

模块综合试卷(一)

(时间: 120 分钟 满分: 150 分)

一、选择题(本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分)

1. 设 i 为虚数单位, 则 $(x+i)^6$ 的展开式中含 x^4 的项为()

- A. $-15x^4$ B. $15x^4$
C. $-20ix^4$ D. $20ix^4$

答案 A

解析 由题意可知, 含 x^4 的项为 $C_6^2 x^4 i^2 = -15x^4$.

2. 已知集合 $A = \{5\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 3, 4\}$, 若从这三个集合中各取一个元素构成空间直角坐标系中点的坐标, 则确定的不同点的个数为()

- A. 36 B. 35 C. 34 D. 33

答案 D

解析 不考虑限定条件确定的不同点的个数为 $C_2^1 C_3^1 A_3^3 = 36$,

但集合 B, C 中有相同元素 1, 由 5, 1, 1 三个数确定的不同点的个数为 3, 故所求的个数为 $36 - 3 = 33$.

3. 抛掷一枚质地均匀的硬币两次, 在第一次正面向上的条件下, 第二次反面向上的概率为()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

答案 C

解析 记事件 A 表示“第一次正面向上”, 事件 B 表示“第二次反面向上”, 则 $P(AB) = \frac{1}{4}$,

$$P(A) = \frac{1}{2}, \therefore P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{2}.$$

4. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$, 且 $P(\xi < 2) = 0.6$, 则 $P(0 < \xi < 1)$ 等于()

- A. 0.4 B. 0.3 C. 0.2 D. 0.1

答案 D

解析 由已知可得曲线关于直线 $x=1$ 对称, $P(\xi < 2) = 0.6$, 所以 $P(\xi > 2) = P(\xi < 0) = 0.4$, 故

$$P(0 < \xi < 1) = \frac{1}{2} P(0 < \xi < 2) = \frac{1}{2} (1 - 0.4 - 0.4) = 0.1.$$

5. 给出以下三个说法:

① 绘制频率分布直方图时, 各小长方形的面积等于相应各组的组距;

② 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(4, 2^2)$, 则 $P(\xi > 4) = \frac{1}{2}$;

③ 对分类变量 X 与 Y , 若它们的 χ^2 统计量的值越小, 则判断“ X 与 Y 有关系”的犯错误的概

率越小.

其中正确的说法是()

A.①② B.② C.①③ D.②③

答案 B

解析 ①中各小长方形的面积等于相应各组的频率;②随机变量 ξ 服从正态分布 $N(4,2^2)$,正态曲线对称轴为 $x=4$,所以 $P(\xi>4)=\frac{1}{2}$;③对分类变量 X 与 Y ,若它们的 χ^2 统计量的值越小,则说明“ X 与 Y 有关系”的犯错误的概率越大.

6.设某地区历史上从某次特大洪水发生以后,在30年内发生特大洪水的概率是0.8,在40年内发生特大洪水的概率是0.85.在过去的30年内该地区都未发生特大洪水,则在未来10年内该地区发生特大洪水的概率是()

A.0.25 B.0.3 C.0.35 D.0.4

答案 A

解析 设在未来10年内该地区发生特大洪水的概率是 P ,根据条件可得, $0.8 \times 1 + (1 - 0.8) \times P = 0.85$,解得 $P = 0.25$.

7.某机构对儿童记忆能力 x 和识图能力 y 进行统计分析,得到如下数据:

记忆能力 x	4	6	8	10
识图能力 y	3	5	6	8

由表中数据,求得线性回归方程为 $y = 0.8x + \hat{a}$,若某儿童记忆能力为12,则预测他的识图能力约为()

A.9.5 B.9.8 C.9.2 D.10

答案 A

解析 $\because \bar{x} = \frac{1}{4} \times (4 + 6 + 8 + 10) = 7$, $\bar{y} = \frac{1}{4} \times (3 + 5 + 6 + 8) = 5.5$, $\therefore$ 样本点的中心为 $(7, 5.5)$,

代入回归方程得 $5.5 = 0.8 \times 7 + \hat{a}$, $\therefore \hat{a} = -0.1$,

$\therefore \hat{y} = 0.8x - 0.1$,

当 $x = 12$ 时, $y = 0.8 \times 12 - 0.1 = 9.5$,故选A.

8.甲、乙、丙3位志愿者安排在周一至周五5天中参加某项志愿者活动,要求每人参加一天且每天至多安排一人,并要求甲安排在另外两位前面,则不同的安排方法共有()

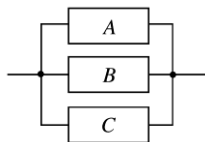
A.40种 B.30种 C.20种 D.60种

答案 C

解析 分类解决.甲排周一,乙、丙只能是周二至周五4天中选两天进行安排,有 $A_4^2 = 12$ (种)方法;甲排周二,乙、丙只能是周三至周五选两天安排,有 $A_3^2 = 6$ (种)方法;甲排周三,乙、

丙只能安排在周四和周五, 有 $A_2^2=2$ (种)方法. 由分类计数原理可知, 共有 $12+6+2=20$ (种)方法.

9. 如图所示, A, B, C 表示 3 种开关, 若在某段时间内它们正常工作的概率分别为 0.9, 0.8, 0.7, 那么此系统的可靠性为()



A. 0.504

B. 0.994

C. 0.496

D. 0.06

答案 B

解析 $1 - P(\overline{A} \overline{B} \overline{C}) = 1 - P(\overline{A}) P(\overline{B}) P(\overline{C})$

$$= 1 - 0.1 \times 0.2 \times 0.3 = 1 - 0.006 = 0.994.$$

10. 已知 $\left(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中含 $x^{\frac{3}{2}}$ 的项的系数为 30, 则 a 等于()

A. $\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}$ C. 6 D. -6

答案 D

解析 $\left(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式通项 $T_{r+1} = C_5^r x^{\frac{5-r}{2}} (-1)^r a^r \cdot x^{-\frac{r}{2}} = (-1)^r a^r C_5^r x^{\frac{5-r}{2}}$,

令 $\frac{5-r}{2} = \frac{3}{2}$, 则 $r=1$,

$\therefore T_2 = -a C_5^1 x^{\frac{3}{2}}$, $\therefore -a C_5^1 = 30$, $\therefore a = -6$, 故选 D.

11. 假设每一架飞机的引擎在飞行中出现故障的概率为 $1-p$, 且各引擎是否有故障是独立的, 已知 4 引擎飞机中至少有 3 个引擎正常运行, 飞机就可成功飞行; 2 引擎飞机要 2 个引擎全部正常运行, 飞机才可以成功飞行. 要使 4 引擎飞机更安全, 则 p 的取值范围是()

A. $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$

B. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

C. $\left(0, \frac{2}{3}\right)$

D. $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

答案 B

解析 4 引擎飞机成功飞行的概率为 $C_4^3 p^3 (1-p) + p^4$, 2 引擎飞机成功飞行的概率为 p^2 , 要使 $C_4^3 p^3 (1-p) + p^4 > p^2$, 必有 $\frac{1}{3} < p < 1$.

12. 若在二项式 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ 的展开式中前三项的系数成等差数列, 则把展开式中所有的项重新

排成一列, 有理项都互不相邻的概率为()

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{5}{12}$

答案 D

解析 注意到二项式 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ 的展开式的通项是 $T_{r+1} = C_n^r (\sqrt{x})^{n-r} \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^r = C_n^r 2^{-r} x^{\frac{2n-3r}{4}}$.

依题意有 $C_n^0 + C_n^2 2^{-2} = 2C_n^1 2^{-1} = n$, 即 $n^2 - 9n + 8 = 0$, $(n-1)(n-8) = 0 (n \geq 2)$, 解得 $n = 8$. 所

以二项式 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^8$ 的展开式的通项是 $T_{r+1} = C_8^r 2^{-r} x^{4 - \frac{3r}{4}}$, 展开式中的有理项共有 3 项,

所求的概率为 $\frac{A_6^6 A_7^3}{A_9^9} = \frac{5}{12}$.

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 下列关于回归分析与独立性检验的说法正确的是_____. (填序号)

- ①回归分析和独立性检验没有什么区别;
- ②回归分析是对两个变量准确关系的分析, 而独立性检验是分析两个变量之间的不确定性关系;
- ③回归分析研究两个变量之间的相关关系, 独立性检验是对两个变量是否具有某种关系的一种检验;
- ④独立性检验可以 100% 确定两个变量之间是否具有某种关系.

答案 ③

解析 由回归分析、独立性检验的意义知, 回归分析与独立性检验都是研究两个变量之间的相关性, 但方法与手段有所不同, 研究角度不同, 由其意义知, ③正确.

14. 任意选择四个日期, 设 X 表示取到的四个日期中星期天的个数, 则 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$, $V(X) = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $\frac{4}{7}$ $\frac{24}{49}$

解析 由题意得, $X \sim B\left(4, \frac{1}{7}\right)$, 所以 $E(X) = \frac{4}{7}$, $V(X) = \frac{24}{49}$.

15. 用数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 组成没有重复的数字, 且至多有一个数字是偶数的四位数, 这样的四位数一共有_____个. (用数字作答)

答案 1 080

解析 ①当组成四位数的数字中有一个偶数时, 四位数的个数为 $C_5^3 C_4^1 A_4^4 = 960$.

②当组成四位数的数字中不含偶数时, 四位数的个数为 $A_5^4 = 120$.

故符合题意的四位数一共有 $960 + 120 = 1\,080$ (个).

16. 某数学老师身高为 176 cm, 他爷爷、父亲和儿子的身高分别是 173 cm, 170 cm 和 182 cm. 因儿子的身高与父亲的身高有关, 该老师用线性回归分析的方法预测他孙子的身高为_____ cm.

答案 183.5

解析 记从爷爷起向下各代依次为 1,2,3,4,5, 用变量 x 表示, 其中 5 代表孙子. 各代人的身高为变量 y , 则有

x	1	2	3	4
y	173	170	176	182

计算知 $\bar{x} = 2.5$, $\bar{y} = 175.25$. 由回归系数公式得 $\hat{b} = 3.3$,

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 175.25 - 3.3 \times 2.5 = 167$, $\therefore$ 线性回归方程为 $\hat{y} = 3.3x + 167$, 当 $x = 5$ 时, $y = 3.3 \times 5 + 167 = 183.5$, 故预测其孙子的身高为 183.5 cm.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分)

17.(10 分) 已知 $(a^2 + 1)^n$ 展开式中的各项系数之和等于 $\left(\frac{16}{5}x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式的常数项, 而 $(a^2 + 1)^n$ 的展开式的系数最大的项等于 54, 求 a 的值.

解 $\left(\frac{16}{5}x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r \left(\frac{16}{5}x^2\right)^{5-r} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = \left(\frac{16}{5}\right)^{5-r} C_5^r x^{\frac{20-5r}{2}}$,

令 $20 - 5r = 0$, 得 $r = 4$,

故常数项 $T_5 = C_5^4 \times \frac{16}{5} = 16$.

又 $(a^2 + 1)^n$ 展开式的各项系数之和等于 2^n ,

由题意知 $2^n = 16$, 得 $n = 4$,

由二项式系数的性质知, $(a^2 + 1)^n$ 展开式中系数最大的项是中间项 T_3 ,

故有 $C_4^2 a^4 = 54$, 解得 $a = \pm\sqrt{3}$.

18.(12 分) 从 7 名男生和 5 名女生中选出 5 人, 分别求符合下列条件的选法数.

(1) A, B 必须被选出;

(2) 至少有 2 名女生被选出;

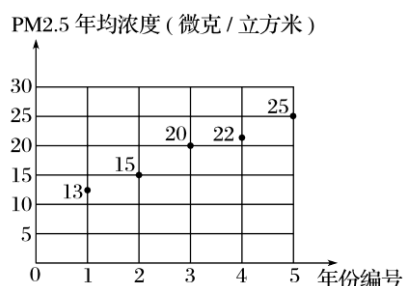
(3) 让选出的 5 人分别担任体育委员、文娱委员等 5 种不同职务, 但体育委员由男生担任, 文娱委员由女生担任.

解 (1) 除选出 A, B 外, 还需从其他 10 个人中再选 3 人, 选法数为 $C_{10}^3 = 120$.

(2) 按女生的选取情况分类: 选 2 名女生、3 名男生, 选 3 名女生、2 名男生, 选 4 名女生、1 名男生, 选 5 名女生. 所有选法数为 $C_5^2 C_7^3 + C_5^3 C_7^2 + C_5^4 C_7^1 + C_5^5 = 596$.

(3) 选出 1 名男生担任体育委员, 再选出 1 名女生担任文娱委员, 从剩下的 10 人中任选 3 人担任其他 3 种职务. 根据分步计数原理, 所有选法数为 $C_7^1 C_5^1 A_{10}^3 = 25\,200$.

19.(12 分)近年来,随着以煤炭为主的能源消耗大幅攀升,机动车持有量急剧增加,某市空气中的 PM2.5(直径小于等于 2.5 微米的颗粒物)的含量呈逐年上升的趋势,如图是根据该市环保部门提供的 2012 年至 2016 年该市 PM2.5 年均浓度值画成的散点图.(为便于计算,把 2012 年编号为 1,2013 年编号为 2, ..., 2016 年编号为 5)



(1)以 PM2.5 年均浓度值为因变量,年份的编号为自变量,利用散点图提供的数据,用最小二乘法求出该市 PM2.5 年均浓度值与年份编号之间的线性回归方程 $\hat{y}=bx+a$;

(2)按世界卫生组织(WHO)过渡期一1 的标准,空气中的 PM2.5 的年均浓度限值为 35 微克/立方米,该市若不采取措施,试预测到哪一年该市空气中 PM2.5 的年均浓度值将超过世界卫生组织(WHO)过渡期一1 设定的限制.

$$\text{参考公式: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

解 (1)由散点图可得,变量 x_i, y_i 组成的几组数据为(1,13), (2,15), (3,20), (4,22), (5,25), 则 $\bar{x}=3, \bar{y}=19$,

$$\text{所以 } \hat{b} = \frac{(-2) \times (-6) + (-1) \times (-4) + 0 \times 1 + 1 \times 3 + 2 \times 6}{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2} = 3.1.$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 19 - 3.1 \times 3 = 9.7.$$

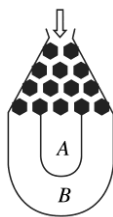
所以所求线性回归方程为 $\hat{y}=3.1x+9.7$.

(2)由 $3.1x+9.7>35$, 得 $x>8.16$,

因为 $x \in \mathbf{N}$, 所以 $x=9$.

故可预测到 2020 年该市空气中 PM2.5 的年均浓度值将超过世界卫生组织(WHO)过渡期一1 设定的限值.

20.(12 分)将一个半径适当的小球放入如图所示的容器最上方的入口处,小球将自由下落.小球在下落过程中,将 3 次遇到黑色障碍物,最后落入 A 袋或 B 袋中.已知小球每次遇到黑色障碍物时向左、右两边下落的概率都是 $\frac{1}{2}$.



(1)求小球落入 A 袋中的概率 $P(A)$;

(2)在容器入口处依次放入 4 个小球, 记 ξ 为落入 A 袋中小球的个数, 试求 $\xi=3$ 的概率与 ξ 的均值 $E(\xi)$.

解 (1)方法一 记小球落入 B 袋中的概率为 $P(B)$, 则 $P(A)+P(B)=1$.

由于小球每次遇到黑色障碍物时一直向左或者一直向右下落, 小球将落入 B 袋,

$$\therefore P(B)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4},$$

$$\therefore P(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

方法二 由于小球每次遇到黑色障碍物时, 有一次向左和两次向右或两次向左和一次向右下

落时小球将落入 A 袋, $\therefore P(A)=C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^3+C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{4}$.

(2)由题意, 知 $\xi \sim B\left(4, \frac{3}{4}\right)$,

$$\therefore P(\xi=3)=C_4^3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{27}{64},$$

$$\therefore E(\xi)=4 \times \frac{3}{4}=3.$$

21.(12 分)“中国式过马路”存在很大的交通安全隐患.某调查机构为了解路人对“中国式过马路”的态度是否与性别有关, 从马路旁随机抽取 30 名路人进行了问卷调查, 得到了如下列联表:

	男性	女性	合计
反感	10		
不反感		8	
合计			30

已知在这 30 人中随机抽取 1 人抽到反感“中国式过马路”的路人的概率是 $\frac{8}{15}$.

(1)请将上面的列联表补充完整(直接写结果, 不需要写求解过程), 并据此资料分析反感“中国式过马路”与性别是否有关?

(2)若从这 30 人中的女性路人中随机抽取 2 人参加一活动, 记反感“中国式过马路”的人数为 X , 求 X 的概率分布和均值.

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

$P(\chi^2 \geq x_0)$	0.10	0.05	0.010	0.005
x_0	2.706	3.841	6.635	7.879

解 (1)列联表如下:

	男性	女性	合计
反感	10	6	16
不反感	6	8	14
合计	16	14	30

$$\text{由已知数据得 } \chi^2 = \frac{30 \times (10 \times 8 - 6 \times 6)^2}{16 \times 14 \times 16 \times 14} \approx 1.158 < 2.706.$$

所以, 没有充足的理由认为反感“中国式过马路”与性别有关.

(2) X 的可能取值为 0,1,2,

$$P(X=0) = \frac{C_8^2}{C_{14}^2} = \frac{4}{13},$$

$$P(X=1) = \frac{C_6^1 C_8^1}{C_{14}^2} = \frac{48}{91},$$

$$P(X=2) = \frac{C_6^2}{C_{14}^2} = \frac{15}{91}.$$

所以 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	$\frac{4}{13}$	$\frac{48}{91}$	$\frac{15}{91}$

$$X \text{ 的均值为 } E(X) = 0 \times \frac{4}{13} + 1 \times \frac{48}{91} + 2 \times \frac{15}{91} = \frac{6}{7}.$$

22.(12分)设袋子中装有 a 个红球、 b 个黄球、 c 个蓝球, 且规定: 取出 1 个红球得 1 分, 取出 1 个黄球得 2 分, 取出 1 个蓝球得 3 分.

(1)当 $a=3, b=2, c=1$ 时, 从该袋子中依次任取(有放回, 且每个球取到的机会均等)2 个球, 记随机变量 ξ 为取出的 2 个球所得分数之和, 求 ξ 的概率分布;

(2)从该袋子中任取(每球取到的机会均等)1 个球, 记随机变量 η 为取出此球所得分数.若 $E(\eta) = \frac{5}{3}, V(\eta) = \frac{5}{9}$, 求 $a:b:c$.

解 (1)根据题意, 得 ξ 的所有可能取值为 2,3,4,5,6.

$$\text{故 } P(\xi=2) = \frac{3 \times 3}{6 \times 6} = \frac{1}{4}, P(\xi=3) = \frac{2 \times 3 \times 2}{6 \times 6} = \frac{1}{3},$$

$$P(\xi=4)=\frac{2\times 3\times 1+2\times 2}{6\times 6}=\frac{5}{18},$$

$$P(\xi=5)=\frac{2\times 2\times 1}{6\times 6}=\frac{1}{9},$$

$$P(\xi=6)=\frac{1\times 1}{6\times 6}=\frac{1}{36}.$$

所以 ξ 的概率分布为

ξ	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

(2)根据题意, 知 η 的概率分布为

η	1	2	3
P	$\frac{a}{a+b+c}$	$\frac{b}{a+b+c}$	$\frac{c}{a+b+c}$

$$\text{所以 } E(\eta)=\frac{a}{a+b+c}+\frac{2b}{a+b+c}+\frac{3c}{a+b+c}=\frac{5}{3},$$

$$V(\eta)=\left(1-\frac{5}{3}\right)^2\frac{a}{a+b+c}+\left(2-\frac{5}{3}\right)^2\frac{b}{a+b+c}+\left(3-\frac{5}{3}\right)^2\frac{c}{a+b+c}=\frac{5}{9},$$

$$\text{化简得}\begin{cases} 2a-b-4c=0, \\ a+4b-11c=0, \end{cases}$$

解得 $a=3c$, $b=2c$, 故 $a:b:c=3:2:1$.