2$，通过旋转可知其也是等轴双曲线，而若用平面 $z = 0$ 去截则得两直线 $xy = 0$，用平行于 z 轴的平面去截则得抛物线，等等。

更一般地，若将条件“距离相等”改为“距离比例为常数 q”，其余不变，用同样方法也可以求得轨迹为

$$(q^2-1)\left((kx-y)^2 + (k^2+1)(d+z)^2\right) + 4kxy + 4d(k^2+1)z = 0,$$

用平面去截得的曲线仍不高于二次。 □

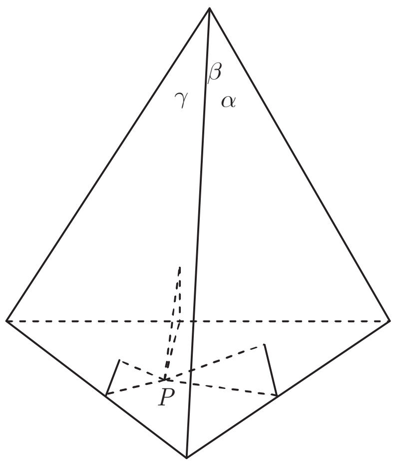


图 2.3.10

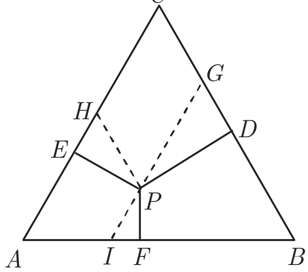


图 2.3.11

例 2.3.7. 在某正三棱锥中，记三个侧面依次为 α, β, γ，P 是底面内的动点，且点 P 到 α, β, γ 的距离依次成等差数列，则动点 P 的轨迹是何种曲线?

[1] 此公式用到向量的叉乘，关于叉乘的更多内容请自行查阅相关文献。

解 如图 2.3.10 所示，过 P 向 α,β,γ 分别作垂线，再分别过垂足向底面三角形的边作垂线，连结该点与底面三角形三边上的垂足。显然如此构成的三个小的直角三角形相似，由已知条件，易得三直角三角形的斜边长也成等差数列，于是就转化为正三角形内到三边距离依次成等差数列的点的轨迹。

如图 2.3.11 所示，正 $\triangle ABC$ 中，P 到三边的距离 PD,PE,PF 依次成等差数列，过 P 过 AC 的平行线分别交 AB，BC 于 I，G，过 P 过 BC 的平行线交 AC 于 H，则易知

$$2PE=PF+PD \iff 2PH=PI+PG \iff 2CG=GB,$$

也就是说 G 必定是 BC 的三等分点，故 IG 为定线段且 P 必在 IG 上，又当 P 在 IG 上运动时显然也恒满足上式，可见 P 的轨迹就是线段 IG。 □

变式 将上例中“依次成等差数列”改成“依次成等比数列”结果又是如何?

解 仿上解法，依然转化为正三角形内到三边距离依次成等比数列的点的轨迹。

如图 2.3.12 所示，正 $\triangle ABC$ 中，P 到三边的距离 PD,PE,PF 依次成等比数列，连结 PA，PC，DE，EF。则显然 $\angle DPE=\angle EPF=120^\circ$，故得

$$\frac{PD}{PE}=\frac{PE}{PF} \iff \triangle DPE\sim\triangle EPF \iff \angle EDP+\angle EFP=60^\circ,$$

又因 $\angle CDP+\angle CEP=\angle AEP+\angle AFP=180^\circ$，所以 C、D、P、E 和 A、E、P、F 均四点共圆，故

$$\angle ECP=\angle EDP,$$
$$\angle EAP=\angle EFP,$$

所以就得到

$$\frac{PD}{PE}=\frac{PE}{PF} \iff \angle ECP+\angle EAP=60^\circ \iff \angle APC=120^\circ,$$

据此，由圆周角的性质，可见 P 的轨迹就是以 AC 为弦且所对圆周角为 120° 的圆弧段，如图 2.3.13 所示。 □

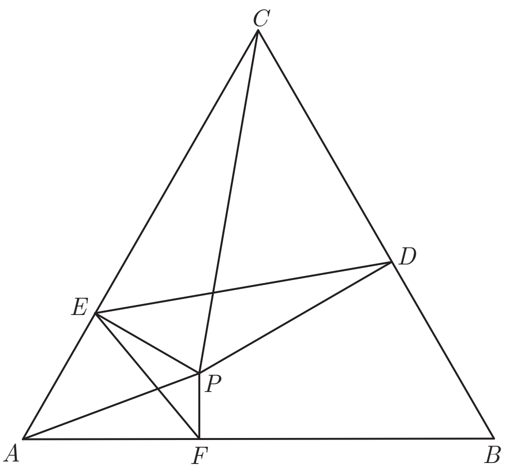


图 2.3.12

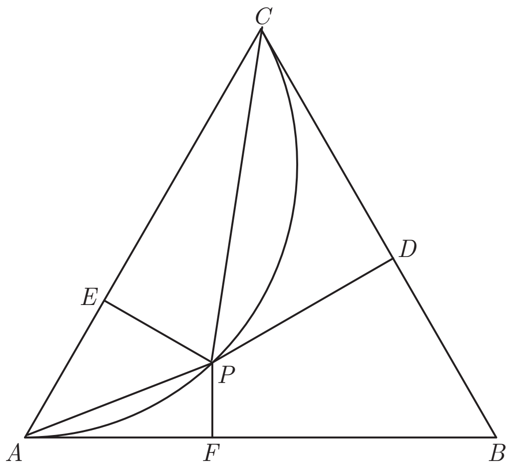


图 2.3.13

上例及变式的证法需要一定平面几何知识，尽管是初中水平，但鉴于现时普通高中学生或教师对平几知识普遍淡忘，故还是初充一个代数解法。

代数解法 由前面分析，只要考虑正三角形内点到三边距离为等差或等比。不妨一般性，设正三角形边长为 1，建立平面直角坐标系，使得 $A(-1,0),B(1,0),C(0,\sqrt{3})$，则有 $L_{BC}:y+\sqrt{3}x-\sqrt{3}=0$ 以及 $L_{AC}:y-\sqrt{3}x-\sqrt{3}=0$，设 $P(x,y)$，利用点到直线距离公式，有

$$|PD|=\frac{-y-\sqrt{3}x+\sqrt{3}}{2},$$

$$
\begin{aligned}
|PE| &= \frac{-y+\sqrt{3}x+\sqrt{3}}{2}, \\
|PF| &= y\text{。}
\end{aligned}
$$

对于等差的情形，有

$$2\,|PE| = |PD| + |PF| \iff y = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3},$$

即知为线段；

对于等比的情形，有

$$|PE|^2 = |PD|\cdot|PF| \iff (x+1)^2 + \left(y - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3},$$

即知为圆弧。 □

例 2.3.8. 如图 2.3.14 所示，已知定平面 α 上有一定直线 L_1，与 L_1 异面且不垂直的动直线 L_2 绕 L_1 旋转，旋转时 L_2 与平面 α 交于点 P，则 P 在平面 α 上的轨迹是何种曲线?

解 不妨设 OA 为两直线的公垂线，O 在 L_1 上，A 在 L_2 上，$OA=d$。因 L_2 绕 L_1 旋转，故 O 为定点，OA 恒在过 O 且垂直于 L_1 的平面上，L_2 与该平面所成角为定值，设为 θ。

由此，在平面 α 上建立平面直角坐标系，使 O 为原点，L_1 为 y 轴，设 $P(x,y)$。过 P 作 x 轴的垂线，垂足为 B，连结 AB，如图 2.3.15 所示。

易证 $\angle OAB = 90^\circ$，$\angle PAB = \theta$，则当 OA 与 x 轴正半轴方向所成角为 ω 时，就有

$$x = OB = \frac{d}{\cos\omega},$$

以及

$$y = PB = AB\tan\theta = d\tan\omega\tan\theta,$$

消去 ω 即得

$$\frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{d^2\tan^2\theta} = 1,$$

可见 P 的轨迹为双曲线。 □

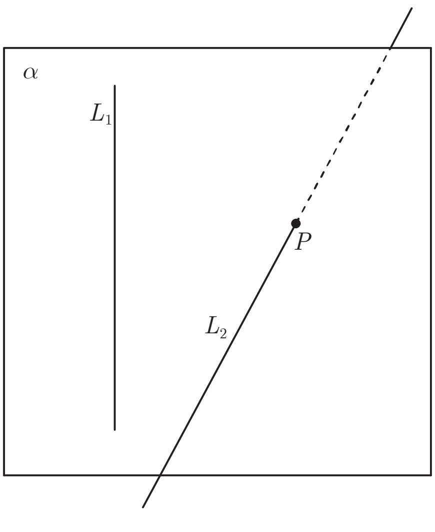


图 2.3.14

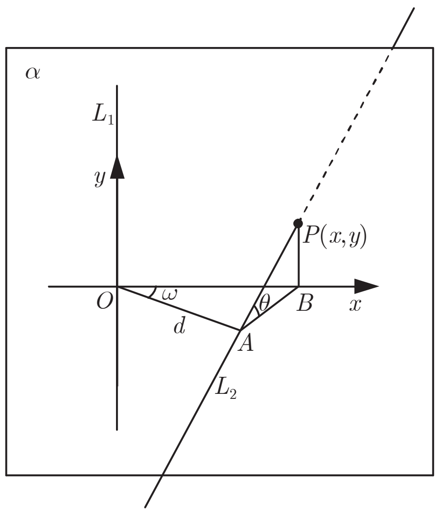


图 2.3.15

2.4 对南通市高三期末第 14 题的思考——张培强

一、问题与分析

题目 （2011 届南通市高三期末第 14 题）已知等腰三角形腰上的中线长为 $\sqrt{3}$，则该三角形的面积的最大值是________。

已知：如图 2.4.1，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$AD=DC$，$BD=\sqrt{3}$。

求：$\triangle ABC$ 面积 S 的最大值。

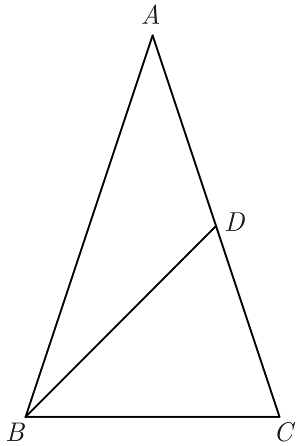


图 2.4.1

思路分析 1：余弦定理

法 1 设 $AD=CD=m$，则 $AB=2m$，在 $\triangle ABD$ 中

$$\cos\angle ADB=\frac{3+m^2-4m^2}{2\sqrt{3}m},$$

在 $\triangle BDC$ 中

$$\cos\angle CDB=\frac{3+m^2-BC^2}{2\sqrt{3}m},$$

由 $\cos\angle ADB+\cos\angle CDB=0$ 可得，$BC^2=6-2m^2$，所以

$$\cos A=\frac{5m^2-3}{4m^2}\implies \sin A=\frac{\sqrt{-9m^4+30m^2-9}}{4m^2},$$

故

$$S=\frac{\sqrt{-9m^4+30m^2-9}}{2}=\frac{\sqrt{-9\left(m^2-\frac{5}{3}\right)^2+16}}{2},$$

易知当 $m^2=\frac{5}{3}$ 时，面积 S 的最大值是 2。 □

注：此法关注要解之三角形，全面了解 $\triangle ABC$ 的各元素，属常规想法。避免求边 BC，优化此解法，可考虑在 $\triangle ABD$ 中，有 $\cos A=\frac{5m^2-3}{4m^2}$，而 $S=2S_{\triangle ABD}$，同样可解。

法 2 由中线长定理可知

$$BD=\frac{1}{2}\sqrt{2\left(AB^2+BC^2\right)-AC^2}=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2+2BC^2},$$

所以 $AB^2+2BC^2=12$，而

$$S=\frac{1}{2}BC\cdot\sqrt{AB^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3BC}{2}\cdot\sqrt{12-\left(\frac{3BC}{2}\right)^2}\leq\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{2}=2,$$

当且仅当 $BC=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 时取等。 □

注：中线长定理是由余弦定理推出，因此借用中线长定理使得过程中没有涉及角，但实质上仍是余弦定理发挥作用。

思路分析 2：三角函数

法 3 设 $AD=CD=m$，则 $AB=2m$，由 $\cos A=\frac{5m^2-3}{4m^2}$ 可得 $m^2=\frac{3}{5-4\cos A}$，所以

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=2m^2\sin A=\frac{6\sin A}{5-4\sin A},$$

考虑 $\frac{6\sin A}{5-4\sin A}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin A-0}{\cos A-\frac{5}{4}}$ 的几何意义（$\frac{\sin A-0}{\cos A-\frac{5}{4}}$ 表示过点 $(\cos A,\sin A)$ 和 $\left(\frac{5}{4},0\right)$ 的直线的斜率），易得面积 S 的最大值是 2。 □

注：此法恰与法 1 反其道而行之，将要求的焦点尽皆转化到角，利用三角函数的性质解决。

思路分析 3：向量

法 4 设 AH 为 BC 边上的高，由 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ 可得

$$\overrightarrow{BD}^2=\left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=3,$$

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{5}{4}\overrightarrow{BA}^2-3$，而

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AH}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{2\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}\cdot\sqrt{2\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{-\frac{9}{4}\overrightarrow{AB}^4+30\overrightarrow{AB}^2-36},\end{aligned}$$

下类似法 1 可得。 □

注：向量的运算实际上将角的参与隐藏起来了。

思路分析 4：解析几何

法 5 以 BD 中点 O 为原点，BD 所在直线为 x 轴建立如图 2.4.2 所示的平面直角坐标系，设 $A(x,y)$，则 $AB=2AD$，即

$$\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2=4\left(\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2\right),$$

整理得

$$\left(x-\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)^2+y^2=\frac{4}{3},$$

即有 $|y|\le\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，所以 $S=BD\cdot|y|=\sqrt{3}\,|y|\le 2$，当 $|y|=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 时取等。 □

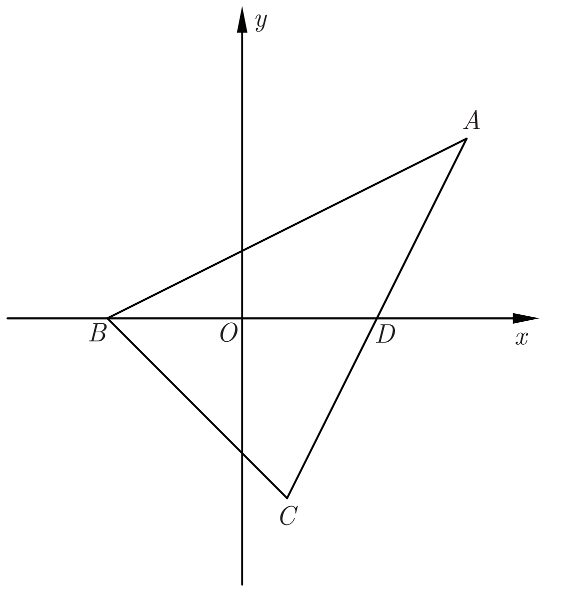


图 2.4.2

注：此种建系方式关注 $\triangle ABD$ 中，恒有 $AB=2AD$。

法 6 以 BC 中点 O 为原点，BC 所在直线为 x 轴建立如图 2.4.3 所示的平面直角坐标系，设 $C(m,0)$，$B(-m,0)$，$A(0,n)$，则 $D\left(\dfrac{m}{2},\dfrac{n}{2}\right)$，所以 $BD^2=\left(\dfrac{3m}{2}\right)^2+\left(\dfrac{n}{2}\right)^2=3$，而

$$S=mn=\frac{4}{3}\cdot\frac{3m}{2}\cdot\frac{n}{2}\le\frac{4}{3}\cdot\frac{\left(\dfrac{3m}{2}\right)^2+\left(\dfrac{n}{2}\right)^2}{2}=2,$$

当且仅当 $n=3m$ 时取等。 □

注：此种建系方式关注 $\triangle ABC$ 的特征（等腰）。

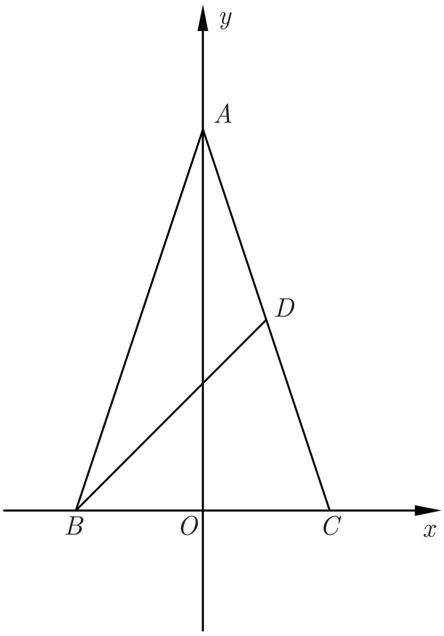


图 2.4.3

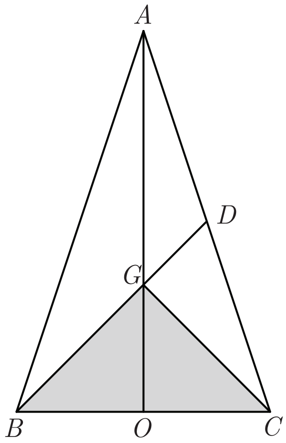


图 2.4.4

思路分析 5：平面几何

法 7 如图 2.4.4 所示，作 $AO \perp BC$ 于点 O，交 BD 于点 G，则 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，则有

$$BG = CG = \frac{2}{3}BD = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

所以

$$S = 3S_{\triangle BGC} = 3 \cdot \frac{1}{2}BG \cdot CG \sin\angle BGC = 2\sin\angle BGC \le 2,$$

当 $\angle BGC = \dfrac{\pi}{2}$ 时取等。 □

注：中线作为三角形的特征线，自然和重心是相辅相成的。

二、检测的结果

本题调研的对象是我校（江苏省四星级高中）高三学生。此题给学生统一做过 3 遍，下面给出第 3 次的结果统计：

答案 人数	2	$\sqrt{3}$	空及其他	正确率
44	20	10	14	45%
44	24	8	12	54%

需要指出的是，表格中的“$\sqrt{3}$”表示本题的易错解，即认为当 $\triangle ABC$ 为正三角形时面积达到最大（学生看来所谓的经验）。这也说明试题的优质，不因特殊情况而减少思维量。

三、试题的源头

将之与 2008 年江苏省高考第 13 题比较：

满足条件 $AB = 2$，$AC = \sqrt{2}BC$ 的三角形 ABC 的面积的最大值________。（答案：$2\sqrt{2}$）

条件上，都存在这样一个三角形，一边确定、另两边长成比例。解决起来都可用如法 5 的解析法。这也显示两题有着共同的背景：阿波罗尼斯圆。

该调研题将其前生“补形”成等腰三角形，带来题意更加简洁的同时，也掩埋了边之间的关系条件。咋一看，原题遁形，唯有细品，方知内涵所在。此，实为改编题的上乘之作。

而实际上，建立在“阿波罗尼斯圆”背景上的考题从未间断过。

考题 1：（1999 年全国卷）设 $A(-3,0)$，$B(3,0)$ 为两定点，动点 P 到 A 点的距离与到 B 点的距离为定比 $1:2$，则 P 点的轨迹图形所围得的面积是（　）选项略

考题 2：（2003 年北京卷）设 $A(-c,0)$，$B(c,0)\,(c>0)$ 为两定点，动点 P 到 A 点的距离与到 B 点的距离的比为定值 $a\,(a>0)$，求 P 点的轨迹方程及图形。

考题 3：（2005 年江苏卷）圆 O_1 与圆 O_2 的半径都是 1，$O_1O_2=4$，过动点 P 分别作圆 O_1、O_2 的切线 PM、PN（M、N 分别为切点），使得 $PM=\sqrt{2}PN$。试建立适当的坐标系，求动点 P 的轨迹方程。

考题 4：（2006 年四川卷）已知两定点 $A(-2,0)$，$B(1,0)$，如果动点 P 满足 $|PA|=2|PB|$，则点 P 的轨迹所包围的面积等于（　）选项略

四、讲评的建议

1. 注意思维的发散与统一

一道解三角形和最值结合的问题，竟有五种分析问题的思路和具体的六种解法（当然问题解决的方式还有，但大同小异）。教学中宜加强思维的发散训练，多引导学生从不同的角度去审视问题，或层峦叠嶂，或豁然开朗，或思维乍现，或殊途同归，这是有益的尝试。而另一方面，还需将发散开去的思维统一起来，即优化问题的解决。如，法 1、2、4 都是将所求化归到“边”，和法 3 的化“角”对比起来，形成解三角形的两种基本思路：化边和化角；而思路 4 则从代数的角度来分析问题。

2. 加强变式的训练与提炼

变式，作为问题暴露后的有益补充，可有力地达到巩固深化的目的。变式训练的设置与否成为了衡量当今课堂有效性的一个重要方面。本题可作如下变式：

变式 1：已知等腰三角形腰上的中线长为 d，则该三角形的面积的最大值是________。

此变式着重对问题的深度探索，对其一般化的结论探求，似原题又胜原题，抛弃了具体的数值，有利于学生对问题本质的认识。

变式 2：已知 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AC 上的点 D 满足 $AD=2DC$，且 $BD=1$，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值是________。

此变式针对解法 7 的平几方法，尽量避免这种简捷的做法，能更好地训练学生解决一般问题的能力。

变式 3：在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2AC$，AD 是角 A 的平分线，且 $AD=kAC$。若 $\triangle ABC$ 的面积为 1，问 k 为何值时，BC 最短?

此变式仍旧是建立在原有的背景上，将之和其他知识点综合，改头换面表象下的本质依然，利于培养学生分析问题、解决问题的能力。

2.5 由一道课堂习题想到的关于椭圆切线问题的一种方法——吴剑

在讲于椭圆有关的最值问题时，讲到如下例题：

求椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上的点到直线 $l_0:2x+y+5=0$ 距离的最值。

常见解法肯定有平行切线法和三角代换法。

解法一：平行切线法 设直线 $l:2x+y+\lambda=0$，令其与椭圆相切，联立经过计算得 $\lambda=\pm3$，故得到两条切线

$$l_1:2x+y+3=0,$$
$$l_2:2x+y-3=0,$$

则可以通过计算这两条切线与 $l_0:2x+y+5=0$ 的距离来得到最大值为 $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$，最小值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$。

但是这里就有个问题，如果 l_0 与椭圆已经相交，那么最小值就该是 0，在本题中，需要事先对于 l_0 与椭圆的位置关系进行判断，但是如果联立的话工作量就大了很多。这里可以用求出来的两条切线的常数项与 l_0 的常数项做比较，由于 $\pm3\leq5$，说明直线 l_0 应该在两条切线的同侧，所以 l_0 与椭圆相离，则最大值最小值分别为 $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ 和 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$。 □

解法二：三角代换 设椭圆上的点 $P(\sqrt{2}\sin\alpha,\cos\alpha)$，则 P 点到直线 l_0 的距离为

$$d=\frac{\left|2\sqrt{2}\sin\alpha+\cos\alpha+5\right|}{\sqrt{5}}=\frac{|3\sin(\alpha+\varphi)+5|}{\sqrt{5}},$$

显然 $3\sin(\alpha+\varphi)+5\in[2,8]$，故 $d\in\left[\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\dfrac{8\sqrt{5}}{5}\right]$。 □

完成解法二时，就想了这么一个问题，解法一需要判断 l_0 与椭圆的关系，那么解法二同样也应该遇到同样问题，但是为什么就没影响了呢?

其实 $3\sin(\alpha+\varphi)+5\in[2,8]$ 已经体现出来了，如果 $3\sin(\alpha+\varphi)+5$ 的范围有正有负，那么取绝对值以后最小值肯定就是 0，但是同正或同负那么最小值就不会是 0。

这里不就正好体现出 l_0 与椭圆的位置关系了吗? 所以下来稍做了下整理如下。

一般地，设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a,b>0$），直线 $l:Ax+By+C=0$，设椭圆上任意一点为 $P(a\sin\alpha,b\cos\alpha)$，代入到直线方程中，有

$$Aa\sin\alpha+Bb\cos\alpha+C=\sqrt{A^2a^2+B^2b^2}\sin(\alpha+\varphi)+C,\tag{2.5.1}$$

且

$$\sqrt{A^2a^2+B^2b^2}\sin(\alpha+\varphi)+C\in\left[-\sqrt{A^2a^2+B^2b^2}+C,\sqrt{A^2a^2+B^2b^2}+C\right]。$$

注意到式 (2.5.1) 的意义，是将点 P 坐标代入直线 l 得到的式子，其正负由平面区域知识可知体现出的是点 P 在直线的上方还是下方。记区间 $D=\left[-\sqrt{A^2a^2+B^2b^2}+C,\sqrt{A^2a^2+B^2b^2}+C\right]$，那么

（1）若 D 内取值全正或者全负，即端点值同号，即

$$\left(-\sqrt{A^2a^2+B^2b^2}+C\right)\left(\sqrt{A^2a^2+B^2b^2}+C\right)>0\iff A^2a^2+B^2b^2<C^2,$$

说明椭圆上所有点都在直线的同侧，即直线 $l:Ax+By+C=0$ 与椭圆相离；

（2）若 D 内取值有正有负，即

$$\left(-\sqrt{A^2a^2+B^2b^2}+C\right)\left(\sqrt{A^2a^2+B^2b^2}+C\right)<0\iff A^2a^2+B^2b^2>C^2,$$

说明椭圆上的点分布在直线的两侧，即直线 $l: Ax+By+C=0$ 与椭圆相交；

（3）若 D 内取值中只有端点值为 0，即

$$\left(-\sqrt{A^2a^2+B^2b^2}+C\right)\left(\sqrt{A^2a^2+B^2b^2}+C\right)=0 \iff A^2a^2+B^2b^2=C^2, \tag{2.5.2}$$

说明椭圆上的点只有一个在椭圆上，另外的都在椭圆的一侧，也即直线 $l: Ax+By+C=0$ 与椭圆相切。

事实上，式 (2.5.2) 可以由很多方法得到，利用三角代换是一个比较快捷的方法。

由情况（3）的结论即可得到与椭圆切线相关问题的一种求解方法，下面举例说明其简单运用。

例 2.5.1.（07 年重庆文科 12 题）已知以 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$ 为焦点的椭圆与直线 $x+\sqrt{3}y+4=0$ 有且仅有一个交点，则椭圆的长轴长为（　）

A. $3\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{6}$　　C. $2\sqrt{7}$　　D. $4\sqrt{2}$

解　设椭圆为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a,b>0$），设其上的点 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$，到直线 $x+\sqrt{3}y+4=0$ 的距离为

$$\frac{\left|a\cos\theta+\sqrt{3}b\sin\theta+4\right|}{2}=\frac{\left|\sqrt{a^2+3b^2}\sin(\theta+\varphi)+4\right|}{2},$$

令 $\sqrt{a^2+3b^2}=4$ 有 $a^2+3b^2{=}16$，且 $a^2-b^2=4 \implies a=\sqrt{7}$，故应选 C。 □

评注： 该题是一个非常常规的问题，很多学生直接利用联立的方法，计算量非常之大。另外可以考虑光学性质，或者利用对称，但是感觉都不如三角代换的计算量小。

例 2.5.2. $P(x_0,y_0)$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上任一点，求证：椭圆过该点的切线方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$。

证明　因为 $a^2\dfrac{x_0^2}{a^4}+b^2\dfrac{y_0^2}{b^4}=\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，结合式 (2.5.2) 可知，$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ 就是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的切线。 □

例 2.5.3. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 两条垂直切线交点 P 的轨迹方程。

解　设 $P(x_0,y_0)$，过 P 的直线 $l: y-y_0=k(x-x_0)$ 即 $y-kx_0+kx_0-y_0=0$，令其与椭圆相切，由式 (2.5.2) 可得

$$a^2+b^2k^2=(kx_0-y_0)^2 \iff (b^2-x_0^2)k^2+2x_0y_0k+a^2-y_0^2=0,$$

注意到两条切线垂直，各自的斜率 k_1,k_2 应该是上述关于 k 的方程的两根，所以由韦达定理有

$$k_1\cdot k_2=-1 \iff \frac{a^2-y_0^2}{b^2-x_0^2}=-1 \iff x_0^2+y_0^2=a^2+b^2,$$

又如果其中一条切线斜率不存在则可得 $P(\pm a,\pm b)$，满足 $x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$，故 P 的轨迹方程就是 $x^2+y^2=a^2+b^2$。 □

能力提升

3.1 数列不等式的定积分解法——吴炜超

数列不等式很头疼？经常作为考试的压轴？一般来说数列不等式的解法不外乎解出数列通项设法求和，或者直接放缩，或者用数学归纳去证明，本文利用定积分提供一种新的证明方法，或者说新的放缩方法，在常规放缩无效或难以想到的情况下可以试试。

首先介绍这个方法的基本定理：

定理 3.1.1. 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续且可积，且有 $f(x)>0$ 对所有 $x>0$ 成立。

如果 $f(x)$ 为增函数，则对任意 $n>1$ 有

$$\int_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}\,x < f(n) < \int_{n}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

如果 $f(x)$ 为减函数，则对任意 $n>1$ 有

$$\int_{n}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x < f(n) < \int_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}\,x。$$

证明 由于 $f(x)$ 可积，根据积分中值定理可知：

存在 $\xi_1\in(n-1,n)$ 使得

$$\int_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}\,x = (n-(n-1))\,f(\xi_1) = f(\xi_1)；$$

存在 $\xi_2\in(n,n+1)$ 使得

$$\int_{n}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x = (n+1-n)\,f(\xi_2) = f(\xi_2)；$$

而 $\xi_1<n<\xi_2$，显然当 $f(x)$ 为增函数时

$$f(\xi_1)<f(n)<f(\xi_2)；$$

当 $f(x)$ 为减函数时

$$f(\xi_2)<f(n)<f(\xi_1)。$$ □

这里用到积分中值定理，高中不好理解，但因为这个是严格证明，因此还是给出了，下面给出一个比较直观的证明，但不那么严格。

这里以减函数为例：

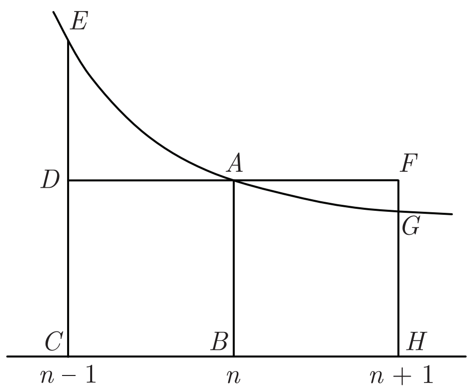


图 3.1.1

证明　$f(x)$ 图象如图 3.1.1，

$$f(n)=(n-(n-1))\,f(n)=(n+1-n)\,f(n)\text{，}$$

就是说

$$f(n)=S_{\text{矩形 }ABCD}=S_{\text{矩形 }ABHF}\text{，}$$

而

$$\int_{n-1}^{n}f(x)\,\mathrm{d}\,x=S_{\text{曲边梯形 }ABCE}>S_{\text{矩形 }ABCD}\text{，}$$
$$\int_{n}^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}\,x=S_{\text{曲边梯形 }ABHG}<S_{\text{矩形 }ABHF}\text{，}$$

因此

$$\int_{n}^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}\,x<f(n)<\int_{n-1}^{n}f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

成立。

同理可证明增函数的情况。 □

推论 3.1.1.1. 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续且可积，且有 $f(x)>0$ 对所有 $x>0$ 成立。

如果 $f(x)$ 为增函数，则对任意 $n>1$ 有

$$\int_{0}^{n}f(x)\,\mathrm{d}\,x<\sum_{k=1}^{n}f(k)<\int_{1}^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}\,x\text{，}$$

如果 $f(x)$ 为减函数，则对任意 $n>1$ 有

$$\int_{1}^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}\,x<\sum_{k=1}^{n}f(k)<\int_{0}^{n}f(x)\,\mathrm{d}\,x\text{。}$$

这个证明很简单，对上面那个公式从 1 到 n 求和即可，这里不再赘述。

好了，公式本身就讲到这里，下面是这个定理的应用。

例 3.1.1. 证明 $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<2$。

这是个经典的题目了，以往都是用 $\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{1}{(k-1)\,k}$ 进行放缩，现在就试试用积分进行放缩。

证明　由于 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}>0$ 恒成立且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，因此有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\int_{1}^{n}\frac{\mathrm{d}\,x}{x^2}=2-\frac{1}{n}<2\text{。}$$ □

注意这里本应该是 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\int_{0}^{n}\frac{\mathrm{d}\,x}{x^2}$ 的，但由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处没有定义，$\displaystyle\int_{0}^{n}\frac{\mathrm{d}\,x}{x^2}$ 是个反常积分而且值为无穷大，这样的放缩显然没有意义，因此这里退一步，从第二项开始放大。

例 3.1.2. 证明 $1+\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{9}+\cdots+\dfrac{\sqrt{n}}{n^2}<3$。

证明　由于 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}=x^{-\frac{3}{2}}>0$ 在 $x>0$ 时恒成立，且 $f(x)$ 为减函数，因此有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n}}{n^2}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{\sqrt{n}}{n^2}<1+\int_{1}^{n}x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,x=3-\frac{2}{\sqrt{n}}<3\text{。}$$ □

例 3.1.3. 试比较 $\dfrac{\ln\left(2^2\right)}{2^2}+\dfrac{\ln\left(3^2\right)}{3^2}+\cdots+\dfrac{\ln\left(n^2\right)}{n^2}$ 与 $\dfrac{(n-1)(2n+1)}{2(n+1)}$ 的大小。

这个题是从一个大题里面抽出的一个小题，其实这个不等式并不强，通过很多种放缩的办法都可以做出，这里就给出积分放缩的做法。

解 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln\left(x^2\right)}{x^2}=\dfrac{2\ln x}{x^2}$，其中 $x>0$，则 $f'(x)=\dfrac{2-4\ln x}{x^3}$，当 $x\geq 2$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，因此 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上为减函数，这样就有当 $n\geq 3$ 时

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln\left(k^2\right)}{k^2}=\frac{\ln\left(2^2\right)}{2^2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln\left(k^2\right)}{k^2}<\frac{\ln 2}{2}+\int_2^n\frac{2\ln x\,\mathrm{d}\,x}{x^2}=\frac{1}{2}+\ln 2-\frac{1+\ln n}{n}<\frac{1}{2}+\ln 2,$$

而

$$\frac{(n-1)(2n+1)}{2(n+1)}=n+\frac{1}{n+1}-\frac{3}{2},$$

当 $n\geq 3$ 时

$$\frac{(n-1)(2n+1)}{2(n+1)}\geq\frac{7}{4}>\frac{1}{2}+\ln 2,$$

因此当 $n\geq 3$ 时

$$\frac{(n-1)(2n+1)}{2(n+1)}>\frac{\ln\left(2^2\right)}{2^2}+\frac{\ln\left(3^2\right)}{3^2}+\cdots+\frac{\ln\left(n^2\right)}{n^2}$$

成立。

当 $n=2$ 时，

$$\frac{\ln\left(2^2\right)}{2^2}=\frac{\ln 2}{2}<\frac{5}{6}=2+\frac{1}{2+1}-\frac{3}{2}$$

成立。

因此

$$\frac{(n-1)(2n+1)}{2(n+1)}>\frac{\ln\left(2^2\right)}{2^2}+\frac{\ln\left(3^2\right)}{3^2}+\cdots+\frac{\ln\left(n^2\right)}{n^2}$$

恒成立。 □

例 3.1.4. 设 $b_n=\dfrac{2(n-1)}{n(n+1)}$，$n\geq 2$，证明 $b_2^2+b_3^2+\cdots+b_n^2<1$。

证明 设函数

$$f(x)=\left(\frac{2(x-1)}{x(x+1)}\right)^2=\frac{4}{x^2}-\frac{16}{x}+\frac{16}{(x+1)^2}+\frac{16}{x+1},$$

则

$$f'(x)=-\frac{8\left(x^2-2x-1\right)(x-1)}{x^3(x+1)^3},$$

当$x\geq 3$ 时 $f'(x)<0$，于是有

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\frac{4(k-1)^2}{k^2(k+1)^2}&=\frac{2}{9}+\sum_{k=4}^{n}\frac{4(k-1)^2}{k^2(k+1)^2}\\&<\frac{2}{9}+\int_3^n\frac{4(x-1)^2}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x\\&=\frac{2}{9}+4\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{n}-\frac{4}{n+1}-8\ln 2+4\ln 3-4\ln n+4\ln(n+1)\right)\\&=\frac{50}{9}-32\ln 2+16\ln 3+16\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{4}{n}-\frac{16}{n+1}\\&<\frac{50}{9}-32\ln 2+16\ln 3\\&<1。\end{aligned}$$

□

例 3.1.5. 设 $f(x)=\dfrac{1+a^x}{1-a^x}$，$0<a\le\dfrac{1}{2}$，试比较 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-n\right|$ 与 4 的大小。

这是一道高考题的最后一问，当然别的办法也可以做出来，这里介绍积分放缩的办法。

解 因为

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)-n=\sum_{k=1}^{n}(f(k)-1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2a^k}{1-a^k},$$

设 $g(x)=\dfrac{2a^x}{1-a^x}$，则 $g'(x)=\dfrac{2a^x\ln(a)}{(1-a^x)^2}<0$，因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}g(k)&=g(1)+\sum_{k=2}^{n}g(k)\\&<\frac{2a}{1-a}+\int_1^n g(x)\,\mathrm{d}\,x\\&=\frac{2a}{1-a}+\int_1^n\frac{2a^x}{1-a^x}\,\mathrm{d}\,x\\&=\frac{2a}{1-a}+\frac{2\ln(1-a)}{\ln a}-\frac{2\ln(1-a^x)}{\ln a}\\&<\frac{2a}{1-a}+\frac{2\ln(1-a)}{\ln a},\end{aligned}$$

令 $h(a)=\dfrac{2a}{1-a}+\dfrac{2\ln(1-a)}{\ln(a)}$，则

$$h'(a)=\frac{2}{1-a}+\frac{2a}{(1-a)^2}-\frac{2\ln(1-a)}{a\ln^2(a)}-\frac{2}{(1-a)\ln(a)}>0,$$

因此

$$h(a)\le h\left(\frac{1}{2}\right)=4。$$

另外由于 $g(x)>0$ 对于 $x>0$ 恒成立，因此

$$\left|\sum_{k=1}^{n}g(k)\right|=\sum_{k=1}^{n}g(k)<h(a)\le 4$$

成立，所以

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(k)-n\right|<4。$$

□

最后给出一个利用积分不等式求极限的例子。

例 3.1.6. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$。

解 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，显然 $f(x)>0$ 且递减，因此有

$$\int_{n+1}^{2n+1}\frac{\mathrm{d}\,x}{x}<\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}<\int_n^{2n}\frac{\mathrm{d}\,x}{x},\quad \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)<\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}<\ln 2,$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)=\ln 2$，根据夹逼法则可知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\ln 2。$$

□

3.2 例谈不等式证明中的“切线法”及其拓展——郭子伟

“切线法”作为初等不等式证明的一种入门方法，我相信有一定数学解题经验的应该都有所了解，特别是对不等式爱好者来说更属于常识。我在论坛上解题或讨论时也不时提及此法，发现此法的普及程度仍然不高，经常还是有人询问相关资料，或是对此法仅是掌握其表面而未能得其思想精髓。

然而，我在网络上也未曾见过一篇对此法讲解得比较好的文章，不知是觉得太简单没什么可写而没人去写还是只是我搜索能力太差。由此，经网友建议，我决定自己写一篇，发表在此刊以普及此法并试图给出一定的拓展，可以说是小题大作一番，请不等式高手们莫见笑。

一、“切线法”的基础思想

下面先由两个简单的例子来引入何谓“切线法”：

例 3.2.1. 已知 $a,b,c\geq 0, a+b+c=1$，记 $T=\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}$，求证：$T\leq\sqrt{21}$。

分析 如果我们在放缩时能把根号去掉，并且化为一次的多项式，那么就可以代入已知条件从而解决问题。观察式子，由对称性，我们只要找到适当的常数 p,q 满足

$$\sqrt{4a+1}\leq pa+q \tag{3.2.1}$$

即可达到目的。把式 (3.2.1) 左右两边分别看作关于 a 的函数 $f(a)$ 和 $g(a)$，据根经验，我们猜得原不等式的取等条件为 $a=b=c=\frac{1}{3}$，因此要有 $f\left(\frac{1}{3}\right)=g\left(\frac{1}{3}\right)$。另一方面，注意到 $g(a)=pa+q$ 是直线函数，要不等式成立则 $f(a)$ 的图象要在该直线的下方。这样一来，很自然地想到，同时满足这两要求的 $g(a)$ 应是 $f(a)$ 在 $a=\frac{1}{3}$ 处的切线，“切线法”这一名称由此得来。具体地，求得的切线为

$$2\sqrt{\frac{3}{7}}\left(a-\frac{1}{3}\right)+\sqrt{\frac{7}{3}},$$

剩下的工序就是将此切线代入式 (3.2.1) 中证明其成立。

证明 由已知条件，显然有 $a\in[0,1]$，我们先证明此时有

$$\sqrt{4a+1}\leq 2\sqrt{\frac{3}{7}}\left(a-\frac{1}{3}\right)+\sqrt{\frac{7}{3}}。\tag{3.2.2}$$

不难看出上式不等号两边均为非负，故由

$$\left(2\sqrt{\frac{3}{7}}\left(a-\frac{1}{3}\right)+\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2-(4a+1)=\frac{4}{21}(3a-1)^2\geq 0,$$

可知式 (3.2.2) 成立。同理对 b,c 也有类似的两式，三式相加得到

$$T\leq 2\sqrt{\frac{3}{7}}(a+b+c-1)+3\sqrt{\frac{7}{3}}=\sqrt{21},$$

当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时等号成立。 □

例 3.2.2. 已知 $a,b,c\geq 0, a+b+c=3$，求证：

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+bc+ca。$$

分析 这题待证不等式的形式与例 3.2.1 不一样，需要先转化为 $f(a)+f(b)+f(c)\leq$ (或 $\geq$) C 的形式再考虑切线。

证明 由已知条件，有

$$\begin{aligned}\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+bc+ca &\iff \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq \frac{(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2}{2}\\ &\iff a^2+2\sqrt{a}+b^2+2\sqrt{b}+c^2+2\sqrt{c}\geq 9。\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

$f(x)=x^2+2\sqrt{x}$ 在 $x=1$ 处的切线为 $y=3x$，故尝试证明

$$a^2+2\sqrt{a}\geq 3a,$$

事实上，由均值不等式，上式显然成立，故式 (3.2.3) 成立，原不等式得证。 □

以上两例是典型的切线法解决不等式问题的例子，其方法可以归纳为：

切线法 对于 $x_1,x_2,\ldots,x_n\in D, x_1+x_2+\cdots+x_n=k$，$D$ 为给定区间，k 为常数，求证

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\leq (\text{或}\geq)\ C \tag{3.2.4}$$

这样的条件不等式，当观察得取等条件为 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{k}{n}$ 时，可以找出 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{k}{n}$ 处的切线函数 $px+q$（假设 f 可导），尝试证明局部不等式

$$f(x)\leq (\text{或}\geq)\ px+q, \tag{3.2.5}$$

若式 (3.2.5) 区间 D 内恒成立，则式 (3.2.4) 成立。 □

求切线可以使用导数和点斜式的常规方法，也可以待定系数，这相信大家都会的，所以关键就是式 (3.2.5) 能不能证出。然而，并非所有这类题目求出来的切线都能使式 (3.2.5) 在 D 内恒成立，实践经验告诉我，恒成立的很多，不恒成立的也很多。因此，切线法属于试探性的方法，并非通用的完备方法。

有人也许会觉得这类题也可以用琴生不等式去解（如例 3.2.1）。但事实上，若仅就此类题来说，切线法比琴生不等式的适用范围更广，因为使用琴生不等式需要函数保凸，而切线法则只需函数图象在切线的一侧即可，例 3.2.2 的函数 $x^2+2\sqrt{x}$ 就是半凹半凸的，不能直接使用琴生不等式，而并无碍于切线法的使用。当然，在其他领域，琴生不等式的应用更多，不是切线法能比的。

对于 $f(x)$ 是多项式或简单分式的情形，一般与切线作差后就能分解出 $\left(x-\dfrac{k}{n}\right)^2$ 之类的因式，注意了这一点后，在实际计算上就比较好算了。还有就是在思考时可以大概想想函数图象，便于快速判定切线是否可行。以上两例中分析的函数及其切线分别如图 3.2.1 及 3.2.2 所示。

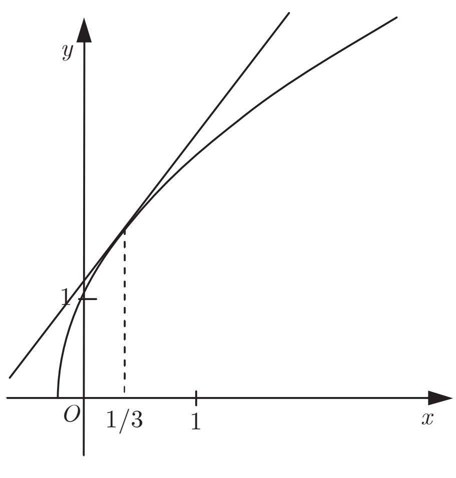


图 3.2.1

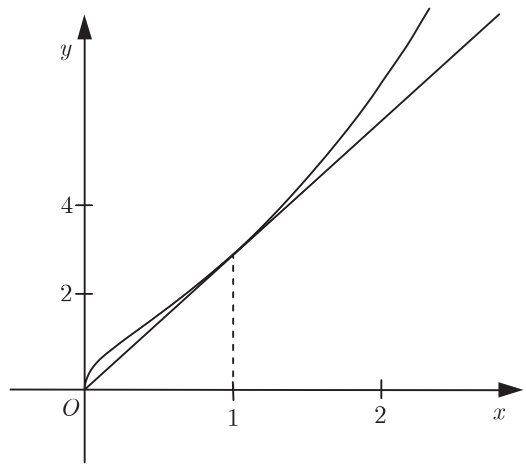


图 3.2.2

二、退一步，分类使用切线法

如果碰到找出的切线对式 (3.2.5) 并不恒成立，是不是就要放弃切线法的方向？其实，我们可以退一步，有些时候不成立的只是一部分区间，这时我们可以先对不成立的区间部分进行讨论，假如讨论成功就好，剩下成立的区间继续切线之。下面举两例说明：

例 3.2.3. 已知 $a,b,c\in\mathbb{R}, a+b+c=3$，求证：

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}\le\frac{1}{4}。\tag{3.2.6}$$

分析 取等条件为 $a=b=c=1$，求出 $\dfrac{1}{5a^2-4a+11}$ 在 $a=1$ 处的切线为 $\dfrac{1}{24}(3-a)$，但

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}\le\frac{1}{24}(3-a)\iff(a-1)^2(5a-9)\le 0$$

显然只对 $a\le\dfrac{9}{5}$ 成立，故需分类讨论。

证明 当 a,b,c 中有一个大于 $\dfrac{9}{5}$，由对称性不妨设 $a>\dfrac{9}{5}$。因二次函数 $5x^2-4x+11$ 开口向上且对称轴为 $x=\dfrac{2}{5}$，所以有

$$\begin{aligned}5a^2-4a+11&>5\cdot\left(\frac{9}{5}\right)^2-4\cdot\frac{9}{5}+11=20,\\5b^2-4b+11&\ge5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2-4\cdot\frac{2}{5}+11=11-\frac{4}{5}>10,\\5c^2-4c+11&\ge5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2-4\cdot\frac{2}{5}+11=11-\frac{4}{5}>10,\end{aligned}$$

从而

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}<\frac{1}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{4};$$

当 a,b,c 都不大于 $\dfrac{9}{5}$ 时，由前面的分析知 $\dfrac{1}{5a^2-4a+11}\le\dfrac{1}{24}(3-a)$，所以

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}\le\frac{1}{24}(3-a)+\frac{1}{24}(3-b)+\frac{1}{24}(3-c)=\frac{1}{4}。$$

综上所述，式 (3.2.6) 成立。 □

上例的其他证法见：`http://bbs.pep.com.cn/thread-682529-1-1.html`。

例 3.2.4. 已知 $a,b,c\ge 0, a+b+c=3$，求证：

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\ge ab+bc+ca。\tag{3.2.7}$$

本题与例 3.2.2 仅是指数之差，将二次根式改成三次根式，但难度却大了不少。本题曾在国际著名数学论坛 mathlinks 上出现过（见 `http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=367619`），并且笔者在贴内未发现有简洁解法贴出。后来笔者通过分类讨论使用切线法，对本题给出如下的相对简单的证法。

证明 由对称性，不妨设 $c=\min\{a,b,c\}$，下面分两种情况讨论。

（1）当 $c<\dfrac{1}{6}$ 时。不难证明此时有 $\sqrt[3]{c}\ge 3c$，于是有

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\ge\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+3c=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+c^2+bc+ca,$$

于是我们只需证明

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\geq ab。$$

令 $t=\sqrt[6]{ab}$，由均值不等式，有

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-ab\geq 2t-t^6=t\left(2-t^5\right),$$

以及

$$0\leq t^5\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{5}{3}}\leq\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5}{3}},$$

又由 $8-\left(\frac{3}{2}\right)^5=\frac{13}{32}>0$，所以 $2-t^5\geq 0$，即得 $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\geq ab$，即此时式 (3.2.7) 成立；

（2）当 $c\geq\frac{1}{6}$ 时。由切线法分析得

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\geq ab+bc+ca\\
\Longleftrightarrow\ &\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\geq\frac{(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}\\
\Longleftrightarrow\ &2\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)+a^2+b^2+c^2\geq 9\\
\Longleftrightarrow\ &\sum_{cyc}\left(2\sqrt[3]{a}+a^2-\frac{8a+1}{3}\right)\geq 0\\
\Longleftrightarrow\ &\sum_{cyc}\left(\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{a}-1\right)^2\left(3\sqrt[3]{a^4}+9\sqrt[3]{a^2}+4\sqrt[3]{a}+6a-1\right)\right)\geq 0,
\end{aligned}$$

最后一式显然成立因为 $a,b,c\geq\frac{1}{6}$，即此时式 (3.2.7) 也成立。

综上所述，式 (3.2.7) 得证。 □

三、齐次无条件可制造条件

有一类不等式，虽然没有和为定值的条件，但有齐次性，故可以自行加设条件（关于齐次不等式的概念及加设条件的依据可参见笔者在人教论坛上发过一篇文章《关于不等式证明中的不妨设问题》），使之成为可用切线法的条件不等式。我们继续举例说明：

例 3.2.5. 已知 $x,y,z\in\mathbb{R}^+$，求证：

$$\frac{(x+y-z)^2}{(x+y)^2+z^2}+\frac{(y+z-x)^2}{(y+z)^2+x^2}+\frac{(z+x-y)^2}{(z+x)^2+y^2}\geq\frac{3}{5}。$$

证明 由于不等式中的变元为正，并且不等式是齐次不等式，故可不妨设 $x+y+z=1$，则

$$\frac{(x+y-z)^2}{(x+y)^2+z^2}=\frac{(1-2z)^2}{(1-z)^2+z^2},$$

而

$$\frac{(1-2z)^2}{(1-z)^2+z^2}\geq-\frac{54}{25}z+\frac{23}{25}\iff\frac{z(1+6z)(1-3z)^2}{25(1-z)^2+25z^2}\geq 0,$$

显然成立，由此可得

$$\frac{(x+y-z)^2}{(x+y)^2+z^2}+\frac{(y+z-x)^2}{(y+z)^2+x^2}+\frac{(z+x-y)^2}{(z+x)^2+y^2}\geq-\frac{54}{25}(x+y+z)+3\cdot\frac{23}{25}=\frac{3}{5}。$$

故原不等式得证。 □

四、延伸到支撑线分析

前面讲述的切线法中提到需要观察取等条件为 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时才可以继续构造切线去放缩，然而有时候虽然不等式完全对称，但取等条件却不一定在各元相等时取得。比如我们就将例 3.2.1 改一改，考虑 T 的下界，得到下例：

例 3.2.6. 已知 $a, b, c \geq 0, a+b+c = 1$，记 $T = \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1}$，求证：$T \geq \sqrt{5} + 2$。

分析 不难观察出此时的取等条件是 a, b, c 中两个为 0 另一个为 1，切线法失效。但思想是活的，我们延续切线法的思想，仍然希望将各项放缩成直线函数 $px+q$，要满足 $\sqrt{4a+1} \geq pa+q$ 而且由取等条件应当 $a = 0, 1$ 时两边相等，由此，设 $f(a) = \sqrt{4a+1}$，则 $pa+q$ 应是过两点 $(0, f(0)), (1, f(1))$ 的直线 $(\sqrt{5}-1)a+1$，假如在由条件所限的区间内 $f(a)$ 的图象在该直线上方，问题就有望得到解决。事实上，想想图象就知道这是显然的（如图 3.2.3 所示），所以剩下的工序就是证明这一事实成立。

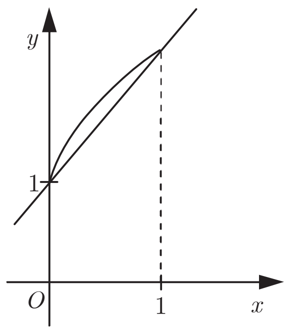


图 3.2.3

证明 由已知条件，显然有 $a \in [0, 1]$，我们先证明此时有

$$\sqrt{4a+1} \geq (\sqrt{5}-1)a + 1。\tag{3.2.8}$$

由

$$4a+1 - \Big((\sqrt{5}-1)a+1\Big)^2 = 2(3-\sqrt{5})a\,(1-a) \geq 0,$$

可知式 (3.2.8) 成立。同理对 b, c 也有类似的两式，三式相加得到

$$T \geq (\sqrt{5}-1)\,(a+b+c) + 3 = \sqrt{5}+2,$$

当 a, b, c 中两个为 0 另一个为 1 时等号成立。 □

由此证法可见，若改变变量范围的下界，比如改成 $a, b, c \geq -\dfrac{1}{4}$，则只需将直线改为过点 $\left(-\dfrac{1}{4}, f\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right)$ 和 $(1, f(1))$ 即可。此例的其他证法见：`http://bbs.pep.com.cn/thread-929810-1-1.html`。

由图象的特点，这里形象地把这种分析方法称作“支撑线分析法”，两曲线的公共点称作“支撑点”。而且，寻找的支撑线还不一定要是直线，还可以是一般曲线，下面再举一例：

例 3.2.7. 已知 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ 且 $a^2+b^2+c^2+d^2 = 4$，求证：

$$a^5+b^5+c^5+d^5 \leq 2\left(8+a^3+b^3+c^3+d^3\right) \leq 32。$$

分析 由于这次的条件是二次式，所以我们不能放缩为直线函数了，而是希望能放缩成不含一次项的二次函数，这样才能代入已知条件。

先看右边的不等式，我们应该设法将待证式中的三次式放缩为二次式 px^2+q。通过观察，不难发现原不等式的取等条件是 a, b, c, d 中三个为 0 另一个为 2。这样一来，我们需要找的是一条被三次函数 $f(x) = x^3$“支撑”的二次函数 $g(x) = px^2+q$，并且“支撑点”是 $(0, f(0))$ 和 $(2, f(2))$。由已知条件知各元的取值区间是 $[-2, 2]$，再想象一下在这区间内的图象，可知 $g(x) = 2x^2$ 符合以上要求且显然可行。

再看左边的不等式，取等条件相同，故类似地分析，可知需要找一条被函数 $h(x) = x^5 - 2x^3$“支撑”的二次函数 $i(x) = rx^2+s$ 并且“支撑点”是 $(0, h(0))$ 和 $(2, h(2))$，由此不难找出是 $i(x) = 4x^2$，但由于 $h(x)$ 的次数较高，其图象不容易想，要到尝试证明的时候才知道是否可行了。

证明 由已知条件，显然有 $a, b, c, d \in [-2, 2]$。对于右边的不等式，先证明

$$a^3 \leq 2a^2。\tag{3.2.9}$$

由

$$2a^2 - a^3 = a^2(2-a) \geq 0,$$

可知式 (3.2.9) 成立。同理对 b, c, d 也有类似的三式，故此

$$2\left(8 + a^3 + b^3 + c^3 + d^3\right) \leq 2\left(8 + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2\right) = 32;$$

对于左边的不等式，先证明

$$a^5 - 2a^3 \leq 4a^2。 \tag{3.2.10}$$

由

$$4a^2 - a^5 + 2a^3 = a^2(2-a)\left((a+1)^2 + 1\right) \geq 0,$$

可知式 (3.2.9) 成立。同理对 b, c, d 也有类似的三式，故此

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 \leq 2a^3 + 4a^2 + 2b^3 + 4b^2 + 2c^3 + 4c^2 + 2d^3 + 4d^2 = 2\left(8 + a^3 + b^3 + c^3 + d^3\right)。$$

综上所述，原不等式成立，取等条件均为 a, b, c, d 中三个为 0 另一个为 2。 □

上例中所分析的支撑线图象如图 3.2.4 所示。

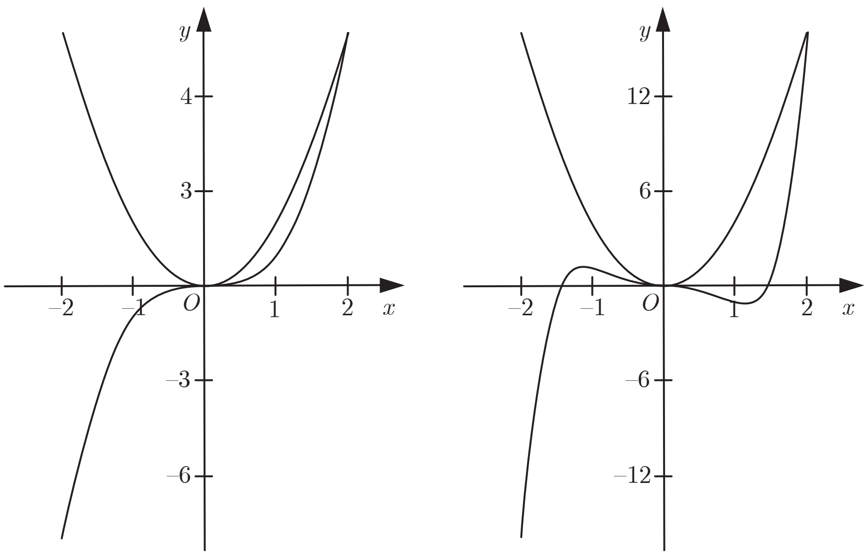


图 3.2.4

由这两例可以看出，支撑线分析法处理不等式问题的关键是先要看准取等条件，然后寻找适当的过取等点的与已知条件等式相关的函数，寻找时可联系图象。如果能找到与待证不等式的项的函数有不等关系的函数（在图象上看也就是能“支撑”并且取等点是“支撑点”时），问题就有望被解决。在一定程度上，切线法也可以看作是支撑线分析法的一种特例（切点为支撑点）。当然，这种分析法也是试探性方法，而且实践中，非切线的支撑线分析法的可行率相对较低。

五、拓展到空间

前面讲述的都是待证不等式的项都是一元函数的情形，故用切线法或支撑线分析，那么如果待证不等式的项都是二元函数呢？类比一下，自然想到的是切平面或支撑面分析。下面举例说明：

例 3.2.8. 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ 且 $a + b + c = 3$，求证：

$$\frac{a^2(b+1)}{a+b+ab} + \frac{b^2(c+1)}{b+c+bc} + \frac{c^2(a+1)}{c+a+ca} \geq 2。$$

分析 考虑二元函数 $f(a,b)=\dfrac{a^2(b+1)}{a+b+ab}$，由切线法的思想，希望将其放缩到 $g(a,b)=pa+qb+n$，由于取等条件为 $a=b=c=1$，故可尝试构造 $f(a,b)$ 在点 $(1,1,f(1,1))$ 处的切平面作为目标 $g(a,b)$。记 $K(a,b)=\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial a}$，$U(a,b)=\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial b}$，故 $g(a,b)$ 应该满足方程组

$$\begin{cases} f(1,1)=g(1,1), \\ K(1,1)=p, \\ U(1,1)=q, \end{cases}$$

解得

$$g(a,b)=\frac{8a-b-1}{9}。$$

最后验证是否可行。

证明 由

$$\frac{a^2(b+1)}{a+b+ab}-\frac{8a-b-1}{9}=\frac{(a-b)^2+a(b-1)^2+b(a-1)^2}{9(a+b+ab)}\geq 0,$$

得到

$$\frac{a^2(b+1)}{a+b+ab}\geq\frac{8a-b-1}{9},$$

故

$$\frac{a^2(b+1)}{a+b+ab}+\frac{b^2(c+1)}{b+c+bc}+\frac{c^2(a+1)}{c+a+ca}\geq\frac{8a-b-1}{9}+\frac{8b-c-1}{9}+\frac{8c-a-1}{9}=2。$$ □

类似地，在理论上也有支撑面分析等等方法，甚至可以更多元，总之思想都是一样的。而需要说明的是，由于空间曲面方程的性质比较复杂，一般难以直接看出是否可行，实践经验告诉我，切平面或支撑面分析法的可行率更加低。

六、灵活运用

前面我一直强调，上述这些方法都是试探性的方法，所以有的时候即使满足上述形式，分析出来的支撑线面等也不一定可行，分类讨论也不一定能简单地证出。还有更多的不等式并不能直接套用或转化为这些方法的模式上。但我也强调思想是活的，比如有些时候虽然在一整项上行不通，而在局部运用也能达到很好的效果。所以，我们要灵活运用上述这些方法，至于该怎么选择怎么用，这就要靠大家积累经验，慢慢体会了。

例 3.2.9. 已知 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ 且 $a+b+c=1$，求证：

$$\frac{b}{1+a}+\frac{c}{1+b}+\frac{a}{1+c}\geq\frac{3}{4}。$$

分析 这题每一项是二元函数，用切平面分析后发现不可行。但如果将 $\dfrac{b}{1+a}$ 看作 $b\cdot\dfrac{1}{1+a}$ 而仅对 $\dfrac{1}{1+a}$ 使用切线法时，注意到其图象是递减且下凸的，所以将会在斜率为负的切线上方，这样放缩后将会出现一次项以及负系数的 ab 项，而后者经三式求和后显然可以由均值再放缩到 $(a+b+c)^2$，这样如无意外下就证得了。

证明 由切线法有

$$\frac{1}{1+a}\geq-\frac{3}{16}(3a-5)\iff\frac{(3a-1)^2}{16(1+a)}\geq 0,$$

以及两外两式，三式相加再由均值不等式，有

$$\begin{aligned}\frac{b}{1+a}+\frac{c}{1+b}+\frac{a}{1+c}&\geq-\frac{3}{16}b(3a-5)-\frac{3}{16}c(3b-5)-\frac{3}{16}a(3c-5)\\&=-\frac{9}{16}(ab+bc+ca)+\frac{15}{16}(a+b+c)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq -\frac{9}{16}\cdot\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{15}{16}(a+b+c)\\
&=\frac{3}{4},
\end{aligned}
$$

原不等式得证。 □

例 3.2.10. 已知 $x,y,z\in\mathbb{R}^+$ 且 $xyz=1$，求证：

$$\frac{x^3}{(1+x)(1+y)}+\frac{y^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{z^3}{(1+z)(1+x)}\geq\frac{3}{4}。$$

证明 去分母整理知原不等式等价于

$$x^3(1+z)+y^3(1+x)+z^3(1+y)\geq\frac{3}{4}(2+x+y+z+xy+yz+zx),$$

由切线法易得 $x^3\geq 3x-2$ 等等，于是

$$
\begin{aligned}
x^3(1+z)+y^3(1+x)+z^3(1+y)&\geq(3x-2)(1+z)+(3y-2)(1+x)+(3z-2)(1+y)\\
&=3(xy+yz+zx)+x+y+z-6,
\end{aligned}
$$

由均值不等式有

$$
\begin{aligned}
&3(xy+yz+zx)+x+y+z-6-\frac{3}{4}(2+x+y+z+xy+yz+zx)\\
=&\frac{9}{4}(xy+yz+zx)+\frac{1}{4}(x+y+z)-\frac{15}{2}\\
\geq&\frac{27}{4}+\frac{3}{4}-\frac{15}{2}=0,
\end{aligned}
$$

故原不等式成立。 □

习题

以下题目主要针对本文所述的方法而设，有的题相信有人见过并熟悉，也有的题是原创题。大家除了试用本文所述的方法求解之外，也希望多思考其他方法，尽可能多解，也可以去加强、推广等，总之就由大家发挥了。参考解答将在下期贴出。

题目 3.2.1. (2010 南昌市一模题) 已知 $f(x)=\dfrac{3+x}{1+x^2},x\in[0,3]$，已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_n\leq 3$ 且 $a_1+a_2+\cdots+a_{2010}=670$，则 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{2010})$ 的最大值为______。

题目 3.2.2. 已知 $a,b,c\geq -1$ 且 $a+b+c=3$，求证：

$$2(a^2+b^2+c^2)\geq a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)。$$

题目 3.2.3. 已知 $a,b,c\geq 0$ 且 $a+b+c=1$，求 $\dfrac{a}{1+a^2}+\dfrac{b}{1+b^2}+\dfrac{c}{1+c^2}$ 的取值范围。

题目 3.2.4. 已知 $a,b,c>0$ 且 $a+b+c=3$，试证 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\geq a^2+b^2+c^2$ 并尝试推广到四元。

题目 3.2.5. 已知 $a,b,c>0$，求证：

$$\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2}\leq\frac{6}{5}。$$

题目 3.2.6. 已知 $a,b,c\geq -1$ 且 $(a+b+c-1)^2=2(ab+bc+ca+2)$，求证：

$$\frac{a+1}{a+3}+\frac{b+1}{b+3}+\frac{c+1}{c+3}\geq\frac{2}{3}。$$

题目 3.2.7. 已知 $a,b,c\geq 0$ 且 $a+b+c=3$，求证：

$$\frac{1}{2ab^2+1}+\frac{1}{2bc^2+1}+\frac{1}{2ca^2+1}\geq 1。$$

题目 3.2.8. 已知 $a,b,c>0$ 且 $a^2+b^2+c^2=3$，求证：

$$\frac{(b+c)^2}{a^a+1}+\frac{(c+a)^2}{b^b+1}+\frac{(a+b)^2}{c^c+1}\leq 6。$$

3.3 某些特殊角的三角函数值——何万程

在科学计算里经常需要用到特殊角的三角函数值，特别是在平面几何及立体几何里，特殊角的三角函数更是经常需要用的。下面将角度值为 3 的整数倍的三角函数值以及 $22°30'$、$67°30'$ 的三角函数值的代数计算方法做个总结。

15°、75° 的三角函数值

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$\tan 15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°} = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = 2 - \sqrt{3}，\cot 15° = \frac{\cos 15°}{\sin 15°} = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = 2 + \sqrt{3},$$

$$\sin 75° = \cos 15° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}，\cos 75° = \sin 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

$$\tan 75° = \cot 15° = 2 + \sqrt{3}，\cot 75° = \tan 15° = 2 - \sqrt{3}。$$

18°、36°、54°、72° 的三角函数值

由于 $2 \times 18 = 36$，$3 \times 18 = 54$，$36 + 54 = 90$，于是 $\sin 36° = \cos 54°$，即

$$2 \sin 18° \cos 18° = 4 \cos^3 18° - 3 \cos 18°,$$

化简得 $4 \sin^2 18° + 2 \sin 18° - 1 = 0$，得解 $\sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$，于是

$$\cos 18° = \sqrt{1 - \sin^2 18°} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\tan 18° = \frac{\sin 18°}{\cos 18°} = \frac{\frac{\sqrt{5} - 1}{4}}{\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}} = \frac{\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}}{5}，\cot 18° = \frac{\cos 18°}{\sin 18°} = \frac{\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{5} - 1}{4}} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}},$$

$$\sin 36° = 2 \sin 18° \cos 18° = 2 \times \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \times \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\cos 36° = 2 \cos^2 18° - 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4},$$

$$\tan 36° = \frac{\sin 36°}{\cos 36°} = \frac{\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{5} + 1}{4}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}，\cot 36° = \frac{\cos 36°}{\sin 36°} = \frac{\frac{\sqrt{5} + 1}{4}}{\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}} = \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{5},$$

$$\sin 54° = \cos 36° = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}，\cos 54° = \sin 36° = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\tan 54° = \cot 36° = \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{5}，\cot 54° = \tan 36° = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}},$$

$$\sin 72° = \cos 18° = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}，\cos 72° = \sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

$\tan 72° = \cot 18° = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$，$\cot 72° = \tan 18° = \dfrac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$。

22°30′、67°30′ 的三角函数值

$$\sin 22°30' = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}，\cos 22°30' = \sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}，$$
$$\tan 22°30' = \frac{1-\cos 45°}{\sin 45°} = \sqrt{2}-1，\cot 22°30' = \frac{1}{\tan 22°30'} = \sqrt{2}+1，$$
$$\sin 67°30' = \cos 22°30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}，\cos 67°30' = \sin 22°30' = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}，$$
$$\tan 67°30' = \cot 22°30' = \sqrt{2}+1，\cot 67°30' = \tan 22°30' = \sqrt{2}-1。$$

特殊角三角函数值汇总表

表 3.3.1　常用特殊角三角函数值

角度	正弦值	余弦值	正切值	余切值
$0°$	0	1	0	不存在
$15°$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$18°$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$22°30'$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$36°$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$54°$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$67°30'$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
$72°$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$
$15°$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90°$	1	0	不存在	0

利用上面的结果以及下面这些式子：$3=18-15$，$6=36-30$，$9=54-45$，$12=30-18$，$21=36-15$，$24=60-36$，$27=72-45$，$33=15+18$，$39=75-36$，$42=72-30$，结合诱导公式，便可求得角度为 3 的整数倍的所有三角函数的精确值，这些计算只是繁琐，没什么特殊技巧，这里就不再详细写计算过程了，只只把计算结果汇总成个表 3.3.2 和表 3.3.3。

表 3.3.2　特殊角正弦值

	0	**3**	**6**
0	0	$\dfrac{\sqrt{8-\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1}{8}$
9	$\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8}$	$\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}}{8}$	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
18	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\dfrac{\sqrt{8+\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$
27	$\dfrac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{10}+\sqrt{2}}{8}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{8-\sqrt{3}-\sqrt{15}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{4}$
36	$\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{8-\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1}{8}$
45	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}}{8}$	$\dfrac{\sqrt{8+\sqrt{3}-\sqrt{15}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$
54	$\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\dfrac{\sqrt{8+\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
63	$\dfrac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{10}-\sqrt{2}}{8}$	$\dfrac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1}{8}$	$\dfrac{\sqrt{8-\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$
72	$\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}{8}$
81	$\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}+2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8}$	$\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$	$\dfrac{\sqrt{8+\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{4}$

注：表头（β）和第一列（α）的数字都是角度，表中的角都使用角度制，中间的值就是 $\sin(\alpha+\beta)$。

表 3.3.3　特殊角正切值

	0	**3**
0	0	$\dfrac{\sqrt{110-60\sqrt{3}+46\sqrt{5}-28\sqrt{15}}+4-3\sqrt{3}+2\sqrt{5}-\sqrt{15}}{2}$
6	$\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}$	$1+\sqrt{5}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
12	$\dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{50-22\sqrt{5}}}{2}$	$2-\sqrt{3}$
18	$\dfrac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\dfrac{\sqrt{110+60\sqrt{3}-46\sqrt{5}-28\sqrt{15}}-4-3\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{15}}{2}$
24	$\dfrac{\sqrt{50+22\sqrt{5}}-3\sqrt{3}-\sqrt{15}}{2}$	$\sqrt{5}-1-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
30	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{\sqrt{110-60\sqrt{3}+46\sqrt{5}-28\sqrt{15}}-4+3\sqrt{3}-2\sqrt{5}+\sqrt{15}}{2}$
36	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\dfrac{\sqrt{110-60\sqrt{3}-46\sqrt{5}+28\sqrt{15}}+4-3\sqrt{3}-2\sqrt{5}+\sqrt{15}}{2}$

表 3.3.3 （续）

	0	**3**
42	$\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$	1
48	$\dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{15}+\sqrt{50-22\sqrt{5}}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{110+60\sqrt{3}-46\sqrt{5}-28\sqrt{15}}+4+3\sqrt{3}-2\sqrt{5}-\sqrt{15}}{2}$
54	$\dfrac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$	$\dfrac{\sqrt{110+60\sqrt{3}+46\sqrt{5}+28\sqrt{15}}-4-3\sqrt{3}-2\sqrt{5}-\sqrt{15}}{2}$
60	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}-1+\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
66	$\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{110-60\sqrt{3}-46\sqrt{5}+28\sqrt{15}}-4+3\sqrt{3}+2\sqrt{5}-\sqrt{15}}{2}$
72	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$2+\sqrt{3}$
78	$\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$	$1+\sqrt{5}+\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
84	$\dfrac{\sqrt{50+22\sqrt{5}}+\sqrt{15}+3\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{110+60\sqrt{3}+46\sqrt{5}+28\sqrt{15}}+4+3\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{15}}{2}$

注：表头（β）和第一列（α）的数字都是角度，表中的角都使用角度制，中间的值就是 $\tan(\alpha+\beta)$。

3.4 把非负整数表示为整数的平方和、把整数表示为整数的立方和——何万程

平方和问题

因为 $0=0^2+0^2$，$1=(\pm1)^2+0^2$，因此只需要讨论整数 $n\geq2$ 时是否能表示为整数的平方和即可。

定理 3.4.1. $4k+1$ 型（即除 4 余 1）素数能唯一表示为两个正整数的平方和。

定理 3.4.2. 整数 $n\geq2$，若 n 能表示为整数的平方和的充要条件是：n 的 $4k+3$ 型（即除 4 余 3）素数的次数是偶数。

以上两个定理在初等数论里有详细的证明，这里就不再重复了，有兴趣的读者可以自己找相关资料看看。

下面讨论不定方程 $x^2+y^2=n$ 的解法，只讨论有解的情况，其中 n 是非负整数。

如果 $n=2^k p_1p_2\cdots p_l q_1^2q_2^2\cdots q_m^2$，

（a）p_j 是素数，$p_j\equiv1\pmod 4$，

（b）q_j 是素数，$q_j\equiv3\pmod 4$，

以上 $j=1,2,\cdots,m$。

因为

$$\begin{aligned}\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)&=(a+bi)(c+di)(a-bi)(c-di)\\&=(ac-bd+(ad+bc)i)(ac-bd-(ad+bc)i)\\&=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2\,,\end{aligned}$$

要使 $x^2+y^2=(x+yi)(x-yi)=n$，那么必然有

$$x+yi=i^{\kappa}\underbrace{(1\pm i)(1\pm i)\cdots(1\pm i)}_{k\text{ 个}}(u_1\pm v_1i)(u_2\pm v_2i)\cdots(u_l\pm v_li)\,q_1q_2\cdots q_m,$$

$$x-yi=i^{4-\kappa}\underbrace{(1\mp i)(1\mp i)\cdots(1\mp i)}_{k\text{ 个}}(u_1\mp v_1i)(u_2\mp v_2i)\cdots(u_l\mp v_li)\,q_1q_2\cdots q_m。$$

其中 $0\leq\kappa\leq3$，$u_i^2+v_i^2=p_i$，上面的 $\pm$ 和 $\mp$ 可以任意选择，但必须上面与下面所选择的符号不相同。

以上这个方法最后一步的复数分解原理是利用了代数数论中的高斯整数（即复数 $a+bi$，a、b 都是整数）的唯一分解定理，这里就不详细证明了。

其中 $4k+1$ 型表示为整数的平方和可以用尝试的方法，但最好的方法是利用连分数的方法求解，不过这个方法需要比较多的预备知识，这里就不讲了。

例 3.4.1. 求 $x^2+y^2=66034$ 所有满足 $x\leq y$ 的非负整数解。

解 因为 $66034=2\times137\times241$，而

$$2=(1+i)(1-i)\,,\ 137=(11+4i)(11-4i)\,,\ 241=(15+4i)(15-4i)\,,$$

又

$$\begin{aligned}(1+i)(4+11i)(4+15i)&=45+253i,\\(1-i)(4+11i)(4+15i)&=253-45i,\\(1+i)(4-11i)(4+15i)&=197+165i,\\(1+i)(4+11i)(4-15i)&=165+197i,\end{aligned}$$

所以 $x^2+y^2=66034$ 所有满足 $x\leq y$ 的非负整数解是

$$x=45，y=253；x=165，y=197。$$

□

立方和问题

现在讨论给定整数 n，是否有 $n=x^3+y^3$，其中 x、y 都是整数，$x \geq y$。

由于 $n<0$ 时的情况与其相反数的情况是相同的，而 $0=0^3+0^3$，$1=1^3+0^3$，只需要讨论 $n>1$ 的情况。因为

$$x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right),$$

而

$$x^2-xy+y^2>0,$$

所以必然

$$x+y>0。$$

设 $n=ab$，其中 a、b 都是正整数。可令

$$x+y=a，x^2-xy+y^2=b,$$

消去 y，得方程

$$3x^2-3ax+a^2-b=0$$

其判别式是

$$12b-3a^2,$$

于是必须

$$4b-a^2=3k^2,$$

其中 k 是非负整数。可以确定 a 和 k 的奇偶性相同，由此得

$$x=\frac{a+k}{2}，y=\frac{a-k}{2}。$$

因此，只要 n 分解成两个正整数 a、b（$4b \geq a^2$）满足 $4b-a^2=3k^2$（k 是非负整数），则 n 可以表示为两整数的立方和，并且 $x=\dfrac{a+k}{2}$，$y=\dfrac{a-k}{2}$；若全部分解形式都不满足上述条件，则 n 不能表示为两整数的立方和。

例如 $n=2189$，可以 $a=1$，$b=2189$ 或 $a=11$，$b=199$。但 $a=1$，$b=2189$ 时 $4b-a^2$ 不能被 3 整除；$a=11$，$b=199$ 时 $k=15$，此时 $x=13$，$y=-2$。于是 n 只能表示为 $13^3+(-2)^3$。

根据上述讨论方法，可得

定理 3.4.3. n 是素数时，若有 $n=x^3+y^3$，其中 x、y 都是整数，则 n 只能是 2 或可表示为 $3k\,(k+1)+1$，其中 k 是正整数。

朝花夕拾

4.1 印度古今数学家七杰——李明

中国和印度是屹立在世界东方的两大文明古国，且两国的历史进程相似。目前，同为发展中大国的印度正在各个领域赶超着中国，其软件业已仅次于美国，跃居世界第二位，这与其数学的迅速发展息息相关。2002 年 8 月，第 24 届国际数学家大会在中国的北京胜利召开，这是国际数学家大会首次在发展中国家举行。2010 年 8 月，第 26 届国际数学家大会在印度的海得拉巴召开，这是国际数学家大会第二次在发展中国家举行。这表明新世纪的印度已经悄然崛起，紧随中国跻身于数学大国行列，这与印度古今数学家的努力密不可分。鉴于目前各种书籍资料及网络对印度数学家的介绍比较分散且粗略，故笔者收集了众多资料，从中遴选出了七位杰出的印度古今数学家，对每位数学家的特点以七字加以概括，并汇编整理了他们的生平简介如下：

1. 阿耶波多（476–550）——印度数学第一人

印度最早的天文学家和数学家。生于恒河南岸的拘苏摩补罗附近。求得 $\pi \approx 3.1416$（该值与中国古代数学家刘徽于公元 3 世纪得到的“徽率”相同），掌握了用连分数方法求一次不定方程的通解。公元 499 年著《阿耶波多历算书》，总结了当时印度的天文、算术、代数与三角学知识，书中还蕴含了最早的弧度制思想。为了纪念这位杰出的数学家，1975 年印度发射的第一颗人造卫星被命名为“阿耶波多号”。

2. 婆罗摩笈多（598–660）——婆氏公式美名扬

印度数学家、天文学家。生于古印度文化中心之一的乌因贾城，曾任乌因贾城天文台台长。算术方面：给出了负数的运算法则及其表示。代数方面：得到了一元二次方程 $x^2+px-q=0$ 的一个根的公式 $x=\left(\sqrt{p^2+4q}-p\right)/2$。几何方面：最早求得圆内接四边形的面积公式为 $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$，其中 $s=(a+b+c+d)/2$，该公式是三角形面积海伦公式的推广，现称为“婆罗摩笈多公式”。不定分析方面：求得一次不定方程 $ax+by=0$（a,b,c 为整数）的整数解。于公元 628 年著《婆罗摩笈多历算书》。

3. 婆什迦罗（1114–1185）——印度古数集大成

印度古代最伟大的数学家、天文学家。长期工作于乌因贾城天文台，曾任印度莫吉安州天文学院院长。代数方面：给出了公式 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$ 的证明。不定分析方面：给出了佩尔方程 $x^2=1+py^2$ 的若干特解。三角方面：给出了 $\sin 18^\circ=\left(\sqrt{5}-1\right)/4$ 的精确表达式，给出了和差角正弦公式 $\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b$。其著作《莉拉沃蒂》和《算法本源》代表了印度古代数学的最高水平。

4. 拉马努金（1887–1920）——直觉化身铸传奇

印度传奇数学家。生于印度马德拉斯省坦焦尔县的一个小村镇里，家境贫寒。1900 年，13 岁的拉马努金独立发现了三角函数可表示成无穷级数，这是欧拉 1750 年左右发现的结论。1903 年以一流的成绩进入当地大学，由于偏科，未拿到学位，毕业后只担当一个小职员，其数学研究由于很艰深且符号特殊，当时国内的印度数学家难以鉴定他是否真有学问。1911 年他在《印度数学会学报》上发表了自己的第一篇论文“论伯努利数的一些性质”，引起了学术界的注意。1913 年，26 岁的拉马努金写信给剑桥分析学派的领袖——哈代，问他是否能肯定他笔记本中的研究成果。哈代与李特伍德一起研究拉马努金满是奇特公式的信，经过了两个半小时，两人一致认为：天才！

在哈代的反复邀请下，1914 年，27 岁的拉马努金终于打破宗教束缚去剑桥三一学院从事研究工作。在哈代的指导下，拉马努金先后发表了国际一流的论文 19 篇。1917 年拉马努金与哈代合作开创了“圆法”，从而推进了哥德巴赫猜想研究。同年，拉马努金被选入伦敦数学会，次年他当选为英国皇家学会外籍会员。1920

年，在英国时就患上肺结核的拉马努金于印度英年早逝。1927 年，剑桥大学出版社出版了拉马努金的《论文集》。

1974 年，比利时数学家德利涅证明了拉马努金的一个猜想，并因此获得了 1978 年的菲尔兹奖。1975 年印度成立了“拉马努金学会”，1986 年开始出版会刊。美国数学家伯恩特自 1977 年起，系统地证明了拉马努金笔记中的每个公式和命题，并从 1985 年至 1995 年，出版了三卷本的《拉马努金笔记》。拉马努金在印度的影响有如陈景润在中国的影响，家喻户晓，是逆境中成功的榜样，影响了印度数代年轻人奋勇进取，自强不息!

5. 马哈拉诺必斯（1893–1972）——印度统计之先驱

印度数理统计学家。生卒于印度最大的城市——加尔各答，在加尔各答获物理学位后留学于剑桥大学，回国后被聘为加尔各答管辖区学院教授，直至 1947 年退休。研究方向：数理统计学和经济规划。1930 年引入了 D^2 统计量，后被称为“马哈拉诺必斯距离”，在统计分类问题中有着广泛的应用。1931 年创立了“印度统计学会”，并任主席，培养了印度一代统计学家。曾当选为英国皇家学会会员，曾获印度最高国民奖，发表论文 200 余篇。

6. 拉奥（1920–?）——印度统计之泰斗

印度数理统计学家。生于印度卡纳塔克邦。1943 年获加尔各答大学统计学硕士学位，1944 年任职于印度统计研究所。1945 年他证明了概率论中的“拉奥-克拉美不等式”，这是求一致最小方差无偏估计的重要工具之一，同年又给出统计学中的“拉奥-布莱克韦尔定理”。1948 年获剑桥大学博士学位。1949 年起先后担任印度统计研究所教授、院长、所长直至 1979 年退休，同年受聘到美国匹兹堡大学任教授。他还当选为英国皇家学会会员，第三世界科学院（现称为发展中国家科学院）创始院士之一，现任发展中国家科学院院长。还曾任国际统计学会、国际生物统计学会等学会主席。已发表论文 230 多篇，著有《线性统计推断及其应用》（1973 年）等专著 9 部。

7. 哈里希・钱德拉（1923–1983）——“不能全凭第六感”

印度数学家，物理学家。生于印度坎普尔。曾担任著名物理学家狄拉克（量子力学的创始人之一）的助手。由于感到“第六感”式的物理思维有失严谨转而研究数学，与外尔、韦伊、扎里斯基等大数学家都有过接触。后来哈里希-钱德拉在李群表示论方面的工作堪称世界一流，这使得他 1954 和 1966 年两度在国际数学家大会作报告。1973 年他成为英国皇家学会会员，1974 年获得印度科学院“拉马努金奖”，1975 年当选为印度科学院院士，1981 年当选为全美科学院院士。著名数学家朗兰兹在评论哈里希-钱德拉时说：“他从事数学相对较晚，且有很多数学领域他从未认真涉猎过……可以毫不夸张地说，他在需要的时候就自己制造工具，一个本世纪宏伟的数学理论是被一个只学过高等微积分课程的人构造出来的”。

参考文献

[1] 《数学辞海》编辑委员会，数学辞海（第六卷）[M]. 山西：山西教育出版社，2002.8
[2] （美）克莱茵著，张理京，张锦炎，江泽涵译，古今数学思想（第一册）[M]. 上海：上海科学技术出版社，2002.7
[3] 王青建，《数学史简编》[M]. 北京：科学出版社，2004.8
[4] 张奠宙，20 世纪数学经纬 [M]. 上海：华东师范大学出版社，2002.3
[5] （美）罗伯特・卡尼格尔著，胡乐士，齐民友译，知无涯者——拉马努金传 [M]. 上海：上海科技教育出版社，2002.10
[6] 董国华，孟宪起等主编，数学百科——中学生百科丛书 [M]. 北京：中国经济出版社，2006.6

4.2 祖暅原理——何万程

祖暅（读音 gèng），字景烁，是我国南北朝时代南朝的数学家，科学家祖冲之的儿子。祖冲之去世后，他在梁朝天监三年（公元 504 年）、八年、九年先后三次上书，建议采用他父亲编制的《大明历》，终于使父亲的遗愿得以实现。祖暅的主要工作是修补编辑他父亲的数学著作《缀术》。在实践的基础上，他提出了著名的祖暅原理："幂势既同，则积不容"。这里"幂"与"势"分别指几何体的截面积与高，意思是，如果两个等高的几何体在同高处截二立体的面积恒等，则这两个物体的体积相等。这个原理就是祖暅原理。他运用这一原理和由他创造的开立圆术，发展了他父亲的研究成果，巧妙地证得球的体积公式。他求得这一公式比意大利数学家卡瓦列利（Bonaventura Cavalieri，1589–1647）至少要早 1100 年。

利用祖暅原理，我们可以立即得到如下结论：

定理 4.2.1. 等底等高的两个柱体的体积相等。

定理 4.2.2. 等底等高的两个锥体的体积相等。

如果把由长方体的体积公式 $V = abc$（a、b、c 分别为长、宽、高）作为已知结论，由定理 4.2.1 立即得到：

定理 4.2.3. 底面面积为 S，高为 h 的柱体体积为 $V = Sh$。

利用三棱柱的体积公式，可以求得与这个三棱柱等底等高三棱锥的体积是这个三棱柱体积的三分之一，其具体推导过程可参考 1983 年至 1995 年左右人民教育出版社出版的《立体几何》教材，这里不详细写了。

利用三棱锥的体积公式以及定理 4.2.2，立即得到：

定理 4.2.4. 底面面积为 S，高为 h 的锥体体积为 $V = \dfrac{1}{3}Sh$。

利用定理 4.2.3、定理 4.2.4 便可求得台体的体积，用定理 4.2.3、定理 4.2.4 以及祖暅原理就可以求得球体的体积，其具体推导过程可参考 1983 年至 1995 年左右人民教育出版社出版的《立体几何》教材，这里也详细写了。

作为祖暅原理应用的具体例子，下面来求环体的体积以及牟合方盖的体积。

定理 4.2.5. 一个半径是 r 的圆 O，其圆心到旋转轴 l 的距离是 R（$R \geq r$），则此圆绕旋转轴 l 旋转一周后所成的环的体积是 $V = 2\pi^2 Rr^2$。

证明 把环放置在与旋转轴垂直的平面 α 上，另取一个旋转轴与 α 平行，底面与该平面相切，并且与环放置在 α 同侧的圆柱，该圆柱的高是 $2\pi R$，底面半径是 r。取一与 α 的距离是 d 的平面 β，β 与环和圆柱在 α 的同侧，则 β 截环的面积是

$$S_1 = \pi\left(R + \sqrt{r^2 - d^2}\right)^2 - \pi\left(R - \sqrt{r^2 - d^2}\right)^2 = 2\pi R\sqrt{r^2 - d^2},$$

β 截圆柱的面积是

$$S_2 = 2\pi R\sqrt{r^2 - d^2},$$

所以 $S_1 = S_2$，根据祖暅原理，环的体积与圆柱的体积相等，因此

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 Rr^2。$$

□

定义 4.2.1. 两个半径底面半径相等，旋转轴共面并且互相垂直的圆柱的公共部分称为牟合方盖。

图 4.2.1 是牟合方盖的直观图。

定理 4.2.6. 由两个底面半径是 r 的圆柱构成的牟合方盖的体积是 $V = \dfrac{16}{3}r^3$。

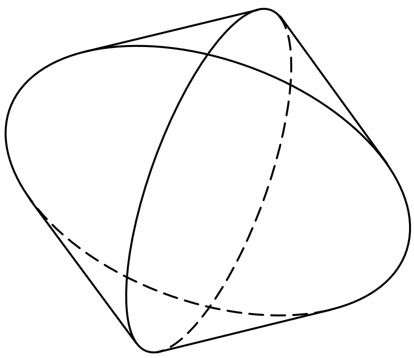


图 4.2.1

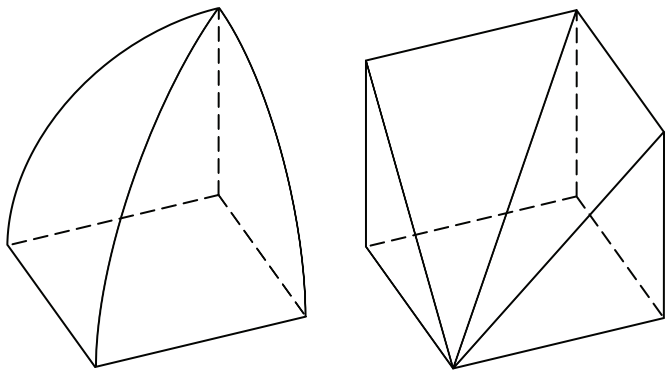


图 4.2.2

证明 用过圆柱两旋转轴的平面和过圆柱一旋转轴并且与两旋转轴垂直的两平面截取牟合方盖，所得部分的体积是整个牟合方盖体积的 $\dfrac{1}{8}$。另取一个棱长是 r 的正方体，放置在两圆柱旋转轴所在的平面上，并且与所截的牟合方盖部分同侧，以正方体与两圆柱旋转轴所在的平面平行的平面为底，以与两圆柱旋转轴所在的平面平行的平面的某个正方体的顶点为顶点截取一个四棱锥，这样就得到另一个多面体 P。用平行于与两圆柱旋转轴所在的平面并且与其距离是 d 的平面 α 截取两个几何体，则 α 截得上述牟合方盖部分的面积是

$$S_1 = \left(\sqrt{r^2 - d^2}\right)^2 = r^2 - d^2,$$

α 截得多面体 P 的面积是

$$S_2 = r^2 - d^2,$$

所以 $S_1 = S_2$，根据祖暅原理，上述牟合方盖部分的体积与多面体 P 的体积相等，因此

$$V = 8 \cdot \left(r^3 - \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot r\right) = \frac{16}{3} r^3。$$

□